普通高等教育测绘类规划教材

解析摄影测量学

李德仁　郑肇葆　编著

JIEXI SHEYING CELIANGXUE

测绘出版社

VISIT…

普通高等教育测绘类规划教材

解析摄影测量学

李德仁　郑肇葆　编著

测绘出版社

（京）新登字065号

内 容 简 介

本书全面讲述了解析摄影测量的基本理论和基本方法，主要内容包括：解析摄影测量的理论基础；解析空中三角测量的现代理论与方法；摄影测量与非摄影测量的联合平差；粗差探测与精度和可靠性的分析；计算机控制和辅助的解析摄影测量仪器与系统；解析测图仪和正射投影仪的原理、应用和处理线性阵列传感影像的方法。全书共分十六章，每章附有思考题。全书理论完整，内容丰富，反映了当代解析摄影测量的新水平。可作为高等院校摄影测量与遥感专业本科生基本教材，也可供其它测绘专业的师生、工程技术人员和研究人员学习参考。

解析摄影测量学

李德仁 郑肇葆 编著

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092 1/16 · 印张 29 · 字数 648 千字

1992年10月第一版 · 1992年10月第一次印刷

印数0 001—2 500册 · 定价 7.50 元

ISBN 7-5030- 0531-9/P · 203

前　言

本书是根据武汉测绘科技大学摄影测量与遥感专业的“解析摄影测量学”教学大纲编写的，可作为大学本科和函授的教材，也可供其他测绘专业的师生、工程技术人员和研究人员学习参考。

摄影测量学经历了从模拟法到解析法的转变，并正朝数字化的方向发展。解析摄影测量是计算机科学与模拟摄影测量相结合的产物，它比模拟摄影测量有着十分明显的进步，而且它对数字摄影测量的产生与发展起着十分重要的作用。可以说，当今时代是解析摄影测量的黄金时代。

本书共分十六章。前四章为解析摄影测量学的基础，包括定义和任务、空间坐标系和坐标变换、单像和双像解析处理的数学关系、像片连接点的设置与像点坐标量测，以及大地坐标系与摄影测量坐标系的变换，它们构成了处理航空像片、卫星像片和近景像片的解析数学基础。第五章至第十二章为解析空中三角测量的现代理论与方法。包括航带法空中三角测量、独立模型法区域网空中三角测量、光束法区域网空中三角测量、系统误差的补偿、与非摄影测量观测值（尤其是GPS全球定位系统）的联合平差、解析空中三角测量的精度分析、可靠性分析与粗差探测，以及在线像片三角测量。它们构成了摄影测量方法加密测图控制点和高精度点位测定的基础。第十三章和第十四章为计算机控制和辅助下的解析摄影测量仪器与系统，主要介绍作为当代摄影测量仪器主流的解析测图仪和正射投影仪的原理、应用及主要产品，也简要地介绍了模拟仪器的改造和数字测图问题。第十五章讲述了在解析测图仪和正射投影仪上处理线性阵列传感器影像的原理和方法。最后一章介绍摄影测量中的自由网平差与变形分析。

本书的内容着重于讲述解析摄影测量的基本理论和基本方法。每章后附有习题与思考题。在章、节标题前标以“*”符号者，可不作为基本教材内容，由任课教师视具体情况安排。具体的作业方法则由另开设的实验课、教学实习和实习讲义来补充。

本书第一、三、四、八、九、十一、十三、十四、十五、十六章由李德仁编写，第二、五、六、七、十、十二章由郑肇葆编写。书稿承郑州测绘学院钱曾波教授和西南交通大学刘文熙教授初审，钱曾波教授复审，提出了许多宝贵意见；我校航测与遥感系的老师和同学们也提出了许多建议和意见，在此谨表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中可能存在不足与不妥之处，敬请读者不吝指正。

李德仁　郑肇葆

1992年2月于武汉测绘科技大学

第四章　大地坐标系与摄影测量坐标系的变换……（98）
§4.1　近似处理方法……（98）
一、坐标正反变换公式……（98）
二、对摄测高程引入地球曲率改正……（100）
§4.2　大地坐标系与摄影测量坐标系间的严格变换……（100）
一、涉及到的坐标系……（100）
二、不同坐标系的正反算公式……（101）
三、不经过地心直角坐标系的实用变换公式……（106）
§4.3　各种变换方法在实际中的应用……（108）
本章习题与思考题……（109）
第五章　航带法空中三角测量……（110）
§5.1　概述……（110）
一、解析空中三角测量方法的分类……（110）
二、航带法解析空中三角测量的基本思想与流程……（110）
§5.2　自由航带网的构建……（111）
一、像点坐标系统误差的改正……（111）
二、连续像对相对定向与模型连接……（114）
三、单独像对相对定向与模型连接……（116）
四、带模型连接条件的相对定向……（117）
§5.3　单航带自由网的绝对定向与非线性改正……（121）
一、航带网的绝对定向……（121）
二、航带网的非线性改正……（122）
§5.4　航带法区域网平差……（129）
一、航带法区域网平差的基本思想……（129）
二、误差方程式的建立……（129）
三、法方程式的建立及系数矩阵填写规律……（132）
四、法方程式的求解……（133）
五、待定点地面测量坐标计算……（134）
本章习题与思考题……（135）
第六章　独立模型法区域网空中三角测量……（137）
§6.1　概述……（137）
§6.2　平面高程联解的独立模型法区域网平差……（138）
一、基本方法与整体平差的初始值计算……（138）
二、平面高程联解的独立模型法区域网平差的数学模型……（138）
§6.3　平面高程分求的独立模型法区域网平差……（140）
一、基本思想……（140）
二、平面坐标的平差……（141）

三、高程平差计算……（142）
四、平面高程迭代解算过程……（143）
五、改化法方程式的建立和它的一般结构……（144）
六、模型编号顺序与带宽的关系……（152）
§ 6.4 带状法方程式的循环分块解法……（154）
一、例常的先法化后消元的解法……（154）
二、边法化边消元的循环分块解法……（155）
§ 6.5 投影中心坐标的测定……（156）
一、空间导杆可安置垂直位置的立体测图仪……（157）
二、立体测图仪不具备使空间导杆作垂直安置的设备……（157）
本章习题与思考题……（158）
第七章 光束法区域网空中三角测量……（159）
§ 7.1 概述……（159）
§ 7.2 确定像片外方位元素和地面点坐标的近似值……（160）
一、航带法区域网平差……（160）
二、平面区域网方法……（160）
§ 7.3 误差方程式与法方程式建立……（161）
一、误差方程式与法方程式结构……（161）
二、改化法方程式的结构……（164）
§ 7.4 两类未知数交替趋近法……（166）
*§ 7.5 区域网平差中像片和点的排列顺序……（167）
一、摄站点的逻辑顺序编号……（167）
二、公共点的逻辑顺序编号……（167）
§ 7.6 三种区域网平差方法的比较……（170）
本章习题与思考题……（172）
第八章 系统误差补偿与自检校光束法区域网平差……（174）
§ 8.1 概述……（174）
一、问题的提出……（174）
二、像片坐标的系统误差特性……（175）
三、补偿系统误差的各种方法……（176）
四、顾及像片系统误差的前提……（176）
§ 8.2 试验场检校法……（177）
一、试验场的设立与试验场摄影……（177）
二、试验场检校法测定系统误差参数……（177）
三、对该方法的评价……（178）
§ 8.3 利用附加参数的自检校法……（178）
一、基本解算过程……（178）

二、系统误差模型的选择……（180）
三、自检校平差的效果与信噪比……（181）
四、对该方法的评价……（182）
§8.4 验后补偿法……（182）
一、验后补偿法的基本步骤……（182）
二、对该方法的评价……（183）
本章习题与思考题……（184）
第九章 摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差……（185）
§9.1 概述……（185）
一、什么叫联合平差……（185）
二、联合平差的发展过程……（185）
§9.2 联合平差中各类观测值误差方程式的建立……（186）
一、物方空间的大地测量观测值……（187）
二、像片外方位元素观测值或条件……（190）
三、像片内方位元素测定值……（192）
四、一组摄影测量点应满足的条件……（192）
*§9.3 联合平差中大地测量观测值的严格数学模型……（195）
一、大地测量观测值的严密模型……（195）
二、大地测量观测值近似模型的近似性……（196）
三、一种大地测量观测值的实用模型……（197）
四、实用数学模型的精度和应用范围……（200）
§9.4 联合平差中法方程式的构建与求解……（202）
*§9.5 GPS全球定位系统在空中三角测量中的应用……（206）
一、全球定位系统（GPS）……（206）
二、GPS用于空中三角测量的可能性……（207）
三、试验结果……（209）
四、进一步的发展与展望……（211）
§9.6 高精度摄影测量加密在坐标地籍中的应用……（212）
一、概述……（212）
二、用高精度摄影测量方法加密地界点的坐标……（213）
三、用摄影测量平差方法为地界点测定提供密集控制网格……（216）
本章习题与思考题……（217）
第十章 解析空中三角测量的精度分析……（218）
§10.1 概述……（218）
§10.2 解析空中三角测量的理论精度……（218）
一、单航带空中三角测量的最弱点精度……（218）
二、航带法区域网平差的理论精度……（224）

三、独立模型法和光束法区域网平差的理论精度……（225）
§ 10.3 理论精度分析导出的控制点分布规律……（226）
一、理论精度研究导出的主要结论……（226）
二、生产中控制点的布设原则……（228）
§ 10.4 解析空中三角测量的实际精度……（229）
一、解析摄影测量的试验场……（229）
二、实际精度与理论精度的关系……（230）
三、解析空中三角测量目前能达到的精度……（231）
本章习题与思考题……（232）
第十一章 解析空中三角测量的可靠性分析与粗差探测……（233）
§ 11.1 概述……（233）
一、可靠性研究的必要性……（233）
二、可靠性研究的主要任务……（233）
§ 11.2 可靠性研究的基本理论……（234）
一、问题的提出……（234）
二、观测值误差对平差改正数的影响……（235）
三、数据探测法的简单推导……（238）
四、内部可靠性的概念……（239）
五、外部可靠性的概念……（240）
*§ 11.3 解析空中三角测量的可靠性分析……（242）
一、基本摄影测量平差问题的内外部可靠性……（242）
二、摄影测量区域网平差的可靠性……（249）
三、可靠性分析导出的测区设计和控制网布点规则……（253）
§ 11.4 粗差的检测和定位……（254）
一、概述……（254）
二、粗差检测的统计检验方法……（255）
三、剔除粗差的选择权迭代法……（256）
四、线性规划在粗差检测中的应用……（257）
本章习题与思考题……（257）
第十二章 在线空中三角测量……（259）
§ 12.1 概述……（259）
§ 12.2 在线空中三角测量的作业方案……（259）
§ 12.3 实时序贯算法……（260）
一、未知数个数不变的序贯算法……（260）
二、未知数个数变化的序贯算法……（261）
*§ 12.4 吉文斯（Givens）变换解法……（263）
一、一般的正交变换……（263）

二、吉文斯变换……（265）
三、算例……（266）
四、吉文斯变换用于序贯最小二乘平差……（268）
本章习题与思考题……（270）
第十三章　解析测图仪的原理与使用……（271）
§ 13.1　概述……（271）
一、从模拟测图仪到解析测图仪……（271）
二、解析测图仪的基本组成部分……（271）
三、解析测图仪的优点……（272）
四、解析测图仪的发展历史……（273）
§ 13.2　解析测图仪的硬件……（277）
一、立体坐标量测仪……（277）
二、接口设备……（278）
三、电子计算机……（281）
§ 13.3　解析测图仪的软件……（282）
一、解析测图仪的输入、输出和控制方式……（282）
二、实时计算软件的数学分类……（284）
三、计算机软件系统与摄影测量软件……（294）
§ 13.4　数控绘图桌和图形影像叠置系统……（298）
一、数控绘图桌……（298）
二、图形影像叠置系统……（306）
§ 13.5　解析测图仪的检验……（308）
一、准确度、精密度和稳定性检验……（309）
二、光学系统质量检验……（311）
§ 13.6　常用解析测图仪介绍……（311）
一、联邦德国欧波同厂的Planicomp系列解析测图仪……（311）
二、瑞士威特厂Aviolyt解析测图仪……（328）
三、瑞士克恩厂DSR系列解析测图仪……（342）
四、外国生产的其它解析测图仪……（351）
五、低成本或小像幅解析测图仪……（356）
六、国产解析测图仪……（358）
§ 13.7　模拟仪器的改造与数字测图……（360）
一、模拟仪器的改造……（360）
二、机助测图和数字测图……（367）
三、单张像片机控和机助测图系统……（372）
本章习题与思考题……（375）
第十四章　数控正射投影仪及其应用……（377）

§ 14.1 微分纠正的概念……(377)
一、概述……(377)
二、微分纠正的发展过程……(378)
三、正射投影仪的分类……(379)
§ 14.2 间接式光学投影微分纠正原理……(381)
§ 14.3 主要的数控正射投影仪介绍……(383)
一、威特厂Avioplan OR—1型正射投影仪……(383)
二、欧波同厂Orthocomp Z—2型解析正射投影仪……(388)
三、国产ZS—1数控正射投影仪……(392)
§ 14.4 微分纠正的正射像片精度与质量控制……(393)
一、影响微分纠正所得正射像片精度的因素……(394)
二、地面坡度所产生的正射投影模糊……(397)
三、检查正射像片精度的方法与质量控制……(399)
§ 14.5 立体正射像片对的制作……(400)
一、基本思想……(400)
二、制作立体正射像片的方法和步骤（斜平行投影法）……(401)
三、立体正射像片的高程精度……(403)
四、制作适合高程量测的立体正射像片对的方法（对数投影法）……(404)
五、立体正射像片对的应用……(406)
本章习题与思考题……(408)
第十五章 线性阵列传感器影像的解析摄影测量处理……(409)
§ 15.1 概述……(409)
一、CCD线性阵列传感器及其工作原理……(409)
二、SPOT卫星的一行CCD阵列传感器……(410)
三、三行CCD线性阵列传感器……(412)
§ 15.2 SPOT影像的光束法平差……(413)
一、坐标系的建立……(413)
二、SPOT影像的构像方程式及其线性化……(414)
三、SPOT影像光束法平差的程序结构……(418)
§ 15.3 SPOT影像在解析测图仪上的处理……(418)
一、SPOT像对立体测图LOOP程序的两种解法……(418)
二、在解析测图仪上计算SPOT影像外方位元素的方法……(419)
三、高低格网点的像点坐标改正数矩阵的计算……(419)
四、像点坐标改正数的实时计算……(420)
五、C系列解析测图仪上SPOT立体测图软件系统……(421)
§ 15.4 利用SPOT影像制作正射像片……(422)
*§ 15.5 三行CCD线性阵列传感器影像的解析摄影测量处理……(423)

一、三行CCD阵列传感器影像的构像方程式……（424）
二、定向片间距的选择与基线长度的关系……（425）
本章习题与思考题……（428）
*第十六章　摄影测量中的自由网平差与变形分析……（429）
§16.1　高精度摄影测量与变形分析……（429）
一、摄影测量用于变形分析的可能性……（429）
二、摄影测量用于变形观测的概况……（429）
§16.2　自由网平差的基本知识……（430）
一、满秩平差问题……（430）
二、秩亏自由网平差原理……（432）
三、自由网拟稳平差……（435）
四、三维摄影测量网附加条件矩阵G和B的结构形式……（436）
§16.3　摄影测量秩亏自由网平差的几何解释……（437）
§16.4　秩亏自由网平差原理用于摄影测量变形分析……（439）
一、分别平差的数学模型……（439）
二、多期观测值同时平差的数学模型……（443）
三、摄影测量自由网平差的近似解法……（443）
§16.5　摄影测量自由网平差应用举例……（445）
一、卡尔加里大学对滑坡进行的摄影测量变形观测……（445）
二、自由网平差与固定网平差的对比试验……（445）
本章习题与思考题……（447）
主要参考文献……（449）

第一章 概 述

§1.1 解析摄影测量的定义和任务

一、经典摄影测量方法——模拟法的缺点

大家知道，摄影测量学是利用摄影所得的像片，研究和确定被摄物体的形状、大小、位置、性质和相互关系的一门学科。

在基础摄影测量学中，我们讲述了单像和双像摄影测量的基本数学关系，像片纠正和投影转绘的原理与仪器，立体观察和立体量测原理，反光立体镜和立体量测仪等简易仪器，模拟法立体测图原理以及各类立体测图仪结构、原理及操作。总括起来，可以说它们均是建立在用光学、机械或光学机械等模拟方法来重建或恢复与摄影时相似的几何关系的基础上，亦即用模拟方法实现摄影光束的几何反转。这类模拟方法称为经典的摄影测量。在电子计算机问世之前，这是唯一可以利用的摄影测量方法。它一直沿用到今天，经历了整整一个世纪，是摄影测量的传统方法。

模拟法因其直观地实现摄影光束的几何反转，对于学习和了解摄影测量原理十分有效。但模拟法摄影测量存在着明显的缺点与局限性。首先是精度低。由于大面积摄影时，各片光束在空间构成复杂的几何关系，所以用模拟方法不可能实现用像片来精确地测定点位的目的。即使对于单个模型，由于模拟仪器结构复杂，受机械和光学加工的限制，精度也是有限度的。加之，在摄影过程和量测过程中可能引入的系统误差会破坏模拟仪器交会导杆的直线性，对这种种系统误差在模拟仪器上是难以方便地顾及的。其次是对原始资料有较大的限制。主要是对像片的内方位和外方位元素及仪器上的模型比例尺均有较大的限制和约束。因为内方位必须已知其精确值，而且对于不同主距的像片，必须有相应主距的投影器，否则就要采用不便于作业、且理论上不完全严格的变换光束测图。此外，模拟仪器受结构、体积大小和光机加工的限制，对像片倾斜角和基线分量均有较苛刻的限制。而且，由于模拟测图仪的模型比例尺受最大和最小高程H_{max}和H_{min}以及齿轮传动比的限制，使得在模拟仪器上确定模型比例尺成为颇费脑筋的一件事。第三个缺点是模拟法摄影测量的产品单一，一般只能提供图解产品的图件，而且不便于修改和更新。

二、从模拟法到解析法的过渡

由于电子计算机的问世，在摄影测量领域内，各种光学或机械的模拟解算方法可以通过利用电子计算机进行严密公式解算的解析方法所代替。随着电子计算机性能的稳定和价格的降低以及数据处理和计算技术的发展，解析摄影测量方法今日已成为世界各国主要的摄影测量作业方法。用之取代和改造模拟方法的趋势是十分明确的。

与模拟法相比，解析法能克服模拟法的上述所有缺点。这是因为解析法首先将量测的

原始信息输入到电子计算机中，然后用严密的数学方法实现摄影光束的重建、解算和加工处理，所以它不受像片数、像片内外方位元素、地形类别、模型比例尺等各种因素的影响。而且，由于在电子计算机中解析处理后得到的数据和结果首先是以数字形式存贮在存贮器中，它为数字摄影测量的形成和发展创造了必要条件。

摄影测量从模拟法向解析法的过渡主要包含以下几个方面的内容：

——模拟仪器上的单航带空中三角测量加密发展为以电子计算机为工具的解析空中三角测量；

——模拟测图仪器发展为解析测图仪，即发展为计算机控制下的摄影测量数据采集系统；

——普通纠正仪发展为计算机操纵下的数控微分纠正仪，它不仅能完成平坦地区，而且也能进行起伏地区的正射像片图的制作。

本书中主要叙述上述三个方面的发展。

三、解析摄影测量的定义

解析摄影测量是以电子计算机为主要手段，通过对摄影像片的量测和解析计算方法的交会（俗称“数字导杆”）方式来研究和确定所摄物体的形状、大小、位置、性质和相互关系，并提供各种摄影测量产品的一门科学。

与模拟法相比较，有着相同的原理、流程和作业方法。但是，模拟解算变成了计算机数值解算，光学或机械交会变成了所谓“数字导杆”的交会。

对于解求摄影测量基本命题，解析摄影测量有两大主要任务。第一个任务是利用电子计算机根据像片坐标量测值进行解析空中三角测量，这是一种高精度的摄影测量测定点位的方法，亦称为像片数据的点处理方式。第二个任务是用解析测图仪对立体模型进行量测，研究被摄物体的形状、大小、位置及相互关系，并通过数控绘图仪绘出所需要的图形来。这是一种高精度的摄影测量测图方法，亦称为像片数据的在线处理方式。

四、解析摄影测量对数字摄影测量的作用

如果比较一下模拟法和解析法中的数据流就会发现：在模拟法中，测图仪上由机械丝杆转动量或光栅移动量所反映的点在模型上的位置（模拟量）经齿轮或杠杆缩放的传动来驱动绘图桌上绘图仪在图面上的移动(仍是模拟量)，这是一个由模拟量到模拟量的直接数据流。而在解析法中，像点或模型点的移动量（模拟量）首先经过模数变换（A/D变换）变成纯数字量送入计算机中(数字量)，经过解算和加工后的数字再由数模转换，借助驱动系统在绘图桌上绘出图来。

由于在解析法中总要在计算机中加工和获得所需要的数字量，因而完全可以充分地利用上述的“数字信息”,对之直接进行交互编图、CAD（计算机辅助设计）或CAM（计算机辅助操作）处理。数字形式的测量结果，可以构成所谓的数字地图,从而出现了向量式摄影测量数字测图。此外，像片影像本身也可以直接数字化，获得以不同灰度级别形式表示的数字影像，对数字影像的处理和分析，导致了栅格式全数字自动化摄影测量的兴起。显然，

在解析摄影测量和数字摄影测量之间并无明显的界限。从发展过程出发，解析法主要指用解析方法来解决原来模拟法摄影测量的命题。而数字摄影测量则从概念上、手段上及最终成果等方面与传统方法都有较大的差别。

为了叙述方便，关于数字摄影测量的知识，如数字高程模型、数字测图、数字影像匹配及地形数据库等将在《数字摄影测量学》一书中叙述。

§1.2 解析摄影测量的发展过程

人们很早就企图用计算方法来解算摄影测量命题。早在1901年，Pulqrich就发明了量测像点坐标的立体坐标量测仪。能否利用所量测的像点坐标解算点在物方空间的三维坐标呢？如果是理想像对或等倾摄影时，尚可以建立简单的公式（见地面立体摄影测量）进行解算，但对于像片外方位元素未知的航空摄影测量，其关系公式（如共线、共面方程）均十分复杂，以致无法通过手工计算进行解求。所以这种计算的解法长期以来仅限于用来处理地面摄影测量的理想像对。

利用解析方法解求航空摄影测量命题可追溯到30～40年代美国的E.Church。他当时从空间摄影光线束角锥体的数学关系出发来解析地求解空间后交、前交和双点交会等问题（见第二章），并用手摇计算机迭代计算。但是，由于计算工具的限制，这种方法当时并不具有广泛的实用价值。

在模拟法统治的时代，不仅测图过程在模拟仪器上进行，即使是摄影测量加密的问题也一直在模拟仪器上进行。例如在多倍仪上或利用带正负基线安置的模拟测图仪上进行单航带空中三角测量。采用连续像片相对定向，经模型连接后依次构成航带，对仪器上读取的模型坐标再采用机械法或图解法进行绝对定向和非线性改正，获得点的最终坐标。

在50至60年代初期，人们往往还将平面和高程分开处理：平面加密用图解或解析辐射三角测量方法，高程则采用近似的解析计算方法，其中较知名的有前苏联学者提出的无扭曲模型法和中央测绘研究所法。我国学者如王之卓教授、刘先琳、李德仁及徐林泉等人在这方面也有相当的研究，提出过一些有创见的解析计算方法。但是，这种近似的处理方法精度不高、计算繁琐，只能用于中、小比例尺成图，所以当电子计算机问世之后，这些方法便不再应用。

电子计算机的出现，使得用严格计算方法解求像点在物方空间的坐标成为可能，从而开创了解析摄影测量的新纪元。

最初，人们自然地想到用计算机计算的方法来模拟在航测仪器上进行空中三角测量的全过程，这就是单航带解析空中三角测量。如果将构成的各航带整体地进行非线性改正，便构成航带法区域网平差。由于早期的电子计算机功能和速度均有限制，这种方法在50～60年代曾得到普遍的应用，在国际上，以加拿大国家研究委员会（NRC）的Schut博士为代表。我国王之卓教授早在60年代初期就倡导在我国利用电子计算机进行航带法空中三角测量。该方法在我国一直沿用至今，而在发达国家目前则主要作为更严格平差中初值的计算。关于航带法空中三角测量的原理将在本书第五章中叙述。

由于航带法空中三角测量在平差中是分步进行的，平差并不是直接针对原始观测值进行，而往往是利用前一步平差结果作为后一步平差的依据，对偶然误差与系统误差的处理是不严格的，所以它是一种近似的数值计算方法。为此，人们又提出了严密的解析解法。其中最主要的是光束法区域网平差和独立模型法区域网平差。

光束法平差最早由Schmid教授于1958～1959年提出，它以每张像片构成的光束为平差单元，直接以像点坐标为观测值，按线性化的共线方程式列出误差方程式，平差的未知数包括待求点的地面坐标（物方坐标）和像片的（内）外方位元素，对构成航带和区域的所有像片同时进行整体解求。而且，这种方法可以严格而又方便地顾及像片系统误差。只要具有高性能的电子计算机和相应的计算技术，该方法可以用来进行高精度摄影测量加密，以测定点在物方空间的坐标。该方法的理论在本书第七章中讲述。

独立模型法平差出现于60年代，最早由英国军械测量局应用(1962年)，在1966～1967年，由摄影测量国际训练中心（ITC）提出称为“Anblock”法的独立模型法平面区域网平差。最早的平面和高程联求的独立模型法平差系统有加拿大的Blais研制的SPACE-M程序和德国Ackermann教授等人研制的STRIM系统。后者为单航带独立模型法平差程序。更流行的程序是PAT-M43，这是平高分求的独立模型法平差系统。我国在近20年内，也研制成多种独立模型法平差程序，并已广泛地用于测制地形图的加密工作中。关于独立模型法的具体原理见第六章。

建立了严格的平差模型之后，为了发挥电子计算机所能提供的极高计算精度，首先需要减少偶然误差。在过去20多年中人们不仅致力于高精度量测像点坐标仪器和转点仪器的研制，而且也对像片连接点的设置方法进行了卓有成效的研究，从而使像点坐标可以达到几个微米的量测精度。这部分内容将在本书第三章叙述。

随着偶然误差的减小，人们又及时地将注意力转到对系统误差和粗差的处理，并力求在电子计算机上进行解析空中三角测量时自动补偿系统误差的影响和自动发现和改正粗差，包括在量测过程中进行质量控制和在线空中三角测量。有关这些方面的基本理论在本书第八、十、十一和十二章中将作简要介绍。

进入80年代以来，在获取像片影像过程中，各种非摄影测量观测值，尤其如GPS全球定位系统和INS惯性导航系统，被引用到摄影测量中来，从而引出了目前正在研究和试验中的摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差（第九章）。利用高精度导航数据进行空中三角测量，将有可能节省和免去地面控制点，具有很大的经济和军事效益。

解析摄影测量除了在高精度测定目标点位方面取得许多进展外，另一个重要的突破是解析测图仪和正射投影仪的问世和发展。

在电子计算机由Zuse（德国）和Aitken（美国）分别于1941和1943年发明之后，海拉瓦（Helava）于1957年提出了解析测图仪的思想，即利用电子计算机通过计算方法来实现同名光线对对相交和物方空间点的交会，构成取代光学或机械交会导杆的“数字导杆”或“数字投影仪”。由于当时的电子计算机由庞大众多的电子管元件组成，体积大、性能不稳定、价格昂贵，所以许多人，尤其是仪器厂家，对这种以数字导杆取代模拟测图仪上光学或机械交会导杆的想法并未加以重视，有些厂家甚至持怀疑态度。当时仅由意大利OMI

公司和美国Bendix公司等合作研制了AP型解析测图仪。随后亦曾出现意大利Galileo DS型称为“数字立体测图仪”的解析测图仪。但是，到了1976年时，形势发生了急剧的变化。这主要是由于电子计算机的性能和价格都发生了可喜的变化，即性能稳定、成本降低、体积减小，从而使解析测图仪成为商用产品而进入市场。由于解析测图仪的种种优点，用它来取代模拟测图仪已成为势不可挡的潮流。在这期间的主要产品有德国欧波同厂的Planicomp C100,C110，C120，C130和P1，P2，P3系列，瑞士威特厂的AC1,BC1,AC2,BC2,BC3系列，瑞士克恩厂的DSR1，DSR11，DSR12，DSR14和DSR15系列。解析测图仪与数控正射投影仪相结合已成为当代最流行的摄影测量方法。在本书的第十三、十四章中将介绍解析测图仪和正射投影仪的原理和应用。

随着航天技术的发展，以电荷耦合器件构成的CCD固态数字影像传感器，可提供极高的影像分辨率和良好的基高比，从而提供了对之进行解析摄影测量处理的可能性。法国于1986年成功发射的SPOT卫星，采用的就是线性阵列CCD传感器。对SPOT影像进行的解析处理扩大了解析摄影测量的工作范围，揭开了对航天影像进行解析摄影测量的新篇章。三行CCD线性阵列传感器的DPS系统在目前的试验过程中同样也显示了良好的前途。所有这些说明，解析摄影测量的形成和发展，不仅导致了数字摄影测量的兴起，而且它自身也仍然在不断地发展和前进。关于线性阵列传感器影像的解析摄影测量原理在本书第十五章中作简要介绍。

本书最后一章介绍自由网平差理论与解析摄影测量的结合，它从一个侧面反映了解析摄影测量在高精度变形测量和分析中的应用可能性。

今日，解析摄影测量进入它的全盛时期。

本章习题与思考题

1.如何理解解析摄影测量是模拟法摄影测量的继承与发展？
2.试比较模拟法和解析法的优缺点。
3.试简述解析空中三角测量的历史发展过程。
4.电子计算机的出现给摄影测量的发展带来哪些变化？
5.从解析测图仪的发明和发展过程，您得到哪些启迪？

第二章　解析摄影测量基础

在摄影测量与遥感学中，为了从所获得的影像确定所研究物体的位置、形状和大小，研究和掌握物—像间的解析关系，对于利用计算机的数值处理是十分重要的。

在解析摄影测量中，如何表示单张像片上像点坐标与相应地面点坐标之间关系；立体像对中，已知一对同名像点的像点坐标，如何求出相应模型点的模型坐标甚至地面坐标的问题，是本章要介绍的主要内容，也是解析摄影测量的基础。它们将涉及到以下内容：常用的解析摄影测量坐标系，它们之间转换关系；共线条件方程与单像空间后方交会；一个单元模型的解析相对定向以及空间前方交会等。

§2.1　解析摄影测量常用的坐标系

一、像平面坐标系o-xy

该坐标系位于一张像片上，通常用这张像片的像主点作为坐标原点，而该坐标系的x，y轴可以有不同的取法，常用的有以下三种形式：

（1）以主纵线为坐标系的y轴，指向主合点i的方向为正方向，主横线为x轴；

（2）取像片上两对边机械框标的连线为x和y轴，其中与航线方向一致的连线定为x轴，航线方向为正向，这种坐标系常称为框标坐标系。在实际生产中，往往还采用辅助点坐标系，它是在相应于航线方向（或其垂直方向）的一个框标附近，选刺一个固定的辅助点，以像主点与该辅助点的连线作x轴（或y轴）。

（3）在框标坐标系或辅助点坐标系中量测出像点坐标，便于在内定向中进行系统误差预改正或便于作业员自我检查，可是当摄影时像片旋角很大或航线的直线性很差时，用这种坐标系定向量测，立体效应很差，影响量测精度。为此引用第三种像平面坐标系即方位线坐标系，它采用与邻片像主点的同名点的连线（又称方位线）作为坐标系的x轴，航线方向为它的正向。

图2-1-1中o-xy即表示像平面坐标系，读者可以将它想象为以上三种坐标系中任一种。

二、像空间坐标系S-xyz

该坐标系以摄站点（或投影中心）S为坐标原点，摄影机的主光轴So为坐标系的z轴，像空间坐标系的x、y轴与像平面坐标系x、y轴平行，正方向如图2-1-1所示。该坐标系可以很方便地与像平面坐标系联系起来。

三、像空间辅助坐标系$S-XYZ$

以摄站点（或投影中心）S为坐标原点，通常以铅垂方向（或设定的某一竖直方向）为Z轴，一般取航线方向为X轴，如图2-1-1所示。这样做有利于改正沿航带累积的系统误差。

四、摄影测量坐标系$A-X_pY_pZ_p$

这个坐标系在加密待定点的摄影测量坐标时使用，它的坐标原点通常选取地面上某一点A，而它的坐标轴与像空间辅助坐标轴平行，如图2-1-1所示。在解析测图仪上，为了减小坐标的绝对值，取空中基线中点为坐标原点，故又称模型坐标系。

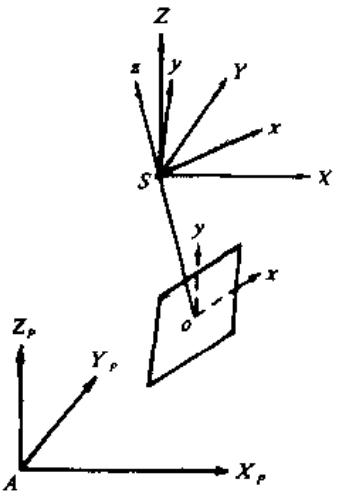


图 2-1-1

五、地面测量坐标系$O-X_tY_tZ_t$

前面介绍的四种坐标系均为右手直角坐标系，而地面测量坐标系为左手坐标系，它的X_t轴指向正北方向，就是大地测量中的高斯平面坐标系，高程是以我国黄海高程系统为标准，在地球上一个小范围内讨论问题时，把$O-X_tY_tZ_t$视为左手直角坐标系是允许的。严格处理方法见第四章。

§2.2 空间直角坐标系的旋转变换

一、像点空间直角坐标系的旋转变换——正交变换

像点空间直角坐标的变换是指像空间坐标与像空间辅助坐标的变换。由高等数学中知道，空间直角坐标的变换是正交变换，一个坐标系按三个角元素顺次地旋转即可变换为另一个同原点的坐标系。

设像点a在像空间坐标系中的坐标为（x，y，$-f$），而在像空间辅助坐标系中的坐标为（X、Y、Z），两者之间的正交变换的关系可以用下式表示：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

或

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^T\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{2-1a}$$

式中$\boldsymbol{R}$为一个3×3阶的正交矩阵，它由九个方向余弦所组成。

由正交矩阵$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{I}$的特点，可导出旋转矩阵中九个方向余弦之间有下列关系：

（1）同一行（列）的各元素自乘之和为1；

（2）任意两行（列）的对应元素互乘之和为0；

（3）旋转矩阵的行列式 $|\boldsymbol{R}| = 1$；

（4）每个元素等于其代数余子式；

（5）每个元素为变换前后两坐标轴相应夹角的余弦：

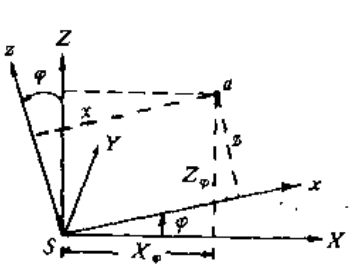
cos	x	y	z
X	a_1	a_2	a_3
Y	b_1	b_2	b_3
Z	c_1	c_2	c_3

在式（2-1）中，$z = -f$。

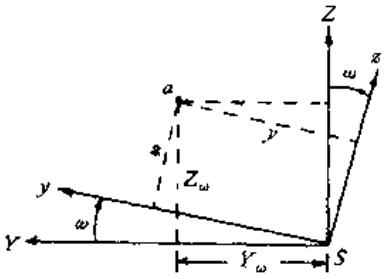
从式（2-1）可以看出，欲进行空间两个直角坐标系的转换，关键是如何确定一个正交矩阵$\boldsymbol{R}$。在前面讲述转角系统时，对于上述两种坐标系之间的关系可以这样理解，像空间坐标系是像空间辅助坐标系（相当于投影光束的起始位置）绕相应的坐标轴旋转φ，ω，κ三个角度以后的位置。

设投影光束在起始位置仅绕轴SY旋转φ角，如图2-2-1(a)，一个像点在像空间坐标系中坐标为（x，y，z），而该像点在S-XYZ坐标系中新的空间坐标$X_\varphi, Y_\varphi, Z_\varphi$的变换公式为：

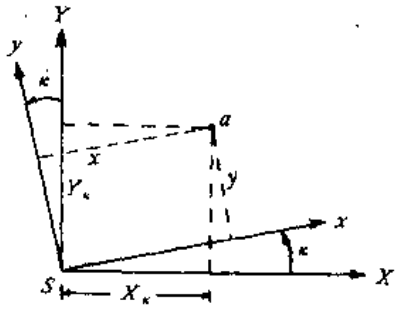
$$\begin{bmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \\ Z_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2-2}$$



（a）绕SY轴转φ角



（b）绕SX轴转ω角



（c）绕SZ轴(主光轴)转κ角

图 2-2-1

同样，当投影光束由起始位置仅绕SX轴旋转ω角，如图2-2-1(b)，得到坐标变换关系式为：

$$\begin{bmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\omega \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

投影光束由起始位置仅绕SZ轴旋转κ角如图2-2-1(c)，同样地可得到类似的坐标变换关系式：

$$\begin{bmatrix} X_\kappa \\ Y_\kappa \\ Z_\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

式（2-2），（2-3），（2-4）表达了投影光束从起始位置仅绕某轴旋转一个角度，任一像点在两个空间直角坐标系中的坐标关系，在摄影测量的立体测图过程中，投影光束的方位往往是连续转动三个角度的结果，不同的转角系统，式（2-1）中正交矩阵$\boldsymbol{R}$的九个方向余弦将含有不同的表达形式，下面讨论不同转角系统的两种空间直角坐标系的变换。

（一）以Y为主轴φ—ω—κ转角系统

首先假定像片水平的投影光束与像空间辅助坐标系重合，而且把这样的位置当作投影光束的起始位置。从这里开始光束先绕SY轴旋转φ角，再绕SX'轴旋转ω角，最后绕主光轴SZ旋转κ角达到像空间坐标系的位置，即投影光束的实际位置。利用式（2-2）~（2-4）的关系和上述角度旋转的先后顺序，可以认为a点的像空间坐标是由坐标系$X_\kappa Y_\kappa Z_\kappa$经旋转$\kappa$角后得出的结果，由式（2-4）可得

$$\begin{bmatrix} X_\kappa \\ Y_\kappa \\ Z_\kappa \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

坐标系$X_\kappa Y_\kappa Z_\kappa$可以看成是由坐标系$X_\omega Y_\omega Z_\omega$经旋转$\omega$角后得到的，由式（2-3）可得

$$\begin{bmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\omega \begin{bmatrix} X_\kappa \\ Y_\kappa \\ Z_\kappa \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\omega \cdot \boldsymbol{R}_\kappa \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

同样地，坐标系$X_\omega Y_\omega Z_\omega$是像空间辅助坐标系$XYZ$经旋转$\varphi$角以后的结果，由式（2-2）得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\varphi \begin{bmatrix} X_\omega \\ Y_\omega \\ Z_\omega \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\varphi \boldsymbol{R}_\omega \boldsymbol{R}_\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_\varphi \boldsymbol{R}_\omega \boldsymbol{R}_\kappa = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{2-6}$$

把$R_\varphi \cdot R_\omega \cdot R_\kappa$的乘积结果列出以后，可得

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi\cos\kappa - \sin\varphi\sin\omega\sin\kappa \\
a_2 &= -\cos\varphi\sin\kappa - \sin\varphi\sin\omega\cos\kappa \\
a_3 &= -\sin\varphi\cos\omega \\
b_1 &= \cos\omega\sin\kappa \\
b_2 &= \cos\omega\cos\kappa \\
b_3 &= -\sin\omega \\
c_1 &= \sin\varphi\cos\kappa + \cos\varphi\sin\omega\sin\kappa \\
c_2 &= -\sin\varphi\sin\kappa + \cos\varphi\sin\omega\cos\kappa \\
c_3 &= \cos\varphi\cos\omega
\end{aligned}\right\} \tag{2-7}
$$

由式（2-7）可以看出，如果已知一个投影光束（或一张像片）的三个角元素φ，ω，κ，就可以求出九个方向余弦，也就知道了像空间坐标系转换到像空间辅助坐标系的正交矩阵$\boldsymbol{R}$，从而可以实现这两种坐标系的相互转换。

（二）以X轴为主轴的ω'—φ'—κ'转角系统

在这种转角系统中，按$\omega' \to \varphi' \to \kappa'$的顺序旋转，同样可得两种坐标系之间变换关系式：

$$
\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\omega \cdot \boldsymbol{R}_\varphi \cdot \boldsymbol{R}_\kappa \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} \tag{2-8}
$$

$$
\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{bmatrix} \tag{2-9}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
a_1' &= \cos\varphi'\cos\kappa' \\
a_2' &= -\cos\varphi'\sin\kappa' \\
a_3' &= -\sin\varphi' \\
b_1' &= \cos\omega'\sin\kappa' - \sin\omega'\sin\varphi'\cos\kappa' \\
b_2' &= \cos\omega'\cos\kappa' + \sin\omega'\sin\varphi'\sin\kappa' \\
b_3' &= -\sin\omega'\cos\varphi' \\
c_1' &= \sin\omega'\sin\kappa' + \cos\omega'\sin\varphi'\cos\kappa' \\
c_2' &= \sin\omega'\cos\kappa' - \cos\omega'\sin\varphi'\sin\kappa' \\
c_3' &= \cos\omega'\cos\varphi'
\end{aligned}\right\} \tag{2-10}
$$

（三）以Z为主轴的A—a—κ_b转角系统

同理可得

$$
\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_A \boldsymbol{R}_a \boldsymbol{R}_{\kappa_b} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} \tag{2-11}
$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ c_1'' & c_2'' & c_3'' \end{bmatrix} \tag{2-12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_1'' &= \cos A\cos\kappa_v + \sin A\cos\alpha\sin\kappa_v \\ a_2'' &= -\cos A\sin\kappa_v + \sin A\cos\alpha\cos\kappa_v \\ a_3'' &= -\sin A\sin\alpha \\ b_1'' &= -\sin A\cos\kappa_v + \cos A\cos\alpha\sin\kappa_v \\ b_2'' &= \sin A\sin\kappa_v + \cos A\cos\alpha\cos\kappa_v \\ b_3'' &= -\cos A\sin\alpha \\ c_1'' &= \sin\alpha\sin\kappa_v \\ c_2'' &= \sin\alpha\cos\kappa_v \\ c_3'' &= \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2-13}$$

到这里为止，我们导出三种不同转角系统的正交矩阵 R 的表达形式。值得引起注意的是，尽管正交矩阵 R 的九个方向余弦的表达形式可能不一样，然而它们的数值是相等的，即 $a_i = a_i' = a_i''$，$b_i = b_i' = b_i''$，$c_i = c_i' = c_i''$。

二、各种转角系统之间的关系

在《基础摄影测量》一书中，曾详细地阐述了摄影测量仪器的各种转角系统，若从几何的关系上推导各种转角之间的关系是一项相当繁琐的工作，可是利用上述坐标轴之间的方向余弦是确定不变的这一性质，各个转角系统之间的关系是不难求出的。

（一）利用方向余弦可以求得转角的数值

由式（2-7）可知

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= -\frac{a_3}{c_3} \\ \sin\omega &= -b_3 \\ \operatorname{tg}\kappa &= \frac{b_1}{b_2} \end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

由式（2-10）可得

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi' &= -a_3' \\ \operatorname{tg}\omega' &= -\frac{b_3'}{c_3'} \\ \operatorname{tg}\kappa' &= -\frac{a_2'}{a_1'} \end{aligned}\right\} \tag{2-15}$$

由式（2-13）同样可得

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= c_3''\\ \operatorname{tg}A &= \frac{a_3''}{b_3''}\\ \operatorname{tg}\kappa &= \frac{c_1''}{c_2''}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}16)$$

（二）φ—ω—κ 系统与 ω'—φ'—κ' 系统的关系

由式（2-7）与式（2-10）可得到以下关系：

因为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a_3}{c_3}=\frac{a_3'}{c_3'},\ \text{得}\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos\omega'}\\ &b_3=b_3',\ \text{得}\sin\omega=\sin\omega'\cos\varphi'\\ &\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1'}{b_2'},\ \text{得}\ \operatorname{tg}\kappa=\frac{\cos\omega'\sin\kappa'-\sin\omega'\sin\varphi'\cos\kappa'}{\cos\omega'\cos\kappa'+\sin\omega'\sin\varphi'\sin\kappa'}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}17)$$

或者利用关系式

$$a_3'=a_3,\ \frac{b_3'}{c_3'}=\frac{b_3}{c_3},\ \frac{a_2'}{a_1'}=\frac{a_2}{a_1}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi' &= \sin\varphi\cos\omega\\ \operatorname{tg}\omega' &= \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\varphi}\\ \operatorname{tg}\kappa' &= \frac{\cos\varphi\sin\kappa+\sin\varphi\sin\omega\cos\kappa}{\cos\varphi\cos\kappa-\sin\varphi\sin\omega\sin\kappa}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}18)$$

（三）A—α—κ_z 系统与 φ—ω—κ 系统的关系

由式（2-7）和式（2-13）之间的关系式

$$c_3''=c_3,\ \frac{a_3''}{b_3''}=\frac{a_3}{b_3},\ \frac{c_1''}{c_2''}=\frac{c_1}{c_2}$$

和

$$b_3=b_3'',\ \frac{a_3}{c_3}=\frac{a_3''}{c_3''},\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1''}{b_2''}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\varphi\cos\omega\\ \operatorname{tg}A &= \sin\varphi\operatorname{ctg}\omega\\ \operatorname{tg}\kappa &= \frac{\sin\varphi\cos\kappa+\cos\varphi\sin\omega\sin\kappa}{-\sin\varphi\sin\kappa+\cos\varphi\sin\omega\cos\kappa}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}19)$$

和

$$\left.\begin{aligned}\sin\omega &= \sin\alpha\cos A\\ \operatorname{tg}\varphi &= \operatorname{tg}\alpha\sin A\\ \operatorname{tg}\kappa &= \frac{-\sin A\cos\kappa+\cos A\cos\alpha\sin\kappa}{\sin A\sin\kappa+\cos A\cos\alpha\cos\kappa}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}20)$$

三、构成旋转矩阵的几种方法

在前面曾经指出，解决两个空间直角坐标系之间的转换，关键是确定一个正交矩阵$\boldsymbol{R}$，由式（2-7），（2-10），（2-13）知道，正交矩阵$\boldsymbol{R}$中九个方向余弦是三个转角的函数。也就是说，若已知任一转角系统的三个转角，就可以完成像点坐标在两个坐标系之间的转换。这个事实告诉我们九个方向余弦只有三个独立参数，这与线性代数中一个3×3阶的正交矩阵只有三个独立参数的结论是一致的。既然如此，这三个独立参数并不一定强求它们是某个转角系统中的三个角元素，而只要任取三个独立参数，使九个方向余弦表示成为这三个参数的函数即可。下面介绍构成旋转矩阵的三种方法。

（一）利用转角系统中三个转角

若已知φ，ω，κ或ω'，φ'，κ'或A，a，κ中任一组三个转角，可以按式（2-7），（2-10），（2-13）中相应的公式计算出九个方向余弦。这种构成旋转矩阵的方法需要三角函数的运算。

（二）选用九个方向余弦中三个独立元素a_2，a_3，b_3构成旋转矩阵

利用正交矩阵的性质，由给定的三个独立元素a_2，a_3，b_3可以求得：

$$\left.\begin{aligned} c_3 &= \sqrt{1-a_3^2-b_3^2} \\ a_1 &= \sqrt{1-a_2^2-a_3^2} \\ b_1 &= \frac{-a_1a_3b_3-a_2c_3}{1-a_3^2} \\ b_2 &= \sqrt{1-b_1^2-b_3^2} \\ c_1 &= a_2b_3-a_3b_2 \\ c_2 &= a_3b_1-a_1b_3 \end{aligned}\right\} \tag{2-21}$$

由以上这些元素构成的旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \sqrt{1-a_2^2-a_3^2} & a_2 & a_3 \\ \dfrac{-a_1a_3b_3-a_2c_3}{1-a_3^2} & \sqrt{1-b_1^2-b_3^2} & b_3 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & \sqrt{1-a_3^2-b_3^2} \end{bmatrix} \tag{2-22}$$

这种方法与前一种方法比较，避免了三角函数的运算，但仍需作开平方根的运算。

（三）由反对称矩阵元素a、b、c构成的旋转矩阵

在一个方阵内，当与主对角线对称的各个元素数值相等，而符号相反时，该矩阵被称之为反对称矩阵。例如

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{c}{2} & \dfrac{-b}{2} \\ \dfrac{c}{2} & 0 & -\dfrac{a}{2} \\ +\dfrac{b}{2} & \dfrac{a}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

就是一个反对称矩阵，此时

$$S^T = -S$$

而且，矩阵 $(I+S)$ 与 $(I-S)^{-1}$ 相乘〔或 $(I-S)$ 与 $(I+S)^{-1}$ 相乘〕，结果总是一个正交矩阵。现说明如下。

设 $$R=(I+S)(I-S)^{-1}$$

只要证明 $$R^TR=I$$

则 R 必定是一个正交矩阵。

$$\begin{aligned} R^TR &= [(I+S)(I-S)^{-1}]^T[(I+S)(I-S)^{-1}] \\ &= (I+S)^{-1}(I-S)(I+S)(I-S)^{-1} \\ &= (I+S)^{-1}(I+S)(I-S)(I-S)^{-1}=I \end{aligned}$$

于是得证。

现将矩阵 R 展开得出：

$$R=(I+S)(I-S)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{c}{2} & -\frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & 1 & -\frac{a}{2} \\ +\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{c}{2} & +\frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} & 1 & \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{c}{2} & -\frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & 1 & -\frac{a}{2} \\ +\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1+\frac{a^2}{4} & \frac{ab}{4}-\frac{c}{2} & \frac{ac}{4}-\frac{b}{2} \\ -\frac{ab}{4}+\frac{c}{2} & 1+\frac{b^2}{4} & -\frac{bc}{4}-\frac{a}{2} \\ \frac{ac}{4}+\frac{b}{2} & -\frac{bc}{4}+\frac{a}{2} & 1+\frac{c^2}{4} \end{bmatrix}$$

其中 $$\Delta=\begin{bmatrix} 1 & \frac{c}{2} & +\frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} & 1 & \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & 1 \end{bmatrix}=1+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

为行列式的值。

经进一步整理，可得

$$R=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2) & -c-\frac{1}{2}ab \\ c-\frac{1}{2}ab & 1+\frac{1}{4}(-a^2+b^2-c^2) \\ +b+\frac{1}{2}ac & a-\frac{1}{2}bc \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -b+\frac{1}{2}ac \\ -a-\frac{1}{2}bc \\ 1+\frac{1}{4}(-a^2-b^2+c^2) \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

该型式的旋转矩阵又称为罗德里格斯矩阵。

这里介绍了构成旋转矩阵的三种方法，以第三方法计算最简便，因为它只含加减法的运算。这三种方法所选用的三个独立参数是各不相同，但是，对相同的两个空间直角坐标系而言，它们所构成的转换矩阵R是完全相同的。这三组独立参数中，第一种方法选用的三个转角（如φ，ω，κ）作为独立参数，具有十分明确的摄影测量含义，其余两组的几何解释较为复杂，这里不详细讨论。

四、微小转角的旋转矩阵

在摄影测量中常常遇到竖直摄影像片的处理，在这种情况下像片的外方位角元素往往是小角度（通常认为不超过3°），这时许多问题的分析、讨论中往往只考虑旋转矩阵式（2-6），（2-9）的小值一次项，这样便给我们带来方便。譬如在后面将经常遇到非线性函数的线性化处理中就会应用到。因此，这里我们将进一步讨论微小转角的旋转矩阵。

在保留小值一次项的情况下，由式（2-6）和（2-9）和（2-23）得到相同的微分旋转矩阵为：

$$d\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 1 & -d\kappa & -d\varphi \\ d\kappa & 1 & -d\omega \\ d\varphi & d\omega & 1 \end{bmatrix} \tag{2-24}$$

上式告诉我们，在保留小值一次项的情况下，φ—ω—κ转角系统与ω'—φ'—κ'转角系统的三个转角是相同的，而且与反对称矩阵元素b，a，c也是相同的。它们之间的差异反映在二次和二次以上的小值上。

在摄影测量的运算中往往需要逐渐趋近地解算每个光束或每个模型的转角，这样的趋近常常可以理解为使一个光束或模型先用它的近似值φ_0，ω_0，κ_0旋转，然后再按其各转角的改正值$d\varphi$，$d\omega$，$d\kappa$进行一次修正的旋转。若令前一次旋转矩阵为$\boldsymbol{R}_0$，那么后一次的为$d\boldsymbol{R}$，总的旋转矩阵$\boldsymbol{R}$为

$$\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_0 \tag{2-25}$$

令

$$d\boldsymbol{R}_A=\begin{bmatrix} 0 & -d\kappa & -d\varphi \\ d\kappa & 0 & -d\omega \\ d\varphi & d\omega & 0 \end{bmatrix} \tag{2-26}$$

则

$$d\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}+d\boldsymbol{R}_A \tag{2-27}$$

上式表达形式在公式推导过程中经常用到，下面举个例子：产生一个修正旋转以后，

引起的坐标增量可从以下表达式中得到

$$dR\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [I + dR_A]\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + dR_A\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

上式中第二项就是其坐标增量，即

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = dR_A\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Yd_K - Zd_\varphi \\ Xd_K - Zd_\omega \\ Xd_\varphi + Yd_\omega \end{bmatrix} \tag{2-28}$$

§ 2.3 共线条件方程与单像空间后方交会

共线条件方程是解析摄影测量中很重要的方程式，它可以用来解求单张像片的外方位元素，建立一个立体模型，一个航带模型，甚至一个区域模型。不仅如此，还广泛地应用于近景摄影测量和卫星摄影测量中。

一、共线条件方程

如图2-3-1所示，S 为摄影中心，在某一规定的物方空间坐标系中其坐标为（X_S, Y_S, Z_S），M 为任一地面点，它的物方空间坐标为（X，Y，Z）。m 为 M 在像片上的构像，相应的像空间坐标和像空辅助坐标为（x，y，$-f$），和（X_m，Y_m，Z_m）。摄影时 S，m，M 三点位于一直线上，那么像点的像空辅助坐标与地面点物方空间坐标之间有以下关系：

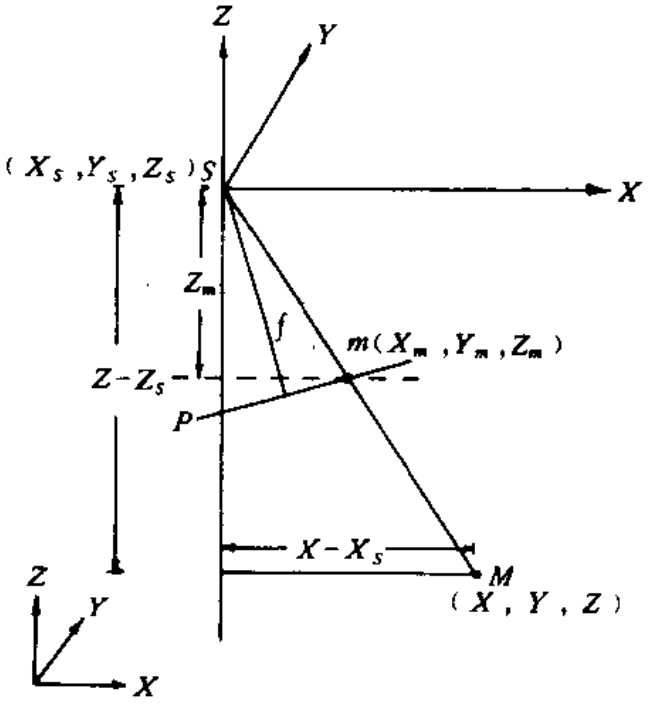


图 2-3-1

$$\frac{X_m}{X-X_S}=\frac{Y_m}{Y-Y_S}=\frac{Z_m}{Z-Z_S}=k$$

则
$$X_m=k(X-X_S),\ Y_m=k(Y-Y_S),\ Z_m=k(Z-Z_S) \tag{2-29}$$

由式（2-1a）可知，像空间坐标与像空间辅助坐标有下列关系：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix}$$

将上式展开为

$$\frac{x}{-f}=\frac{a_1X_m+b_1Y_m+c_1Z_m}{a_3X_m+b_3Y_m+c_3Z_m}$$

$$\frac{y}{-f}=\frac{a_2X_m+b_2Y_m+c_2Z_m}{a_3X_m+b_3Y_m+c_3Z_m}$$

再将式（2-29）代入上式中，并考虑到像主点的坐标x_0，y_0（像片内方位元素），得

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=-f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y-y_0&=-f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{aligned}\right\} \tag{2-30}$$

式（2-30）就是常见的共线条件方程式（简称共线方程）。

式中：x，y，$-f$为像点的像空间坐标；

f为航摄像片的焦距；

X_S，Y_S，Z_S为摄站点的物方空间坐标；

X，Y，Z为地面点的物方空间坐标；

a_i，b_i，c_i为像片的三个外方位角元素组成的九个方向余弦。

由式（2-29）和式（2-1a）还可以写出共线方程的另一种形式（反演公式）：

$$\begin{bmatrix} X-X_S \\ Y-Y_S \\ Z-Z_S \end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix}=\frac{1}{k}\boldsymbol{R}^T\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

令$\lambda_m=\frac{1}{k}$，并完整地写出旋转矩阵，则有

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\lambda_m\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} \tag{2-30a}$$

这种形式的共线方程在某些情况下，如利用DEM进行单片测图时也可能用到。

这里简要提一下共线方程的主要应用：

——单片和多片空间后方交会和前方交会；

——求像底点坐标x_n，y_n：

以$X_N=X_S$，$Y_N=Y_S$，$Z_N=Z_S-H_N$代入（2-29）式，可得

$$x_n = -f \cdot \frac{c_1}{c_3}$$

$$y_n = -f \cdot \frac{c_2}{c_3}$$

——光束法平差中的基本误差方程式；

——构成解析测图仪中数字投影器的基础；

——计算像片模拟数据（已知内外方位和物点坐标求像点坐标）；

——利用DEM进行单张像片测图等等。

二、共线条件方程的线性化

（一）在φ—ω—κ转角系统下的公式

1.严密公式

为了便于计算，常把非线性函数表达式用泰勒公式展开成线性表达式，我们把这项数学处理称之为“线性化”。这在解析摄影测量中被广泛地应用。

在式（2-30）中x，y为观测值，相应的改正数为v_x，v_y；X，Y，Z为地面点的坐标为已知值（当在这些数据中的误差不容忽视时，也可视作观测值）；X_S，Y_S，Z_S，φ，ω，κ，f，x_0，y_0为待定的参数，可用其近似值（在推导过程中近似值仍用这些相同的符号表达）加相应的改正数ΔX_S，ΔY_S，ΔZ_S，$\Delta\varphi$，$\Delta\omega$，$\Delta\kappa$，Δf，Δx_0，Δy_0表示，由此得误差方程式的一般形式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= (x) - x + \frac{\partial x}{\partial X_S}\Delta X_S + \frac{\partial x}{\partial Y_S}\Delta Y_S + \frac{\partial x}{\partial Z_S}\Delta Z_S + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Delta\varphi \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial \omega}\Delta\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa}\Delta\kappa + \frac{\partial x}{\partial f}\Delta f + \frac{\partial x}{\partial x_0}\Delta x_0 \\ v_y &= (y) - y + \frac{\partial y}{\partial X_S}\Delta X_S + \frac{\partial y}{\partial Y_S}\Delta Y_S + \frac{\partial y}{\partial Z_S}\Delta Z_S + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Delta\varphi \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial \omega}\Delta\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa}\Delta\kappa + \frac{\partial y}{\partial f}\Delta f + \frac{\partial y}{\partial y_0}\Delta y_0 \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}31)$$

式中（x），（y）是用各待定值的近似值代入式（2-30）求出的。

若将地面点的坐标视为观测值引入改正数V_X，V_Y，V_Z后，共线方程式将有更一般的形式：

$$\left.\begin{aligned} v_x - \frac{\partial x}{\partial X}V_X - \frac{\partial x}{\partial Y}V_Y - \frac{\partial x}{\partial Z}V_Z &= (x) - x + \frac{\partial x}{\partial X_S}\Delta X_S + \frac{\partial x}{\partial Y_S}\Delta Y_S + \frac{\partial x}{\partial Z_S}\Delta Z_S \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega}\Delta\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa}\Delta\kappa + \frac{\partial x}{\partial f}\Delta f + \frac{\partial x}{\partial x_0}\Delta x_0 \\ v_y - \frac{\partial y}{\partial X}V_X - \frac{\partial y}{\partial Y}V_Y - \frac{\partial y}{\partial Z}V_Z &= (y) - y + \frac{\partial y}{\partial X_S}\Delta X_S + \frac{\partial y}{\partial Y_S}\Delta Y_S + \frac{\partial y}{\partial Z_S}\Delta Z_S \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega}\Delta\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa}\Delta\kappa + \frac{\partial y}{\partial f}\Delta f + \frac{\partial y}{\partial y_0}\Delta y_0 \end{aligned}\right\}$$

(2-31a)

必须注意，当引入地面点的V_X，V_Y和V_Z后，要对地面点坐标引入相应的权值，以反映控制点的精度特性。像点观测值一般视为等权，且$P=1$。

当利用若干点时，可将（2-31）和（2-31a）写成矩阵形式为：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{I} \tag{2-32}$$

和

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{P} \tag{2-32a}$$

前者为间接观测平差，后者为带有未知数的条件观测平差。

其中：

$$\boldsymbol{X}=[\Delta X_S,\ \Delta Y_S,\ \Delta Z_S,\ \Delta\varphi,\ \Delta\omega,\ \Delta\kappa,\ \Delta f,\ \Delta x_0,\ \Delta y_0]$$

其它符号对每一个像点为：

$$V_i=[v_x,\ v_y]^T$$

或

$$V_i=[v_x\quad v_y\quad V_X\quad V_Y\quad V_Z]^T,$$

$$L_i=[l_x\quad l_y]^T=[x-(x),\ y-(y)]^T,$$

$$\boldsymbol{P}_i=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}\text{或}\boldsymbol{P}_i=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & P_X & & \\ & & & P_Y & \\ & & & & P_Z\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29}\end{bmatrix}$$

为了求出式（2-31）、(2-31a)中各偏导数，即误差方程式中各系数的值，在式(2-30)中引入下列符号：

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}&=a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)\\ \overline{Y}&=a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)\\ \overline{Z}&=a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)\end{aligned}\right\}$$

或

$$\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X-X_S\\ Y-Y_S\\ Z-Z_S\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}^{-1}\begin{bmatrix}X-X_S\\ Y-Y_S\\ Z-Z_S\end{bmatrix} \tag{2-33}$$

顾及式（2-33），将式（2-30）可以写成

$$\left.\begin{aligned}x-x_0&=-f\frac{\overline{X}}{\overline{Z}}\\ y-y_0&=-f\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\end{aligned}\right\} \tag{2-34}$$

误差方程式中各偏导数为：

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\partial x}{\partial X_S} = -\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{\bar{Z}}[a_1 f + a_3 (x - x_0)] \\
a_{12} &= \frac{\partial x}{\partial Y_S} = -\frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{1}{\bar{Z}}[b_1 f + b_3 (x - x_0)] \\
a_{13} &= \frac{\partial x}{\partial Z_S} = -\frac{\partial x}{\partial Z} = \frac{1}{\bar{Z}}[c_1 f + c_3 (x - x_0)] \\
a_{21} &= \frac{\partial y}{\partial X_S} = -\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{1}{\bar{Z}}[a_2 f + a_3 (y - y_0)] \\
a_{22} &= \frac{\partial y}{\partial Y_S} = -\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{1}{\bar{Z}}[b_2 f + b_3 (y - y_0)] \\
a_{23} &= \frac{\partial y}{\partial Z_S} = -\frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{1}{\bar{Z}}[c_2 f + c_3 (y - y_0)] \\
a_{14} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{-f}{\bar{Z}^2}\left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi}\bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varphi}\bar{X}\right) \\
&= (y - y_0)\sin\omega - \left\{\frac{(x - x_0)}{f}[(x - x_0)\cos\kappa - \right. \\
&\quad \left. (y - y_0)\sin\kappa] + f\cos\kappa\right\}\cos\omega \\
a_{15} &= \frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{-f}{\bar{Z}^2}\left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \omega}\bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \omega}\bar{X}\right) \\
&= -f\sin\kappa - \frac{x - x_0}{f}\{(x - x_0)\sin\kappa + (y - y_0)\cos\kappa\} \\
a_{16} &= \frac{\partial x}{\partial \kappa} = -\frac{f}{\bar{Z}^2}\left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \kappa}\bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa}\bar{X}\right) = (y - y_0) \\
a_{24} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{-f}{\bar{Z}^2}\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \varphi}\bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varphi}\bar{Y}\right) \\
&= -(x - x_0)\sin\omega - \left\{\frac{(y - y_0)}{f}[(x - x_0)\cos\kappa \right. \\
&\quad \left. -(y - y_0)\sin\kappa] - f\sin\kappa\right\}\cos\omega \\
a_{25} &= \frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{-f}{\bar{Z}^2}\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \omega}\bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \omega}\bar{Y}\right) \\
&= -f\cos\kappa - \frac{y - y_0}{f}[(x - x_0)\sin\kappa + (y - y_0)\cos\kappa] \\
a_{26} &= \frac{\partial y}{\partial \kappa} = -\frac{f}{\bar{Z}^2}\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \kappa}\bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa}\bar{Y}\right) = -(x - x_0)
\end{aligned}
\right\} \quad (2\text{-}35)
$$

其中，前六个系数与线元素有关，后六个系数与角元素有关。

下面以a_{14}为例，说明其推演过程：

因为

$$\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^{-1} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_\kappa^{-1} \boldsymbol{R}_\omega^{-1} \boldsymbol{R}_\varphi^{-1} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}}{\partial \varphi} = \boldsymbol{R}_\kappa^{-1} \boldsymbol{R}_\omega^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{R}_\varphi^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{R}_\varphi \frac{\partial \boldsymbol{R}_\varphi^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_\varphi \frac{\partial \boldsymbol{R}_\varphi^{-1}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 (X - X_S) + a_1 (Z - Z_S) \\ -c_2 (X - X_S) + a_2 (Z - Z_S) \\ -c_3 (X - X_S) + a_3 (Z - Z_S) \end{bmatrix}$$

$$a_{14} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{-f}{\overline{Z}^2} \left(\frac{\partial \overline{X}}{\partial \varphi} \overline{Z} - \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \varphi} \overline{X} \right)$$

$$= \frac{-f}{\overline{Z}} \left\{ -c_1 (X - X_S) + a_1 (Z - Z_S) - \frac{\overline{X}}{\overline{Z}} [-c_3 (X - X_S) + a_3 (Z - Z_S)] \right\}$$

再顾及关系式（2-33），经进一步改化可得：

$$a_{14} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -f \left[b_2 - b_3 \frac{\overline{Y}}{\overline{Z}} + b_2 \left(\frac{\overline{X}}{\overline{Z}} \right)^2 - b_1 \frac{\overline{X}}{\overline{Z}} \frac{\overline{Y}}{\overline{Z}} \right]$$

$$= -f \left[\cos\omega\cos\kappa + \sin\omega \frac{\overline{Y}}{\overline{Z}} + \cos\omega\cos\kappa \left(\frac{\overline{X}}{\overline{Z}} \right)^2 - \cos\omega\sin\kappa \frac{\overline{X}}{\overline{Z}} \frac{\overline{Y}}{\overline{Z}} \right]$$

$$= (y - y_0)\sin\omega - \left\{ \frac{(x - x_0)}{f} [(x - x_0)\cos\kappa - (y - y_0)\sin\kappa] + f\cos\kappa \right\} \cos\omega$$

其它系数均可用类似方法导出。

另外还有与内方位元素改正值有关的系数：

$$\left.\begin{aligned} a_{17}&=\frac{\partial x}{\partial f}=\frac{x-x_0}{f},\quad a_{27}=\frac{\partial y}{\partial f}=\frac{y-y_0}{f}\\ a_{18}&=\frac{\partial x}{\partial x_0}=1,\qquad a_{28}=\frac{\partial y}{\partial x_0}=0\\ a_{19}&=\frac{\partial x}{\partial y_0}=0,\qquad a_{29}=\frac{\partial y}{\partial y_0}=1 \end{aligned}\right\} \tag{2-35a}$$

式（2-35），(2-35a)是适合于任意角度的严格公式。将式（2-35），(2-35a）代入式(2-32)中，即得到利用共线条件方程同时解求内、外方位元素的误差方程式。

若利用共线条件方程仅仅是为解求摄影光束的外方位元素时，则认为内方位元素是已知的，此时

$$\Delta x_0=\Delta y_0=\Delta f=0$$

这时的误差方程式可以简化为：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=a_{11}\Delta X_S+a_{12}\Delta Y_S+a_{13}\Delta Z_S+a_{14}\Delta\varphi+a_{15}\Delta\omega+a_{16}\Delta\kappa-l_x\\ v_y&=a_{21}\Delta X_S+a_{22}\Delta Y_S+a_{23}\Delta Z_S+a_{24}\Delta\varphi+a_{25}\Delta\omega+a_{26}\Delta\kappa-l_y \end{aligned}\right\} \tag{2-36}$$

2.竖直摄影情况下的公式

在竖直摄影情况下，当各角元素都是小角时，可以近似地用$\varphi=\omega=\kappa=0$代入式(2-35)中，式（2-36）中系数值为：

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}=-\frac{f}{H},\quad a_{12}=0,\quad a_{13}=-\frac{x}{H}\\ &a_{21}=0,\quad a_{22}=-\frac{f}{H},\quad a_{23}=-\frac{y}{H}\\ &a_{14}=-f\left(1+\frac{x^2}{f^2}\right),\quad a_{15}=-\frac{xy}{f},\quad a_{16}=y\\ &a_{24}=-\frac{xy}{f},\quad a_{25}=-f\left(1+\frac{y^2}{f^2}\right),\quad a_{26}=-x \end{aligned}\right\} \tag{2-37}$$

其中H为平均相对航高，式（2-36）可简化为

$$\left.\begin{aligned} v_x&=-\frac{f}{H}\Delta X_S-\frac{x}{H}\Delta Z_S-f\left(1+\frac{x^2}{f^2}\right)\Delta\varphi-\frac{xy}{f}\Delta\omega+y\Delta\kappa-[x-(x)]\\ v_y&=-\frac{f}{H}\Delta Y_S-\frac{y}{H}\Delta Z_S-\frac{xy}{f}\Delta\varphi-f\left(1+\frac{y^2}{f^2}\right)\Delta\omega-x\Delta\kappa-[y-(y)] \end{aligned}\right\} \tag{2-38}$$

式（2-38）是在φ—ω—κ转角系统下的误差方程式。若采用反对称矩阵中三个独立参数a，b，c作为未知数时，式（2-38）的表达形式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=-\frac{f}{H}\Delta X_S-\frac{x}{H}\Delta Z_S-f\left(1+\frac{x^2}{f^2}\right)db-\frac{xy}{f}da+ydc-[x-(x)]\\ v_y&=-\frac{f}{H}\Delta Y_S-\frac{y}{H}\Delta Z_S-\frac{xy}{f}db-f\left(1+\frac{y^2}{f^2}\right)da-xdc-[y-(y)] \end{aligned}\right\} \tag{2-39}$$

当竖直摄影时，有时摄影机的倾角φ及ω保持为小值，而κ角特大，此时计算式(2-36)

中各系数值时，可以用$\varphi=\omega=0$代入，而保留原有κ的函数值，则

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}&=-\frac{f}{H}\cos\kappa & a_{21}&=-\frac{f}{H}\sin\kappa\\
a_{12}&=-\frac{f}{H}\sin\kappa & a_{22}&=-\frac{f}{H}\cos\kappa\\
a_{13}&=-\frac{x}{H} & a_{23}&=-\frac{y}{H}\\
a_{14}&=-\left(f+\frac{x^2}{f}\right)\cos\kappa+\frac{xy}{f}\sin\kappa, & a_{24}&=-\frac{xy}{f}\cos\kappa+\left(f+\frac{y^2}{f}\right)\sin\kappa\\
a_{15}&=-\frac{xy}{f}\cos\kappa-\left(f+\frac{x^2}{f}\right)\sin\kappa, & a_{25}&=-\left(f+\frac{y^2}{f}\right)\cos\kappa-\frac{xy}{f}\sin\kappa\\
a_{16}&=y, & a_{26}&=-x
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}40)$$

使用中应视具体情况选择适宜的公式。

*（二）使用罗德里格斯矩阵时的严密公式

由于该方法表达旋转矩阵在运算上的方便，这里将讨论使用罗德里格斯矩阵时，共线方程的线性化表达形式。显然，与线元素有关的各系数〔见式（2-35）〕保持不变，所要求的只是与Δb，Δa，Δc有关的六个偏导数的值。

1.反对称矩阵$\boldsymbol{S}$和罗德里格斯矩阵$\boldsymbol{R}$的性质

（1）$\boldsymbol{S}^T=-\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^{-1}$，$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -c & -b\\ c & 0 & -a\\ +b & a & 0\end{bmatrix}$

（2）$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^T=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})$

（3）$\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{R}^{-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})$

（4）$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R}^T)$

性质1°～3°是显然的，现证明性质4°：

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R}^T)=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})]$$

$$=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})]=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}$$

2.正定矩阵逆矩阵的微分公式

在以下推导中，除了利用矩阵乘的微分公式：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{AB})}{\partial x}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}$$

外，还用到正定矩阵逆矩阵的微分公式：

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}^{-1}}{\partial x}=-\boldsymbol{A}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$$

3.与Δb，Δa，Δc有关的六个偏导数的计算

$$\left.\begin{aligned}
a_{14}&=\frac{\partial x}{\partial b}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial \overline{X}}{\partial b}f-\frac{\partial \overline{Z}}{\partial b}x\right)\\
a_{15}&=\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial \overline{X}}{\partial a}f-\frac{\partial \overline{Z}}{\partial a}x\right)\\
a_{16}&=\frac{\partial x}{\partial c}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial \overline{X}}{\partial c}f-\frac{\partial \overline{Z}}{\partial c}x\right)\\
a_{24}&=\frac{\partial y}{\partial b}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial \overline{Y}}{\partial b}f-\frac{\partial \overline{Z}}{\partial b}y\right)\\
a_{25}&=\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial \overline{Y}}{\partial a}f-\frac{\partial \overline{Z}}{\partial a}y\right)\\
a_{26}&=\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{1}{\overline{Z}}\left(-\frac{\partial \overline{Y}}{\partial c}f-\frac{\partial \overline{Z}}{\partial c}y\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}35b)$$

同样要先计算

$$\frac{\partial\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}}{\partial b},\quad \frac{\partial\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}}{\partial a},\quad \frac{\partial\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}}{\partial c}$$

此时有：$$\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}^{-1}\begin{bmatrix}X-X_S\\ Y-Y_S\\ Z-Z_S\end{bmatrix}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\begin{bmatrix}X-X_S\\ Y-Y_S\\ Z-Z_S\end{bmatrix}$$

故得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}}{\partial b}&=\left[-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial b}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial b}\right)\right]\begin{bmatrix}X-X_S\\ Y-Y_S\\ Z-Z_S\end{bmatrix}\\
&=\left[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial b}\right)\boldsymbol{R}^{-1}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial b}\right)\right]\begin{bmatrix}X-X_S\\ Y-Y_S\\ Z-Z_S\end{bmatrix}\\
&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial b}\right)\begin{bmatrix}X-X_S+\overline{X}\\ Y-Y_S+\overline{Y}\\ Z-Z_S+\overline{Z}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial b}\right)\begin{bmatrix}\widetilde{X}\\ \widetilde{Y}\\ \widetilde{Z}\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{4}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R}^{T})\begin{pmatrix}0&0&+1\\ 0&0&0\\ -1&0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{X}\\ \widetilde{Y}\\ \widetilde{Z}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -c_1\widetilde{X}+(1+a_1)\widetilde{Z} \\ -c_2\widetilde{X}+a_2\widetilde{Z} \\ -(1+c_3)\widetilde{X}+a_3\widetilde{Z} \end{bmatrix}$$

还可以进一步化简表示成a，b，c和$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$的函数，有：

$$\frac{\partial\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}}{\partial b}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \frac{a}{2}\overline{Y}+\overline{Z} \\ -\frac{a}{2}\overline{X}-\frac{c}{2}\overline{Z} \\ -\overline{X}+\frac{c}{2}\overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}}{\partial a}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -\frac{b}{2}\overline{Y}+\frac{c}{2}\overline{Z} \\ \frac{b}{2}\overline{X}+\overline{Z} \\ -\frac{c}{2}\overline{X}-\overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}}{\partial c}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \overline{Y}-\frac{a}{2}\overline{Z} \\ -\overline{X}+\frac{b}{2}\overline{Z} \\ \frac{a}{2}\overline{X}-\frac{b}{2}\overline{Y} \end{bmatrix}$$

接着将这些结果代入（2-35b）中，得出：

$$\left.\begin{aligned}
a_{14}&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{a}{2}y+\frac{c}{2}\frac{xy}{f}-f-\frac{x^2}{f}\right)\\
a_{15}&=\frac{1}{\Delta}\left(-\frac{b}{2}y-\frac{c}{2}f-\frac{c}{2}\frac{x^2}{f}-\frac{xy}{f}\right)\\
a_{16}&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{a}{2}f+\frac{a}{2}\frac{x^2}{f}-\frac{b}{2}\frac{xy}{f}+y\right)\\
a_{24}&=\frac{1}{\Delta}\left(-\frac{a}{2}x+\frac{c}{2}f+\frac{c}{2}\frac{y^2}{f}-\frac{xy}{f}\right)\\
a_{25}&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{b}{2}x-\frac{c}{2}\frac{xy}{f}-f-\frac{y^2}{f}\right)\\
a_{26}&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{a}{2}\frac{xy}{f}-\frac{b}{2}f-\frac{b}{2}\frac{y^2}{f}-x\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}35c)$$

详细推导见参考文献［25］。

当a，b，c为小值时，近似地取$a=b=c=0$，则由（2-35c）式可得出与（2-39）式完

全一致的结果。

用式（2-35c）和罗德里格斯矩阵比用角元素和三角函数表示的旋转矩阵要节省计算时间。

三、单像空间后方交会

前一节我们叙述了共线条件方程，由式（2-36）可知，已知若干像点的像空间坐标和相应的地面点的地面测量坐标（或摄影测量坐标），就可以求得相应摄影光束的外方位元素X_S，Y_S，Z_S，φ，ω，κ，这是一个单像空间后方交会的问题。解决单像空间后方交会的问题，并不单单只有共线条件方程的办法，还有角锥体法和直接线性变换法，下面对这些方法逐个地进行讨论。

（一）共线条件方程解法

共线条件方程的推导过程，前面已经作了详细的叙述，这里不再重复。这里着重指出的是式（2-35），（2-37），（2-40）中系数a_{ij}均取自泰勒公式的一阶偏导数项，而未知数的近似值相当粗糙，因此计算需要通过逐次趋近方法。每次趋近时需重新计算新的常数项，趋近次数与要求的计算精度有关，通常对φ，ω，κ的改正数$\Delta\varphi$，$\Delta\omega$，$\Delta\kappa$给予限值，这个限值定为0.1′。当三个改正数均小于0.1′时，趋近结束，按这里规定的限值要求，趋近3～4次即能满足要求。

其次，在计算$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}$求单位权方差估值时，不应用式（2-36）线性化误差方程式，而应由各未知数平差值代入严密公式（2-30）求出（x），（y），进而求出l_x，l_y，于是

$$v_x = -l_x,$$

$$v_y = -l_y。$$

第三，必须给出外方位元素初始值。对于竖直摄影像片的单像空间后方交会，控制点大体对称分布的情况，可如下设定初始值：

$$Z_S^0 = f \cdot m + \frac{1}{n}\Sigma Z_{控}，（m为摄影比例尺分母）$$

$$X_S^0 = \frac{1}{n}\Sigma X_{控},$$

$$Y_S^0 = \frac{1}{n}\Sigma Y_{控},$$

$$\varphi^0 = \omega^0 = 0,$$

κ^0由航迹图上找出，或由控制点坐标正反变换（§4.1）中求出。

对于大倾角或交向摄影，应先用非迭代法，如角锥体法或直接线性变换一类方法求出初值后，再用最小二乘法迭代解算。

利用共线方程进行单像空间后方交会的计算机程序框图可简要示于图2-3-2。

*（二）角锥体法

角锥体法是应用摄影光线束角锥体中在像方空间和物方空间相应光线间顶角相等的原理，来确定摄影光束的外方位元素。该方法特点是可将六个外方位元素的待定值分成两个步骤来解求：首先根据地面控制点的坐标及其像片上相应点的坐标确定摄站点的空间坐标

X_S，Y_S，Z_S；然后利用前一步骤的结果再确定摄影光束的角元素。这种方法的计算公式严密，计算量较少。对竖直摄影和倾斜摄影的情况均适用。

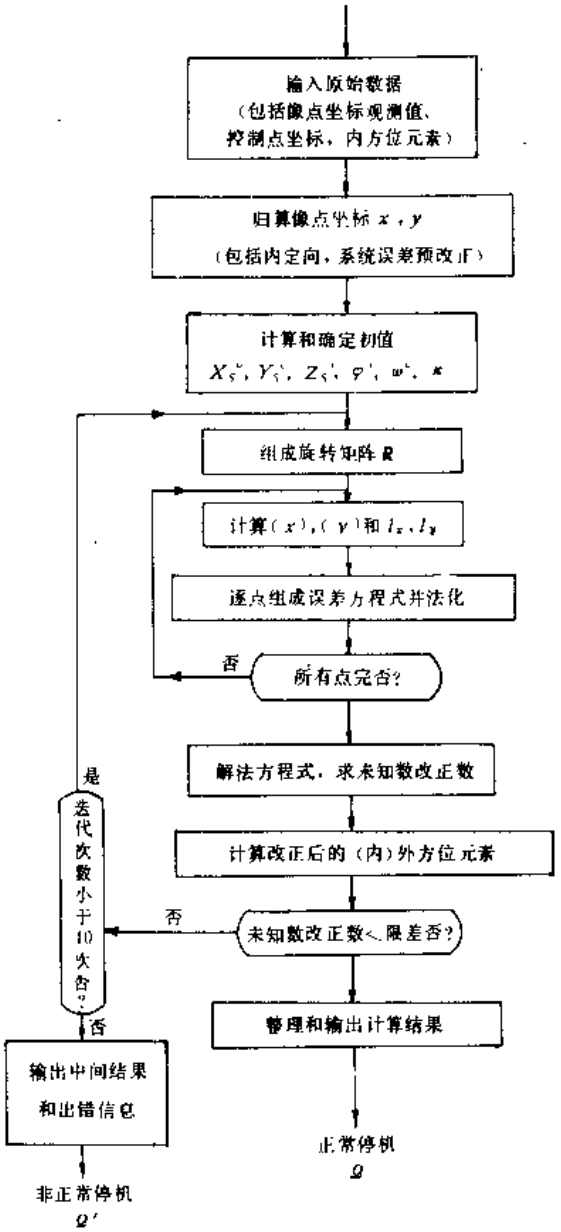


图 2-3-2

如图2-3-3所示，由摄站点S（X_S，Y_S，Z_S）摄取像片P，其上有地面点A（X_A，Y_A，Z_A），B（X_B，Y_B，Z_B），C（X_C，Y_C，Z_C）等的构像a，b，c，相应的像点坐标分别为（x_a，y_a），（x_b，y_b），（x_c，y_c）。

由解析几何可知，各光线间所构成角锥体内顶角的余弦为：

$$\left.\begin{aligned}\cos aSb&=\frac{x_a x_b+y_a y_b+f^2}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+f^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+f^2}}\\ \cos aSc&=\frac{x_a x_c+y_a y_c+f^2}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+f^2}\cdot\sqrt{x_c^2+y_c^2+f^2}}\\ \cos bSc&=\frac{x_b x_c+y_b y_c+f^2}{\sqrt{x_b^2+y_b^2+f^2}\cdot\sqrt{x_c^2+y_c^2+f^2}}\end{aligned}\right\}\quad(2\text{-}41)$$

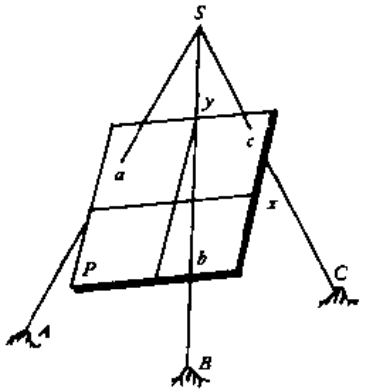


图 2-3-3

$$\left.\begin{aligned}\cos ASB&=\frac{(X_A-X_S)(X_B-X_S)+(Y_A-Y_S)(Y_B-Y_S)+(Z_A-Z_S)(Z_B-Z_S)}{\sqrt{(X_A-X_S)^2+(Y_A-Y_S)^2+(Z_A-Z_S)^2}\cdot\sqrt{(X_B-X_S)^2+(Y_B-Y_S)^2+(Z_B-Z_S)^2}}\\ \cos ASC&=\frac{(X_A-X_S)(X_C-X_S)+(Y_A-Y_S)(Y_C-Y_S)+(Z_A-Z_S)(Z_C-Z_S)}{\sqrt{(X_A-X_S)^2+(Y_A-Y_S)^2+(Z_A-Z_S)^2}\cdot\sqrt{(X_C-X_S)^2+(Y_C-Y_S)^2+(Z_C-Z_S)^2}}\\ \cos BSC&=\frac{(X_B-X_S)(X_C-X_S)+(Y_B-Y_S)(Y_C-Y_S)+(Z_B-Z_S)(Z_C-Z_S)}{\sqrt{(X_B-X_S)^2+(Y_B-Y_S)^2+(Z_B-Z_S)^2}\cdot\sqrt{(X_C-X_S)^2+(Y_C-Y_S)^2+(Z_C-Z_S)^2}}\end{aligned}\right\}$$

(2·42)

因为SA与Sa、SB与Sb、SC与Sc共线，所以有以下关系式：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \cos ASB - \cos aSb = 0\\ \varphi_2 &= \cos ASC - \cos aSc = 0\\ \varphi_3 &= \cos BSC - \cos bSc = 0\end{aligned}\right\} \tag{2-43}$$

若地面点坐标已知，摄站点S的近似坐标用X_S^0，Y_S^0，Z_S^0表示，其相应的改正数为ΔX_S，ΔY_S，ΔZ_S。这时可将式（2-43）表示成未知参数的线性表达式：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_1^0(X_S^0,\ Y_S^0,\ Z_S^0) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial X_S}\Delta X_S + \frac{\partial\varphi_1}{\partial Y_S}\Delta Y_S + \frac{\partial\varphi_1}{\partial Z_S}\Delta Z_S\\ \varphi_2 &= \varphi_2^0(X_S^0,\ Y_S^0,\ Z_S^0) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial X_S}\Delta X_S + \frac{\partial\varphi_2}{\partial Y_S}\Delta Y_S + \frac{\partial\varphi_2}{\partial Z_S}\Delta Z_S\\ \varphi_3 &= \varphi_3^0(X_S^0,\ Y_S^0,\ Z_S^0) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial X_S}\Delta X_S + \frac{\partial\varphi_3}{\partial Y_S}\Delta Y_S + \frac{\partial\varphi_3}{\partial Z_S}\Delta Z_S\end{aligned}\right\} \tag{2-44}$$

或写成

$$\left.\begin{aligned}v_1 &= a_1\Delta X_S + b_1\Delta Y_S + c_1\Delta Z_S - l_1\\ v_2 &= a_2\Delta X_S + b_2\Delta Y_S + c_2\Delta Z_S - l_2\\ v_3 &= a_3\Delta X_S + b_3\Delta Y_S + c_3\Delta Z_S - l_3\end{aligned}\right\} \tag{2-45}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial X_S} = -\frac{(X_A - X_S) + (X_B - X_S)}{\overline{AS}\cdot\overline{BS}} + \cos ASB\left(\frac{X_A - X_S}{\overline{AS}^2} + \frac{X_B - X_S}{\overline{BS}^2}\right)\\ b_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial Y_S} = -\frac{(Y_A - Y_S) + (Y_B - Y_S)}{\overline{AS}\cdot\overline{BS}} + \cos ASB\left(\frac{Y_A - Y_S}{\overline{AS}^2} + \frac{Y_B - Y_S}{\overline{BS}^2}\right)\\ c_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial Z_S} = -\frac{(Z_A - Z_S) + (Z_B - Z_S)}{\overline{AS}\cdot\overline{BS}} + \cos ASB\left(\frac{Z_A - Z_S}{\overline{AS}^2} + \frac{Z_B - Z_S}{\overline{BS}^2}\right)\\ a_2 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial X_S} = -\frac{(X_A - X_S) + (X_C - X_S)}{\overline{AS}\cdot\overline{CS}} + \cos ASC\left(\frac{X_A - X_S}{\overline{AS}^2} + \frac{X_C - X_S}{\overline{CS}^2}\right)\\ b_2 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial Y_S} = -\frac{(Y_A - Y_S) + (Y_C - Y_S)}{\overline{AS}\cdot\overline{CS}} + \cos ASC\left(\frac{Y_A - Y_S}{\overline{AS}^2} + \frac{Y_C - Y_S}{\overline{CS}^2}\right)\\ c_2 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial Z_S} = -\frac{(Z_A - Z_S) + (Z_C - Z_S)}{\overline{AS}\cdot\overline{CS}} + \cos ASC\left(\frac{Z_A - Z_S}{\overline{AS}^2} + \frac{Z_C - Z_S}{\overline{CS}^2}\right)\\ a_3 &= -\frac{(X_B - X_S) + (X_C - X_S)}{\overline{SB}\cdot\overline{SC}} + \cos BSC\left(\frac{X_B - X_S}{\overline{SB}^2} + \frac{X_C - X_S}{\overline{SC}^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2-46}$$

……

$$\left.\begin{aligned}l_1 &= -\varphi_1^0(X_S^0,\ Y_S^0,\ Z_S^0)\\ l_2 &= -\varphi_2^0(X_S^0,\ Y_S^0,\ Z_S^0)\\ l_3 &= -\varphi_3^0(X_S^0,\ Y_S^0,\ Z_S^0)\end{aligned}\right\} \tag{2-47}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{(X_A - X_S)^2 + (Y_A - Y_S)^2 + (Z_A - Z_S)^2}$$

$$\overline{BS} = \sqrt{(X_B - X_S)^2 + (Y_B - Y_S)^2 + (Z_B - Z_S)^2}$$

$$\overline{CS} = \sqrt{(X_C - X_S)^2 + (Y_C - Y_S)^2 + (Z_C - Z_S)^2}$$

要解求式（2-45）中三个未知数至少三个方程式，亦即不少于三个控制点。四个控制点可以组成六个方程式，五个控制点可以组成十个方程式等。当有 n 个点时可以构成

$$\frac{n(n-1)}{2} \tag{2-48}$$

个方程式，但其中独立的只有$2n-3$个。

按最小二乘法原理解算式（2-45），求得摄站点 S 的空间坐标的第一次近似值：

$$\left.\begin{aligned} X'_S &= X^0_S + \Delta X'_S \\ Y'_S &= Y^0_S + \Delta Y'_S \\ Z'_S &= Z^0_S + \Delta Z'_S \end{aligned}\right\} \tag{2-49}$$

然后用新值X'_S，Y'_S，Z'_S代入式（2-46）、（2-47）中，计算各系数和常数项的新值，重新求解，得到新的改正数$\Delta X''_S$，$\Delta Y''_S$，$\Delta Z''_S$和S的空间坐标的第二次近似值。如此逐渐趋近，直到所得到的改正数ΔX_S，ΔY_S，ΔZ_S满足要求为止。这时我们求得摄影光束外方位的三个线元素，根据这三个线元素，按同样的原理可以解决空间前方交会的问题，关于这个问题这里不再详述。下面来讨论如何用上面求得的三个线元素来计算摄影光束外方位的三个角元素的问题。

如图2-3-3所示，像方矢量$\vec{Sa}$与物方矢量$\vec{SA}$共线，它们之间存在如下关系：

$$M \cdot \vec{Sa} = \vec{SA}$$

M为像方与物方两个空间坐标轴系之间的旋转矩阵$\boldsymbol{R}$与比例因子N的乘积，即$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{R}$。

根据像点 a 和地面点 A 的坐标关系：

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \frac{Sa}{SA} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_a}{S_a} \\ \frac{y_a}{S_a} \\ \frac{z_a}{S_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X_A - X_S}{SA} \\ \frac{Y_A - Y_S}{SA} \\ \frac{Z_A - Z_S}{SA} \end{bmatrix}$$

或写成

$$\begin{bmatrix} \overline{x_a} \\ \overline{y_a} \\ \overline{z_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X_A - X_S} \\ \overline{Y_A - Y_S} \\ \overline{Z_A - Z_S} \end{bmatrix} \tag{2-50}$$

其中

$$\overline{x_a} = \frac{x_a}{Sa}, \qquad \overline{y_a} = \frac{y_a}{Sa}, \qquad \overline{z_a} = \frac{z_a}{Sa}$$

$$\overline{X_A - X_S} = \frac{X_A - X_S}{SA}, \quad \overline{Y_A - Y_S} = \frac{Y_A - Y_S}{SA}, \quad \overline{Z_A - Z_S} = \frac{Z_A - Z_S}{SA}$$

如果把a_i，b_i，c_i当作独立的未知数来解求，至少需要三个控制点，列出三组像式（2-50）形式的方程式。若还有其它多余的控制点，即可进行平差计算。相应于解求a_1，b_1，c_1的误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1(\overline{X_A - X_S}) + b_1(\overline{Y_A - Y_S}) + c_1(\overline{Z_A - Z_S}) - \bar{x}_a \\ v_2 &= a_1(\overline{X_B - X_S}) + b_1(\overline{Y_B - Y_S}) + c_1(\overline{Z_B - Z_S}) - \bar{x}_b \\ v_3 &= a_1(\overline{X_C - X_S}) + b_1(\overline{Y_C - Y_S}) + c_1(\overline{Z_C - Z_S}) - \bar{x}_c \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{2-51}$$

类似地，可把a_2，b_2，c_2和a_3，b_3，c_3作为独立未知参数求解。如此求得九个方向余弦，然后由下式求得三个角元素：

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{a_3}{c_3}\right),\quad \omega = \sin^{-1}(-b_3),\quad \kappa = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \tag{2-52}$$

更严格的处理方法是在式（2-51）基础上，引入九个方向余弦间存在的六个关系式（见§2.2），进行未知数带有条件的间接观测平差。此时条件式需事先线性化。

上述角锥体法不需要提供外方位角元素的初始值，但必须提供摄站坐标的初始值。

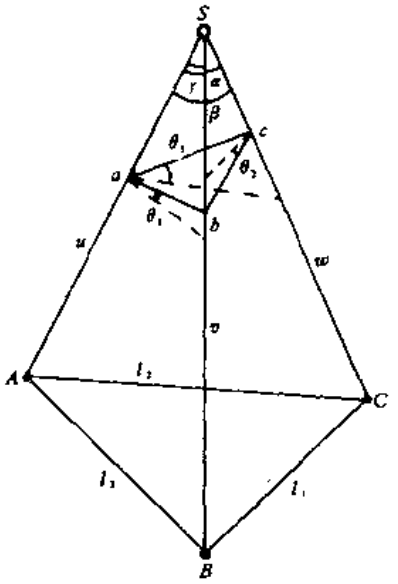


图 2-3-4

下面介绍一种无需任何初始值的直接解法，它仍然基于角锥体法。

设地面点A，B，C（图2-3-4）在地面坐标系中的坐标分别为（X_1，Y_1，Z_1），（X_2，Y_2，Z_2）和（X_3，Y_3，Z_3），其相应的像点a，b，c的像片坐标为（x_1，y_1），（x_2，y_2）和（x_3，y_3）。并设f为摄影机主距。各边长为$AB=l_3$，$BC=l_1$，$CA=l_2$，$SA=u$，$SB=v$，$SC=w$。由图2-3-4知：

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 &= v^2 + w^2 - 2vw\cos\alpha \\ l_2^2 &= w^2 + u^2 - 2wu\cos\beta \\ l_3^2 &= u^2 + v^2 - 2uv\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{2-53}$$

式中 l_1、l_2，l_3可由三个控制点的地面坐标求出，而$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$可由量测的像点坐标求出，以$\cos\alpha$为例，由余弦定理并作变换有：

$$\cos\alpha = \frac{x_2x_3 + y_2y_3 + f^2}{\sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + f^2)(x_3^2 + y_3^2 + f^2)}} \tag{2-54}$$

同理可求出$\cos\beta$和$\cos\gamma$。

因此，可由式（2-53）中求出长度u，v，w。

下面介绍一种解法。若以

$$\left.\begin{aligned} v &= m_1 u \\ w &= m_2 u \end{aligned}\right\} \tag{2-55}$$

代入式（2-53），并加以整理，则可将u和m_2表示成m_1的函数：

$$\left.\begin{aligned} u &= l_3(1-2m_1\cos\gamma+m_1^2)^{-\frac{1}{2}} \\ m_2 &= \frac{(l_1^2+l_3^2-l_2^2)+2(l_2^2-l_1^2)m_1\cos\gamma+(l_1^2-l_2^2-l_3^2)m_1^2}{2l_3^2(\cos\beta-m_1\cos\alpha)} \end{aligned}\right\} \tag{2-56}$$

再将它们代入（2-53）式，便得到m_1的四次多项式：

$$a_0+a_1m_1+a_2m_1^2+a_3m_1^3+a_4m_1^4=0 \tag{2-57}$$

式中：$a_4=(l_2^2+l_3^2-l_1^2)^2-4l_2^2l_3^2\cos^2\alpha$

$a_3=K-2a_4\cos\gamma$

$K=2(l_2^2+l_3^2-l_1^2)(l_1^2+l_3^2-l_2^2)\cos\gamma+4l_3^2(l_1^2+l_2^2-l_3^2)\cos\alpha\cos\beta$

$a_2=a_4+a_0-2K\cos\gamma+4l_3^4(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1)$

$a_1=K-2a_0\cos\gamma$

$a_0=(l_1^2+l_3^2-l_2^2)^2-4l_1^2l_3^2\cos^2\beta$

可用一般的方法求出式（2-57）中高次方程的四个根。由m_1之每个值代入（2-56）、（2-55）式求出u，v，w，此时须利用多余点来选择合题意的一组正确解。

接着要根据u，v，w之值计算摄站坐标X_S，Y_S和Z_S。方法如下：

由图2-3-4，对于X_S，Y_S，Z_S坐标有：

$$\left.\begin{aligned} u^2&=(X_1-X_S)^2+(Y_1-Y_S)^2+(Z_1-Z_S)^2 \\ v^2&=(X_2-X_S)^2+(Y_2-Y_S)^2+(Z_2-Z_S)^2 \\ w^2&=(X_3-X_S)^2+(Y_3-Y_S)^2+(Z_3-Z_S)^2 \end{aligned}\right\} \tag{2-58}$$

这三个方程式可化为两个含X_S，Y_S，Z_S的线性方程式，即

$$\left.\begin{aligned} &2(X_1-X_2)X_S+2(Y_1-Y_2)Y_S+2(Z_1-Z_2)Z_S= \\ &\qquad u^2-v^2+X_1^2+Y_1^2+Z_1^2-X_2^2-Y_2^2-Z_2^2 \\ &2(X_1-X_3)X_S+2(Y_1-Y_3)Y_S+2(Z_1-Z_3)Z_S= \\ &\qquad w^2-u^2+X_1^2+Y_1^2+Z_1^2-X_3^2-Y_3^2-Z_3^2 \end{aligned}\right\} \tag{2-59}$$

为获得X_S，Y_S，Z_S的第三个线性方程式，可利用四面体$SABC$的体积关系：

$$V=\frac{uvw}{6}[1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}[\Delta_1(X_S-X_1)+\Delta_2(Y_S-Y_1)+\Delta_3(Z_S-Z_1)] \tag{2-60}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1&=Y_1(Z_2-Z_3)+Y_2(Z_3-Z_1)+Y_3(Z_1-Z_2) \\ \Delta_2&=Z_1(X_2-X_3)+Z_2(X_3-X_1)+Z_3(X_1-X_2) \\ \Delta_3&=X_1(Y_2-Y_3)+X_2(Y_3-Y_1)+X_3(Y_1-Y_2) \end{aligned}\right\} \tag{2-61}$$

式（2-60）还可化为：

$$\Delta_1X_S+\Delta_2Y_S+\Delta_3Z_S=uvw[1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma]^{\frac{1}{2}}+\Delta_1X_1+\Delta_2Y_1+\Delta_3Z_1 \tag{2-59a}$$

将式（2-59）和（2-59a）联立求解，便得到摄站坐标X_S，Y_S，Z_S的值。

这种方法适用于无法获得摄站初始值的大倾角摄影。

*（三）直接线性变换法

直接线性变换法既不需要在像片上有框标，也不需要有摄影机内外方位元素的起始近似值。这种方法特别适用于非量测摄影机所摄取像片的数据处理，可以直接从坐标仪坐标转换成物方空间（地面）坐标。

按下式把坐标仪坐标转换成像平面坐标（仿射变换）：

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 x + \bar{a}_3 y \\ \bar{y} &= \bar{a}_4 + \bar{a}_5 x + \bar{a}_6 y\end{aligned}\right\} \tag{2-62}$$

式中：$\bar{x}$，$\bar{y}$是像平面坐标；

x，y是立体坐标量测仪坐标。

利用共线条件方程可以从像平面坐标转换成物方空间（或地面）坐标：

$$\bar{x} + f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} = 0$$

$$\bar{y} + f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} = 0$$

再将式（2-62）代入上式后，得

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_1 + \bar{a}_2 x + \bar{a}_3 y + f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} &= 0 \\ \bar{a}_4 + \bar{a}_5 x + \bar{a}_6 y + f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{2-63}$$

从式（2-63）中分别消去x和y，得到：

$$(\bar{a}_1\bar{a}_6 - \bar{a}_4\bar{a}_3) + (\bar{a}_2\bar{a}_6 - \bar{a}_5\bar{a}_3)x + f\frac{(\bar{a}_1\bar{a}_6 - \bar{a}_3 a_2)(X-X_S)+(b_1\bar{a}_6 - b_2\bar{a}_3)(Y-Y_S)+(c_1\bar{a}_6 - c_2\bar{a}_5)(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} = 0 \tag{2-64}$$

$$(\bar{a}_1\bar{a}_5 - \bar{a}_4\bar{a}_2) + (\bar{a}_3\bar{a}_5 - \bar{a}_6\bar{a}_2)y + f\frac{(a_1\bar{a}_5 - a_2\bar{a}_2)(X-X_S)+(b_1\bar{a}_5 - b_2\bar{a}_2)(Y-Y_S)+(c_1\bar{a}_5 - c_2\bar{a}_2)(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} = 0 \tag{2-65}$$

经整理合并式（2-64）、（2-65）可以表示为：

$$d_1 + d_2 x + \frac{\bar{b}_1 X + \bar{b}_2 Y + \bar{b}_3 Z + b_4}{b_9 X + b_{10} Y + b_{11} Z + b_{12}} = 0$$

$$d_3 + d_4 y + \frac{b_5 X + b_6 Y + b_7 Z + b_8}{b_9 X + b_{10} Y + b_{11} Z + b_{12}} = 0$$

从以上两式中再消去d_1和d_3，则有：

$$d_2 x + \frac{\bar{b}'_1 X + \bar{b}'_2 Y + \bar{b}'_3 Z + b'_4}{b'_9 X + b'_{10} Y + b'_{11} Z + b'_{12}} = 0$$

$$d_4 y + \frac{b'_5 X + b'_6 Y + b'_7 Z + b'_8}{b'_9 X + b'_{10} Y + b'_{11} Z + b'_{12}} = 0$$

再从前两式中消去d_2和d_4，得到：

$$x+\frac{b_1^*X+b_2^*Y+b_3^*Z+b_4^*}{b_9'X+b_{10}'Y+b_{11}'Z+b_{12}'}=0$$

$$y+\frac{b_5^*X+b_6^*Y+b_7^*Z+b_8^*}{b_9'X+b_{10}'Y+b_{11}'Z+b_{12}'}=0$$

再消去b_{12}'，可得：

$$\left.\begin{aligned}x-\frac{L_1X+L_2Y+L_3Z+L_4}{L_9X+L_{10}Y+L_{11}Z+1}=0\\ y-\frac{L_5X+L_6Y+L_7Z+L_8}{L_9X+L_{10}Y+L_{11}Z+1}=0\end{aligned}\right\}\tag{2-66}$$

式(2-66)是直接线性变换的基本公式，其中含有11个未知数，至少需要六个地面控制点。这11个未知数是摄影光束内、外方位元素和像片线性系统误差的函数，在求得11个未知数以后，可以根据它们之间的关系反求出内、外方位元素x_0，y_0，f，φ，ω，κ，这是一项复杂的工作，在近景摄影测量教材中有推导。实际工作中往往不这样做，而是直接求得11个未知数以后，利用它们即可求得任一点空间坐标。

将式（2-66）写成误差方程式的形式：

$$\left.\begin{aligned}v_x=\frac{X}{A}L_1+\frac{Y}{A}L_2+\frac{Z}{A}L_3+\frac{1}{A}L_4-\frac{xX}{A}L_9-\frac{xY}{A}L_{10}-\frac{xZ}{A}L_{11}-\frac{x}{A}\\ v_y=\frac{X}{A}L_5+\frac{Y}{A}L_6+\frac{Z}{A}L_7+\frac{1}{A}L_8-\frac{yX}{A}L_9-\frac{yY}{A}L_{10}-\frac{yZ}{A}L_{11}-\frac{y}{A}\end{aligned}\right\}\tag{2-67}$$

$$A=L_9X+L_{10}Y+L_{11}Z+1$$

上式为非线性公式，按最小二乘法解算时必须逐渐趋近。

式（2-67）亦可写成

$$\left.\begin{aligned}Av_x=XL_1+YL_2+ZL_3+L_4-xXL_9-xYL_{10}-xZL_{11}-x\\ Av_y=XL_5+YL_6+ZL_7+L_8-yXL_9-yYL_{10}-yZL_{11}-y\end{aligned}\right\}\tag{2-67a}$$

在求得L_1至L_{11}这些未知参数以后，可以按下式解算某任意点的空间坐标X，Y，Z值。

$$\left.\begin{aligned}(xL_9-L_1)X+(xL_{10}-L_2)Y+(xL_{11}-L_3)Z+(x-L_4)=0\\ (yL_9-L_5)X+(yL_{10}-L_6)Y+(yL_{11}-L_7)Z+(y-L_8)=0\end{aligned}\right\}\tag{2-68}$$

对于一对同名像点可以列出两组像式（2-68）形式的公式，以便进行最小二乘法解算。

四、空间后方交会的精度估算

按式(2-36)求得的摄影光束的外方位元素的精度可以通过法方程式中未知数的系数矩阵的逆阵$(A^TA)^{-1}$来解求，此时视像点坐标为等精度不相关观测值。因为$(A^TA)^{-1}$中第i个主对角线上元素Q_{ii}就是法方程式中第i个未知数的权倒数。若单位权观测值中误差为m_0，则第i个未知数的中误差为

$$m_i=\sqrt{Q_{ii}}\,m_0\tag{2-69}$$

当参加后方交会的控制点有 n 个时，则单位权中误差可按下式计算：

$$m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-6}} \tag{2-70}$$

从式（2-69）可知，估计空间后方交会精度的关键是确定权倒数矩阵 Q。权倒数矩阵 Q 的主对角线上元素的大小与地面控制点的分布、数量有关，下面就来分析这个问题。

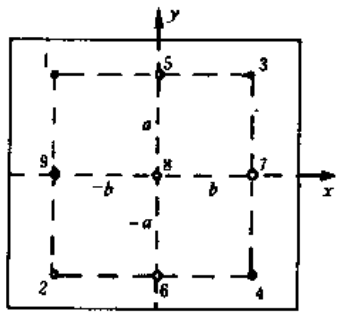


图 2-3-5

假定在像片上规则地分布九个已知点，如图2-3-5 所示，按式（2-38）中误差方程式的系数，列出后方交会的法方程式系数矩阵的形式如下：

$$A^TA=\begin{bmatrix} [aa] & 0 & 0 & [ad] & 0 & 0 \\ 0 & [bb] & 0 & 0 & [be] & 0 \\ 0 & 0 & [cc] & 0 & 0 & 0 \\ [ad] & 0 & 0 & [dd] & 0 & 0 \\ 0 & [be] & 0 & 0 & [ee] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [ff] \end{bmatrix}$$

相应的权系数矩阵 Q 为：

$$Q=(A^TA)^{-1}=\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{14} & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{52} & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{2-71}$$

按图2-3-5所示的点位进行后方交会时，上式中非零元素由下式求得：

$$\left.\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{[dd]}{[aa][dd]-[ad][ad]} \\ Q_{22} &= \frac{[ee]}{[dd][ee]-[be][be]} \\ Q_{33} &= \frac{1}{[cc]} \\ Q_{44} &= \frac{[aa]}{[aa][dd]-[ad][ad]} \\ Q_{55} &= \frac{[bb]}{[bb][ee]-[be][be]} \\ Q_{66} &= \frac{1}{[ff]} \\ Q_{14} &= \frac{-[ad]}{[aa][dd]-[ad][ad]} \\ Q_{25} &= \frac{-[be]}{[bb][ee]-[be][be]} \end{aligned}\right\} \tag{2-72}$$

法方程式系数矩阵中非零元素的具体内容列入表2-3-1。

空间后方交会法方程系数矩阵的非零元素表　　表 2-3-1

	九　点　法	六　点　法	四　点　法
[aa]	$6\left(f+\frac{b^2}{f}\right)^2+\frac{4a^2b^2}{f^2}+3f^2$	$4\left(f+\frac{b^2}{f}\right)^2+\frac{4a^2b^2}{f^2}+2f^2$	$4\left(f+\frac{b^2}{f}\right)^2+\frac{4a^2b^2}{f^2}$
[bb]	$6\left(f+\frac{a^2}{f}\right)^2+\frac{4a^2b^2}{f^2}+3f^2$	$6\left(f+\frac{a^2}{f}\right)^2+\frac{4a^2b^2}{f^2}$	$4\left(f+\frac{a^2}{f}\right)^2+\frac{4a^2b^2}{f^2}$
[cc]	$6(a^2+b^2)$	$6a^2+4b^2$	$4(a^2+b^2)$
[dd]	9	6	4
[ee]	9	6	4
[ff]	$\frac{6(a^2+b^2)}{f^2}$	$\frac{6a^2+4b^2}{f^2}$	$\frac{4(a^2+b^2)}{f^2}$
[ad]	$\frac{9f^2+6b^2}{f}$	$\frac{6f^2+4b^2}{f}$	$\frac{4(f^2+b^2)}{f}$
[be]	$\frac{9f^2+6a^2}{f}$	$\frac{6f^2+6a^2}{f}$	$\frac{4(f^2+a^2)}{f}$

设$a=b$，代入式（2-72）中，可得不同布点方案的权倒数的计算公式：

九点后方交会：

$$\left.\begin{aligned} Q_{11}&=Q_{22}=\frac{f^2}{6b^4}\\ Q_{33}&=\frac{1}{12b^2}\\ Q_{44}&=\frac{9f^4+12b^2f^2+10b^4}{54b^4}\\ Q_{55}&=\frac{9f^4+12b^2f^2+10b^4}{54b^4}\\ Q_{66}&=\frac{f^2}{12b^2}\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}73)$$

六点后方交会：

$$
\left.\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{3f^2}{16b^4} \\
Q_{22} &= \frac{f^2}{4b^2} \\
Q_{33} &= \frac{1}{10b^2} \\
Q_{44} &= \frac{3f^4 + 4b^2f^2 + 4b^4}{16b^4} \\
Q_{55} &= \frac{3f^4 + 6b^2f^2 + 5b^4}{12b^4} \\
Q_{66} &= \frac{f^2}{10b^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2-74}
$$

四点后方交会：

$$
\left.\begin{aligned}
Q_{11} = Q_{22} &= \frac{f^2}{4b^4} \\
Q_{33} &= \frac{1}{8b^2} \\
Q_{44} = Q_{55} &= \frac{f^4 + 2b^2f^2 + 2b^4}{4b^4} \\
Q_{66} &= \frac{f^2}{8b^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2-75}
$$

假若$b = f = 70\text{mm}$，$m_0 = \pm 0.1\text{mm}$，代入式(2-75)中，这里注意在前面推导过程中，令

$$\Delta x_S = \frac{f}{H}\Delta X_S,\quad \Delta y_S = \frac{f}{H}\Delta Y_S,\quad \Delta z_S = \frac{f}{H}\Delta Z_S$$

因此在实际计算精度时应考虑因子f/H，最后求得：

$$m_\varphi = m_\omega = \pm 2.4'$$

$$m_\kappa = \pm 1.8'$$

$$m_{X_S} = m_{Y_S} = \pm 0.1118 \cdot \frac{H}{f}\text{mm}$$

$$m_{Z_S} = \pm 0.0353 \cdot \frac{H}{f}\text{mm} \approx \frac{H}{2000}$$

比较式（2-73），(2-74)，(2-75）中相应的权倒数可知，使用的已知点越多，空间后方交会的精度越高。

*五、空间后方交会的不定性

按最小二乘法原理解算空间后方交会问题时，其法方程式的解是否唯一？在什么情况下存在解的不唯一性，现在来讨论这个问题。

在数学中，我们知道，确定n个参数λ可以有一系列的n个函数F_j：

$$F_j(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots n \tag{2-76}$$

其解为

$$X^T = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) \tag{2-76a}$$

如果式（2-76）的解不唯一，则它有另一个邻近的解，设为X'

$$X'^T = (\lambda_1 + d\lambda_1 \quad \lambda_2 + d\lambda_2 \cdots \lambda_n + d\lambda_n) \tag{2-76b}$$

将X'代入式（2-76）中，并取至线性项时，可得：

$$F_j(X') = F_j(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} d\lambda_k = 0, \quad j = 1, 2 \cdots n$$

因为$F_j(X) = 0$，所以，必定有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_k} d\lambda_k = 0, \quad j = 1, 2 \cdots n \tag{2-77}$$

式（2-77）为一个线性齐次方程，欲使该齐次方程具有一个或多个非零解，只有以下条件成立，即行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_2} \cdots\cdots \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_n} \\ \vdots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_2} \cdots\cdots \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix} = 0 \tag{2-78}$$

当线性方程组中未知数λ_k的系数组成的行列式的值为零时，这组方程的解不唯一，即产生了解的不定性。

把这样的结论应用到空间后方交会的问题中。如图2-3-6所示，$P_1(X_1, Y_1, Z_1)$，$P_2(X_2, Y_2, Z_2)$，$P_3(X_3, Y_3, Z_3)$为进行空间后方交会的三个控制点，而对摄站点S（X，Y，Z）取用参数

$$\lambda_1 = X,$$
$$\lambda_2 = Y,$$
$$\lambda_3 = Z$$

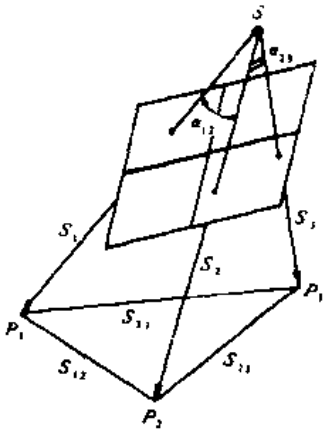


图 2-3-6

则有

$$\left.\begin{aligned} F_1(X, Y, Z) &= S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos a_{12} - S_{12}^2 = 0 \\ F_2(X, Y, Z) &= S_2^2 + S_3^2 - 2S_2 S_3 \cos a_{23} - S_{23}^2 = 0 \\ F_3(X, Y, Z) &= S_3^2 + S_1^2 - 2S_3 S_1 \cos a_{31} - S_{31}^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-79}$$

对上式求对X，Y，Z的偏导数为：

$$\frac{\partial F_j}{\partial X} = \Sigma \frac{\partial F_j}{\partial S_k} \cdot \frac{dS_k}{dX}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial Y}=\Sigma\frac{\partial F_j}{\partial S_k}\cdot\frac{dS_r}{dY}\qquad k=1,\ 2\cdots n$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial Z}=\Sigma\frac{\partial F_j}{\partial S_k}\cdot\frac{dS_k}{dY}$$

将上式代入式（2-78），并按两个行列式相乘的规律得出：

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial S_1}&\frac{\partial F_1}{\partial S_2}&\frac{\partial F_1}{\partial S_3}\\ \frac{\partial F_2}{\partial S_1}&\frac{\partial F_2}{\partial S_2}&\frac{\partial F_2}{\partial S_3}\\ \frac{\partial F_3}{\partial S_1}&\frac{\partial F_3}{\partial S_2}&\frac{\partial F_3}{\partial S_3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{dS_1}{dX}&\frac{dS_1}{dY}&\frac{dS_1}{dZ}\\ \frac{dS_2}{dX}&\frac{dS_2}{dY}&\frac{dS_2}{dZ}\\ \frac{dS_3}{dX}&\frac{dS_3}{dY}&\frac{dS_3}{dZ}\end{vmatrix}=0 \tag{2-80}$$

上式经进一步整理后，变为

$$\begin{vmatrix}S_1-S_2\cos a_{12}&S_2-S_1\cos a_{12}&0\\ 0&S_2-S_3\cos a_{23}&S_3-S_2\cos a_{23}\\ S_3-S_1\cos a_{31}&0&S_1-S_3\cos a_{31}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}X-X_1&Y-Y_1&Z-Z_1\\ X-X_2&Y-Y_2&Z-Z_2\\ X-X_3&Y-Y_3&Z-Z_3\end{vmatrix}=0 \tag{2-81}$$

式中
$$S_k^2=(X-X_k)^2+(Y-Y_k)^2+(Z-Z_k)^2 \tag{2-81a}$$

式（2-81）中第二个行列式与四面体$SP_1P_2S_3$的体积成比例，如果体积为零，则雅可比行列式并为零。这种情况只有当$P_1P_2P_3$三点共线或S点在$P_1P_2P_3$平面内才可能。而实际上前者是不允许的，或可通过增加控制点而解决，后者则已属于平面后交问题，因此产生不唯一解的条件应当是式（2-81）中第一个行列式为零。为了导出产生不唯一解的方程式，将式中余弦函数用式（2-79）中关系代入，则：

$$(S_1^2-S_2^2+S_{32}^2)(S_2^2-S_3^2+S_{23}^2)(S_3^2-S_1^2+S_{31}^2)+(S_2^2-S_1^2+S_{12}^2)$$
$$-(S_3^2-S_2^2+S_{23}^2)(S_1^2-S_3^2+S_{31}^2)=0 \tag{2-82}$$

再按式（2-81a）的关系将上式中S_k用X，Y，Z坐标代替，则可求得不唯一解（即不定性）的方程式。为了使问题简单起见，选择一个特殊的地面坐标系，即P_1为原点，X轴通过P_3，Y轴则位于控制点所构成的平面内。这时控制点的坐标值如表2-3-2所示，用表2-3-2中坐标值代入式（2-81a），将相应的S代入式（2-82）中，得到

表 2-3-2

	X	Y	Z
P_1	0	0	0
P_2	X_2	Y_2	0
P_3	S_{13}	0	0

$$X^2+Y^2-S_{13}X-\frac{X_2^2+Y_2^2-S_{13}X}{Y_2}Y=0$$

这是通过P_1，P_2，P_3（含摄站点）所构成的一个圆柱，因为未知数X，Y的平方项的系数有相同的符号和大小，且没有Z值

在解算摄影光束的外方位元素时，所选择的控制点应当避免位于一个圆柱面上。

§2.4 共面条件方程与解析相对定向

在§2.3中我们主要介绍了利用共线条件方程解算单个摄影光束的外方位元素的问题。本节介绍利用共面条件方程的连续像对相对定向和单独像对相对定向的解算公式，以及相对定向元素的精度估计。

一、共面条件方程式

图2-4-1表示一个立体模型实现正确相对定向后的示意图，图中m_1，m_2表示模型点M在左右两张像片上的构像。S_1m_1，S_2m_2表示一对同名光线，它们与空间基线S_1S_2共面，这个平面可以用三个矢量$\vec{R}_1$，$\vec{R}_2$、$\vec{B}$的混合积表示为：

$$\vec{B}\cdot(\vec{R}_1\times\vec{R}_2)=0 \qquad (2\text{-}83)$$

改用坐标的形式表示时，即为一个三阶行列式等于零

$$F=\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (2\text{-}84)$$

式（2-84）便是相对定向的共面条件方程式。

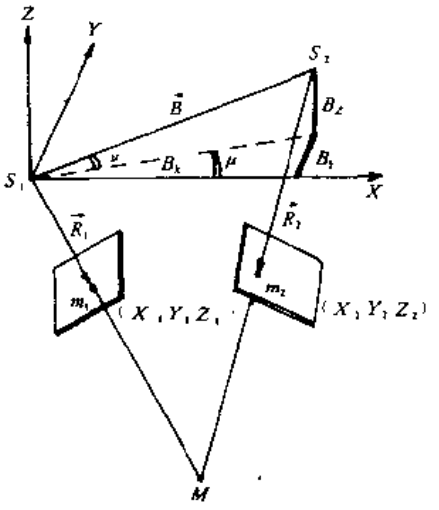


图 2-4-1

其中

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}=R_{左}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}=R_{右}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

是像空间辅助坐标系坐标。

二、连续像对相对定向

（一）作业公式的推导

连续像对相对定向通常假定左方像片是水平的或已知它的方位元素，可把式（2-84）中的X_1，Y_1，Z_1视为已知值。$B_Y\approx B_X\cdot\mu$，$B_Z\approx B_X\cdot\nu$。连续像对的相对定向元素为右片的三个角元素φ，ω，κ和与基线分量有关的两个元素μ，ν。因为式（2-84）是一个非线性函数，则按多元函数泰劳公式展开的办法将式（2-84）展开至小值一次项，即

$$F=F_0+\frac{\partial F}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial F}{\partial\omega}d\omega+\frac{\partial F}{\partial\kappa}d\kappa+\frac{\partial F}{\partial\mu}\cdot b_X d\mu+\frac{\partial F}{\partial\nu}\cdot b_X\cdot d\nu=0 \qquad (2\text{-}85)$$

式中F_0为用相对定向元素的近似值求得的F值。

要求出式（2-85）中偏导数$\frac{\partial F}{\partial\varphi}$，$\frac{\partial F}{\partial\omega}$，…必须先求得偏导数$\frac{\partial X_2}{\partial\varphi}$，$\frac{\partial X_2}{\partial\omega}$，…$\frac{\partial Z_2}{\partial\omega}$，…$\frac{\partial Z_2}{\partial\kappa}$。因推导过程中仅考虑到小值一次项的情况，所以坐标变换关系式可以引用微小旋

转矩阵式（2-24），即

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa & -\varphi \\ \kappa & 1 & -\omega \\ \varphi & \omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

上式分别对φ，ω，κ求导数，得：

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \kappa}\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

由上式可以求得式（2-85）中五个偏导数：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ f & 0 & x_2 \end{vmatrix} \\
\frac{\partial F}{\partial \omega} &= \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial \omega} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial \omega} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial \omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ 0 & f & y_2 \end{vmatrix} \\
\frac{\partial F}{\partial \kappa} &= \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial \kappa} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial \kappa} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial \kappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{vmatrix} \\
\frac{\partial F}{\partial \mu} &= B_X \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \\
\frac{\partial F}{\partial \nu} &= B_X \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}86)$$

将式（2-86）代入式（2-85）中，得：

$$\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ f & 0 & x_2 \end{vmatrix} d\varphi + \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ 0 & f & y_2 \end{vmatrix} d\omega + \begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{vmatrix} dx$$

$$+B_X\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}d\mu + B_X\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}dy + F_0 = 0 \tag{2-87}$$

把上式展开以后，除以B_X，并略去含有$\frac{B_Y}{B_X}d\varphi$、$\frac{B_Z}{B_X}d\varphi_1$…等二次以上的小值项，经整理后得：

$$Y_1 x_2 d\varphi + (Y_1 y_2 - Z_1 f)d\omega - x_2 Z_1 d\kappa + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2)d\mu + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)dy + \frac{F_0}{B_X} = 0 \tag{2-88}$$

在仅考虑到小值一次项的情况下，上式中x_2，y_2可用像空间辅助坐标X_2，Y_2取代，并且近似地认为：

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= Y_2, \\ Z_1 &= Z_2, \\ X_1 &= X_2 + \frac{B_X}{N'} \end{aligned}\right\} \tag{2-89}$$

式中N'是将右方像点m_2变换为模型中M点时的投影系数，不同的像点具有不同的N'值，因为B_X是模型基线，B_X/N'才能视为某点在模型上的左右视差。

顾及式（2-89）中关系，则式(2-88)中的$Z_1X_2 - X_1Z_2$和$X_1Y_2 - X_2Y_1$有以下关系式：

$$\left.\begin{aligned} Z_1X_2 - X_1Z_2 &= -\frac{B_X}{N'}Z_1 \\ X_1Y_2 - X_2Y_1 &= \frac{B_X}{N'}Y_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-90}$$

将式（2-90）代入式（2-88）中，并给全式乘以$\frac{N'}{Z_1}$，得到：

$$Q = -\frac{X_2Y_2}{Z_2}N'd\varphi - \left(Z_2 + \frac{Y_2}{Z_2}\right)N'd\omega + X_2N'd\kappa + B_Xd\mu - \frac{Y_2}{Z_2}B_Xdy \tag{2-91}$$

上式便是解析法连续像对相对定向的作业公式。在立体像对中每量测一个点，就可以列出一个Q方程式，在计算中往往把Q视为观测值，那么公式（2-91）就是观测方程式，如果令v_Q为Q的改正数的话，由式（2-91）可以列出误差方程式：

$$v_Q = -\frac{X_2Y_2}{Z_2}N'd\varphi - \left(Z_2 - \frac{Y_2^2}{Z_2}\right)N'd\omega + X_2N'd\kappa + B_Xd\mu - \frac{Y_2}{Z_2}B_Xdv - Q \tag{2-92}$$

上式中Q为：

$$Q = -\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{Z_1X_2 - X_1Z_2} = \frac{B_XZ_2 - B_ZX_2}{X_1Z_2 - X_2Z_1}Y_1 - \frac{B_XZ_1 - B_ZX_1}{X_1Z_2 - X_2Z_1}Y_2 - B_Y \tag{2-93}$$

（二）常数项Q的几何解释

下面将说明一下Q的几何概念：

如图2-4-2所示，左像点m_1，右像点m_2，模型点M的像空间辅助坐标分别为（X_1，Y_1，Z_1），（X_2，Y_2，Z_2），（NX_1，NY_1，NZ_1）或（$N'X_2$，$N'Y_2$，$N'Z_2$）。N和N'分别为左右像点的投影系数。它们之间具有以下关系：

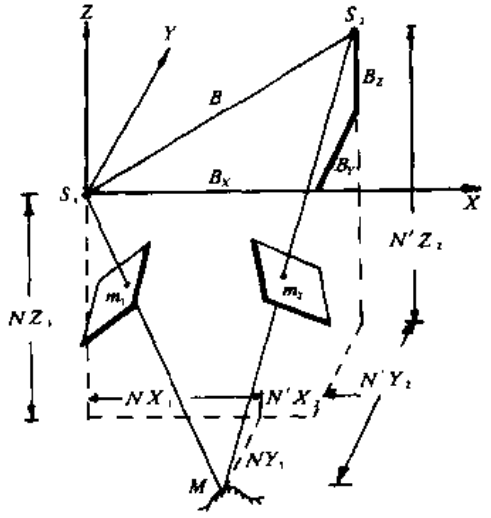


图 2-4-2

$$\left.\begin{aligned} NX_1 &= B_X + N'X_2 \\ NY_1 &= B_Y + N'Y_2 \\ NZ_1 &= B_Z + N'Z_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-94}$$

用上式的第一、第三两式联立解出投影系数N和N'：

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{B_X Z_2 - B_Z X_2}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1} \\ N' &= \frac{B_X Z_1 - B_Z X_1}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1} \end{aligned}\right\} \tag{2-95}$$

从上式可见，N和N'是像点的像空间辅助坐标的函数。不同的点，则有不同的N和N'值。

将式（2-95）代入式（2-93），Q值又可表示为：

$$Q = NY_1 - N'Y_2 - B_Y \tag{2-96}$$

由式（2-94）中第二式可知，$Q = 0$。这就是Q的几何意义：当一个立体像对完成了相对定向的情况下，$Q = 0$。若没有完成相对定向，则$Q \neq 0$，其数值的大小反映出模型上同名点之间的上下视差。

由于Q具有这样一个性质，在解析相对定向的逐渐趋近过程中，把每个定向点上的Q值是否为零或小于某一个限定的值，作为判断解析相对定向是否完成的一个标准。

（三）相对定向元素解算过程

将误差方程式（2-92）用一般的通式表示：

$$v = ad\varphi + bd\omega + cd\kappa + rd\mu + sdy - l \tag{2-97}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &a = -\frac{X_2 Y_2}{Z_2}N', \quad b = -\left(Z_2 + \frac{Y_2^2}{Z_2}\right)N', \quad c = X_2 N' \\ &r = B_X, \quad s = -\frac{Y_2}{Z_2}B_X \\ &l = Q = NY_1 - N'Y_2 - B_Y \end{aligned}\right\} \tag{2-98}$$

误差方程式（2-97）中含五个未知的相对定向元素，解出五个未知数，至少需要五个定向点列出五个方程式即可。通常采用六个或更多的定向点，这样就可按最小二乘法原理求解。设观测了n个点，n个误差方程式的矩阵表示形式为：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{P}$$

相应的法方程式为：

$$A^T PAX - A^T PL = 0$$

法方程式的解为：

$$X = (A^T PA)^{-1} A^T PL \tag{2-99}$$

因为误差方程式（2-97）是由严密相对定向公式（2-85）经过线性化之后的结果，所以相对定向元素的解求是一个逐渐趋近的过程，其具体解算过程说明如下（图2-4 3）：

（1）确定初始值。连续像对法相对定向中，左像片的角元素是已知的（或假设为水平，或使用前一个立体像对中右片的角元素），右片的三个角元素的初始值视为零，基线分量B_Y，B_Z的初始值亦为零，即$\varphi = \omega = \kappa = \mu = \nu = 0$，$B_X$取用第2点（标准点位）的左右视差，即$B_X = P_2$。

（2）计算右像片的九个方向余弦。可以采用§2.2中构成正交矩阵的三种方法中任一种方法来计算，这里只要注意将φ，ω，κ换成相应的三个独立参数即可。

（3）求得正交矩阵R以后，计算左右像点的空间辅助坐标。

（4）计算基线分量B_Y，B_Z、和各点的投影系数N，N'和Q值。

（5）逐点地进行法化，完成法方程式系数矩阵和常数项矩阵的计算。

（6）解法方程式，求出相对定向元素的改正数。

（7）计算相对定向元素的新值

$$\varphi = \varphi_0 + d\varphi,\quad \omega = \omega_0 + d\omega,\quad \kappa = \kappa_0 + d\kappa$$

$$\mu = \mu_0 + d\mu,\quad \nu = \nu_0 + d\nu$$

（8）给出改正数的限值为0.3×10^{-4}弧度，检查所有的改正数是否全部小于限值？如果全小于，则相对定向元素解算结束。否则需重复过程2到7。

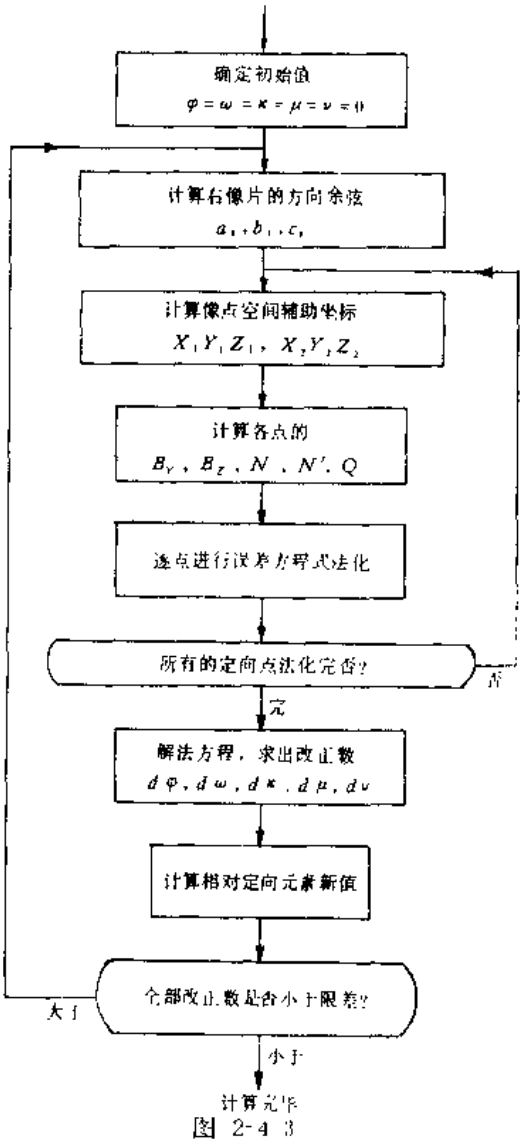


图 2-4 3

（9）最后把求得本像对的相对定向元素φ、ω、κ作为下一个像对左片的初始值，进行下像对的相对定向元素的解算。

以上便是解析连续像对相对定向的全过程。最后我们还要指出一点，在推导公式（2-91）的时候，曾提到过在考虑到小值一次项情况下x_2，y_2由X_2，Y_2取代。实际上并不限于此，亦可以将X_1，Y_1，X_2，Y_2由x_1，y_1以及x_2，y_2来取代。不管那一种方式，不同的仅是误差方程式中未知数的系数的表达形式，而对于式中常数项的计算均用严密公式求得。

（四）连续像对相对定向的严密公式

在上面的讨论中，是把Q视为观测值，而实际的观测值通常是像点的左、右像片坐标。此外，在上述推导中仅考虑相对定向元素的一次小项。

严格的处理是对x_1、y_1、x_2、y_2像片坐标观测值加入改正数，并且$\frac{\partial F}{\partial \varphi}$，$\frac{\partial F}{\partial \omega}$，$\frac{\partial F}{\partial \kappa}$取更严密的公式：

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}=\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -Z_2 & 0 & X_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega}=\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -Y_2\sin\varphi & X_2\sin\varphi-Z_2\cos\omega & Y_2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa}=\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -Y_2\cos\varphi\cos\omega-Z_2\sin\omega & X_2\cos\varphi\cos\omega+Z_2\sin\varphi\cos\omega & X_2\sin\omega-Y_2\sin\varphi\cos\omega \end{vmatrix}$$

从而得到下列形式的误差方程式：

$$\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}V_{x_1}+\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}V_{y_1}+\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}V_{x_2}+\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}V_{y_2}$$

$$=dB_Y-\frac{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}dB_Z-\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -Z_2 & 0 & X_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}d\varphi$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -Y_2\sin\varphi & X_2\sin\varphi-Z_2\cos\omega & Y_2\cos\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}d\omega$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -Y_2\cos\varphi\cos\omega-Z_2\sin\omega & X_2\cos\varphi\cos\omega+Z_2\sin\varphi\cos\omega & X_2\sin\omega-Y_2\sin\varphi\cos\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}}d\kappa-Q \tag{2-92a}$$

式中a_i，b_i，c_i和a_i'，b_i'，c_i'分别取自左、右片旋转矩阵。该式为带未知数的条件平差基本方程式，用矩阵形式可写成：

$$AV = BX - L,\quad P$$

法方程式则为：

$$B^T(AP^{-1}A^T)^{-1}BX = B^T(AP^{-1}A^T)^{-1}L$$

$$X = [B^T(AP^{-1}A^T)^{-1}B]^{-1}B^T(AP^{-1}A^T)^{-1}L \qquad (2\text{-}99a)$$

式（2-92a）和式（2-99a）比上面的（2-92）和（2-99）更加严密。连续像对相对定向法用于航偏角大的长航带时，有可能使后序像对相对定向中κ角偏大，此时也许要采用严密公式（2-92a)进行平差处理。计算各系数应采用当前值，这意味着系数阵在每次迭代中将发生变化。

当然，在此情况下每个像对也可采用以摄影基线方向为像空间辅助坐标系的X轴。此时φ_0，ω_0，κ_0均可假设为零，这便是单独像对相对定向法。

三、单独像对相对定向

单独像对相对定向的原理与连续像对相对定向的原理相同，不同的是选用摄影基线为空间辅助坐标系的X轴，正方向与航线方向一致，相对定向的角元素仍选用φ，ω，κ系统。左片为φ_1，κ_1；右片为φ_2、ω_2，κ_2。由共面条件：

$$F = \begin{vmatrix} B & 0 & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2\text{-}100)$$

将上式按泰勒公式展开，保留到小值一次项，经整理后，得到：

$$F = F_0 + B[X_1Y_1\,d\varphi_1 + X_1Z_2\,d\kappa_1 + (Z_1Z_2 + Y_1Y_2)d\omega_2 - X_2Y_1\,d\varphi_2 - X_2Z_1\,d\kappa_2] = 0$$

将上式乘以常数$\frac{f}{BZ_1Z_2}$视$Z_1 = Z_2 = -f$，并令$Q = \frac{fF_0}{BZ_1Z_2}$，则有：

$$Q = -\frac{X_1Y_2}{Z_1}d\varphi_1 + \frac{X_2Y_1}{Z_1}d\varphi_2 + \left(Z_1 + \frac{Y_1Y_2}{Z_1}\right)d\omega - X_1\,d\kappa_1 + X_2\,d\kappa_2 \qquad (2\text{-}101)$$

上式中

$$Q = \frac{fF_0}{BZ_1Z_2} = \frac{f(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)}{Z_1Z_2} = f\frac{Y_1}{Z_1} - f\frac{Y_2}{Z_2} = y_{t_1} - y_{t_2} \qquad (2\text{-}102)$$

式（2-102)中y_{t_1}，y_{t_2}相当于在空间辅助坐标系中，一对理想像片上同名像点的坐标。显然，在完成相对定向后（$y_{t_1} - y_{t_2}$）应为0，所以在这里同样可以把$Q = 0$作为检验单独像对相对定向是否完成的标准。

单独像对五个相对定向元素φ_1，κ_1，φ_2，ω_2，κ_2的求解仍然是个逐渐趋近的过程，具体算法与连续像对相对定向元素的求解过程相似。

单独像对相对定向中，各角元素均为小值，采用式(2-101)一次项公式迭代求解即可。

下表为一立体像对所量测的八个像点坐标，$f = 152.67$mm：

表 2-4-1

点　号	x_1	y_1	x_2	y_2	$q = y_1 - y_2$
1	93.176	5.890	6.072	5.176	0.714mm
2	-27.403	6.672	-112.842	1.121	5.551mm
3	83.951	107.422	-1.872	105.029	2.393mm
4	-11.659	101.544	-99.298	95.206	6.338mm
5	110.326	-97.800	34.333	-99.522	1.722mm
6	-12.653	-87.645	-96.127	-93.761	6.116mm
7	37.872	40.969	-48.306	37.862	3.107mm
8	41.503	-37.085	-42.191	-40.138	3.053mm

第一次迭代求相对定向元素：

$$V = \begin{bmatrix} d\kappa_1 & d\kappa_2 & d\varphi_1 & d\varphi_2 & d\omega_2 \\ -93 & 6 & 4 & 0 & 153 \\ 7 & -113 & -1 & 1 & 153 \\ -84 & -5 & 59 & 3 & 225 \\ 12 & -99 & -8 & 62 & 212 \\ -110 & 34 & 71 & 22 & 218 \\ 13 & -96 & 7 & -59 & 210 \\ -38 & -48 & 10 & 12 & 162 \\ -42 & -42 & -10 & -11 & 163 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\kappa_1 \\ d\kappa_2 \\ d\varphi_1 \\ d\varphi_2 \\ d\omega_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.714 \\ 5.551 \\ 2.393 \\ 6.338 \\ 1.722 \\ 6.116 \\ 3.107 \\ 3.053 \end{bmatrix}$$

求出的相对定向元素：

$d\kappa_1 = 1.73\text{gon}$, $d\kappa_2 = -0.82\text{gon}$,

$d\varphi_1 = -0.34\text{gon}$, $d\varphi_2 = 0.05\text{gon}$, $d\omega_2 = 1.40\text{gon}$

未知数的权倒数矩阵

$$Q = (A^T A)^{-1}$$

$$Q = 10^{-5}\begin{bmatrix} 70 & 63 & 05 & 00 & 29 \\ 63 & 62 & 06 & 00 & 28 \\ 05 & 06 & 13 & 03 & 02 \\ 00 & 00 & 03 & 13 & 00 \\ 29 & 28 & 02 & 00 & 13 \end{bmatrix}$$

观测值单位权中误差

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{v^T v}{n - u}} = \pm 9\mu\text{m}$$

相对定向元素中误差：

$$\sigma_{\lambda_1} = 0.009\sqrt{0.00070} = \pm 15\,\text{mgon}$$

$$\sigma_{\kappa_2} = 0.009\sqrt{0.00062} = \pm 14\,\text{mgon}$$

$$\sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_2} = \sigma_{\omega_2} = 0.009\sqrt{0.00013} = \pm 7\,\text{mgon}$$

重复迭代的结果这里不一一列出。

四、解析相对定向的精度分析

与单像空间后方交会精度估算的方法一样，精度分析的关键是求出解求相对定向元素法方程式系数矩阵（A^TA）的逆矩阵（$A^TA)^{-1}$，即权倒数矩阵。

（一）六点定向

以连续像对相对定向为例，在一个立体像对中量测六个标准点上下视差和像点坐标来计算相对定向元素。为了方便起见，用像点的像平面坐标表示误差方程式的系数并化算到像片比例尺，则误差方程式表示为：

$$v = db_y + \frac{y_2}{f}db_z + \frac{x_2 y_2}{f}d\varphi + \left(f + \frac{y_2^2}{f}\right)d\omega + x_2 d\kappa - q$$

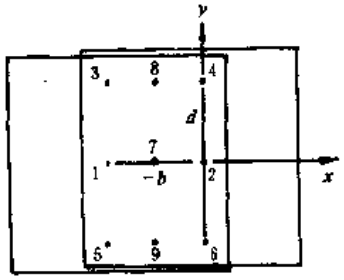


图 2-4-4

表 2-4-2

点号 / 坐标	1	3	5	2	4	6
x_2	$-b$	$-b$	$-b$	0	0	0
y_2	0	d	d	0	d	$-d$

标准点位分布如图2-4-4所示，其像平面坐标列在表2-4-2中。由此可得误差方程式的系数矩阵A：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -b & f \\ 1 & \frac{d}{f} & \frac{-b^2}{f} & -b & f + \frac{d^2}{f} \\ 1 & -\frac{d}{f} & \frac{b^2}{f} & -b & f + \frac{d^2}{f} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & f \\ 1 & \frac{d}{f} & 0 & 0 & f + \frac{d^2}{f} \\ 1 & -\frac{d}{f} & 0 & 0 & f + \frac{d^2}{f} \end{bmatrix}$$

相应的法方程式系数矩阵为：

$$A^TA=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & \left(6f+4\frac{d^2}{f}\right) & -3b \\ 0 & 4\frac{d^2}{f^2} & -2b\cdot\frac{d^2}{f^2} & 0 & 0 \\ 0 & -2b\cdot\frac{d^2}{f^2} & 2b^2\cdot\frac{d^2}{f^2} & 0 & 0 \\ -3b & 0 & 0 & 2f^2+4\left(f+\frac{d^2}{f}\right)^2 & -b\left(3f+2\frac{d^2}{f}\right) \\ \left(6f+4\frac{d^2}{f}\right) & 0 & 0 & -6\left(3f+2\frac{d^2}{f}\right) & 3b^2 \end{bmatrix}$$

由法方程式系数矩阵的逆阵求得的权倒数矩阵列在表2-4-3中：

表 2-4-3

	Q_{b_y}	Q_{b_z}	Q_φ	Q_ω	Q_κ
Q_{b_y}	$\frac{9f^4+8d^4+12f^2d^2}{12d^4}$	0	0	$-\frac{3f^3+2fd^2}{4d^4}$	$\frac{1}{3b}$
Q_{b_z}	0	$\frac{f^2}{2d^2}$	$\frac{f^2}{2bd^2}$	0	0
Q_φ	0	$\frac{f^2}{2bd^2}$	$\frac{f^2}{b^2d^2}$	0	0
Q_ω	$-\frac{3f^3+2fd^2}{4d^4}$	0	0	$\frac{3f^2}{4d^4}$	0
Q_κ	$\frac{1}{3b}$	0	0	0	$\frac{2}{3b^2}$

对于任一个相对定向元素X_i的精度，可以按下式求得：

$$m_{X_i}=m_q\sqrt{Q_{X_iX_i}} \tag{2-103}$$

其中

$$m_q=\sqrt{\Sigma v^2} \tag{2-104}$$

同样地，基于下面单独像对相对定向作业公式：

$$v=-\frac{x_1y_1}{f}d\varphi_1+\frac{x_2y_1}{f}d\varphi_2+\left(f+\frac{y_1^2}{f}\right)d\omega_2-x_1d\kappa_1+x_2d\kappa_2-Q$$

的权倒数矩阵列在表2-4-4中。

（二）九点定向

在相对定向中，若量测了九个点的像点坐标和上下视差，九点的位置分布如图2-4-4所示。同理求得各相对定向元素的权倒数及其相关项列在表2-4-5中。

从以上列出的权倒数及其相关项的表中可知，连续像对的相对定向中b_y与ω，b_z与φ彼此有较大的相关性。而在单独像对的相对定向中ω_2与κ_1，κ_2亦有较大的相关性。这些相关性的存在是造成解求某些相对定向元素精度较低的原因。从下面一个具体例子可以看出

表 2-4-4

	Q_{φ_1}	Q_{φ_2}	Q_{ω_2}	Q_{κ_1}	Q_{κ_2}
Q_{φ_1}	$\frac{f^2}{2b^2d^2}$	0	0	0	0
Q_{φ_2}		$\frac{f^2}{2b^2d^2}$	0	0	0
Q_{ω_2}			$\frac{3f^2}{4d^4}$	$\frac{f}{2bd^2}\left(1+\frac{3f^2}{2d^2}\right)$	$\frac{f}{2bd^2}\left(1+\frac{3f^1}{2d^2}\right)$
Q_{κ_1}	转 置	对 称	项	$\frac{1}{b^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{f^2}{d^2}+\frac{3f^4}{4d^4}\right)$	$\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{f^2}{d^2}+\frac{3f^4}{4d^4}\right)$
Q_{κ_2}					$\frac{1}{b^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{f^2}{d^4}+\frac{3f^4}{4d^4}\right)$

表 2-4-5

	Qb_y	Qb_z	Q_φ	Q_ω	Q_κ
Q_{b_y}	$\frac{1}{2}+\frac{2f^2}{3d^2}+\frac{f^4}{2d^4}$	0	0	$-\frac{f}{3d^2}\left(1+\frac{3f^2}{2d^2}\right)$	$\frac{1}{3b}$
Q_{b_z}	0	$\frac{5f^2}{12d^2}$	$-\frac{f^2}{2bd^2}$	0	0
Q_φ	0	$-\frac{f^2}{2bd^2}$	$\frac{f^2}{b^2d^2}$	0	0
Q_ω	$-\frac{f}{3d^2}\left(1+\frac{3f^2}{2d^2}\right)$	0	0	$\frac{f^2}{2d^4}$	0
Q_κ	$\frac{1}{3b}$	0	0	0	$\frac{2}{3b^2}$

这个问题。

设 f = 300mm，像幅230×230mm²，b = 100mm，d = 120mm，m_q = ±0.02mm，求得：

连续像对情况：

$$m_{b_y} = \pm 0.12\text{mm},\quad m_\kappa = \pm 1.0^c$$

$$m_{b_z} = \pm 0.035\text{mm},\quad m_\varphi = \pm 3.2^c,\quad m_\omega = \pm 2.3^c。$$

单独像对情况：

$$m_{\kappa_1} = m_{\kappa_2} = \pm 7.7^c,\quad m_{\varphi_1} = m_{\varphi_1} = \pm 2.3^c$$

$$m_{\omega_2} = \pm 2.3^c$$

从上面的数字可以看到m_{b_y}，m_{κ_1}，m_{κ_2}的精度较差，原因就是由于存在相关性的缘故。

除此以外，我们还可以看到九点定向时b_y和ω的精度有很大的提高。f/b比值对相对定

向元素解求精度有直接影响，其比值愈小测定相对定向元素的精度就愈高。

§2.5 单元模型的空间相似变换

通常提到的模型绝对定向或两个单独相对定向模型的连接问题就是一个空间的相似变换，只不过相似变换这个名词更能体现出问题的一般化。本节主要介绍空间相似变换的理论、公式和应用。

一、空间坐标的相似变换方程

前一节我们讨论了一个立体模型的相对定向，经相对定向以后，可以求得任一个模型点的空间辅助坐标，我们的目的是要求出这些点的地面测量坐标。空间辅助坐标系与地面测量坐标系通常是不一致的，而且这两个系统的比例也不相同。仿照像空间坐标系与像空间辅助坐标系之间的转换，空间辅助坐标系相对地面测量坐标系应有三个角元素Φ，Ω，K，为了使这两个系统的坐标原点和比例尺一致，变换中还应考虑三个平移量和一个比例尺的缩放，即需经过三个角度的旋转，一个缩放和三个坐标方向的平移，才能将模型点的空间辅助坐标变换为地面测量坐标，我们把这个变换过程又称之为绝对定向。

由于地面测量坐标系是左手坐标系而空间辅助坐标系(或摄测坐标系)是右手坐标系，为了使两个坐标系的X轴之间夹角不至于太大，往往采用一个地面摄测坐标系作为过渡，即先将地面控制点的地面测量坐标变换为地面摄测坐标（右手坐标系)(详见本书第四章)，根据控制点的地面摄测坐标进行绝对定向，最后再将经绝对定向后的任一模型点的地面摄测坐标反变换为地面测量坐标。

假设任一模型点的空间辅助坐标为X，Y，Z，该点的地面摄测坐标为X_{tp}，Y_{tp}，Z_{tp}、它们之间存在一个空间相似变换关系，可以用下式表示：

$$\begin{bmatrix} X_{tp} \\ Y_{tp} \\ Z_{tp} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \tag{2-105}$$

式中λ为缩放系数；a_i，b_i，c_i为由角元素Φ、Ω、K的函数组成的方向余弦；ΔX,ΔY,ΔZ为坐标原点的平移量。所以空间相似变换的七个参数是比例尺缩放系数λ，三个旋转量Φ、Ω、K，三个平移量ΔX，ΔY，ΔZ。若已知这七个参数，就可以进行两个空间直角坐标之间的变换，由于这种变换前后图形的几何形状相似，所以把这种变换称为“相似”变换。如何确定这七个参数，是下面继续讨论的问题。

二、空间相似变换公式的线性化

前面已经导出空间相似变换公式（2-105），它是一个多元的非线性函数，为了最小二乘法求解，对式（2-105）采用多元函数的泰勒公式展开，并保留到小值一次项，则有

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial F}{\partial \Phi}d\Phi + \frac{\partial F}{\partial \Omega}d\Omega + \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial \Delta X}d\Delta X + \frac{\partial F}{\partial \Delta Y}d\Delta Y + \frac{\partial F}{\partial \Delta Z}d\Delta Z \tag{2-106}$$

将上式写成误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_X &= \frac{\partial X}{\partial \Delta X}d\Delta X + \frac{\partial X}{\partial \Phi}d\Phi + \frac{\partial X}{\partial \Omega}d\Omega + \frac{\partial X}{\partial K}dK + \frac{\partial X}{\partial \lambda}d\lambda - l_X \\ v_Y &= \frac{\partial Y}{\partial \Delta Y}d\Delta Y + \frac{\partial Y}{\partial \Phi}d\Phi + \frac{\partial Y}{\partial \Omega}d\Omega + \frac{\partial Y}{\partial K}dK + \frac{\partial Y}{\partial \lambda}d\lambda - l_Y \\ v_Z &= \frac{\partial Z}{\partial \Delta Z}d\Delta Z + \frac{\partial Z}{\partial \Phi}d\Phi + \frac{\partial Z}{\partial \Omega}d\Omega + \frac{\partial Z}{\partial K}dK + \frac{\partial Z}{\partial \lambda}d\lambda - l_Z \end{aligned}\right\} \tag{2-107}$$

$$\left.\begin{aligned} l_X &= X_{tp} - \Delta X - \lambda X', \\ l_Y &= Y_{tp} - \Delta Y - \lambda Y', \\ l_Z &= Z_{tp} - \Delta Z - \lambda Z', \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\right\} \tag{2-107a}$$

设 Φ，Ω，K 的近似值为零，λ 的近似值取 1（即变换前已经作过近似比例尺的归化），则求得式（2-107）中偏导数的值如下：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial \Delta X} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial \Delta Y} = 1, \quad \frac{\partial Z}{\partial \Delta Z} = 1, \\ &\frac{\partial X}{\partial \lambda} = X', \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = Y', \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Z', \\ &\frac{\partial X}{\partial \Phi} = -\lambda Z', \quad \frac{\partial X}{\partial \Omega} = -\lambda Y'\sin\Phi \\ &\frac{\partial Y}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \Omega} = \lambda X'\sin\Phi - \lambda Z'\cos\Omega \\ &\frac{\partial Z}{\partial \Phi} = \lambda X', \quad \frac{\partial Z}{\partial \Omega} = \lambda Y'\cos\Phi \\ &\frac{\partial X}{\partial K} = -\lambda Y'\cos\Phi\cos\Omega - \lambda Z'\sin\Omega \\ &\frac{\partial Y}{\partial K} = \lambda X'\cos\Phi\cos\Omega + \lambda Z'\sin\Phi\cos\Omega \\ &\frac{\partial Z}{\partial K} = \lambda X'\sin\Omega - \lambda Y'\sin\Phi\cos\Omega \end{aligned}\right\} \tag{2-108}$$

在绝对定向（或相似变换）的待定七个参数都是小值的情况下，式(2-108)中Φ，Ω，K 均用零为近似值代入，而 λ 取用 1 代入，求得误差方程式的矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X' & -Z' & 0 & -Y' \\ 0 & 1 & 0 & Y' & 0 & -Z' & X' \\ 0 & 0 & 1 & Z' & X' & Y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\lambda \\ d\Phi \\ d\Omega \\ dK \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} \tag{2-109}$$

上式便是单元模型的空间相似变换（或绝对定向）的误差方程式。式中：

X'，Y'，Z'表示模型点空间辅助坐标经式（2-107a）变换后的坐标；

v_X，v_Y，v_Z表示视X，Y，Z为观测值的改正数；

$d\Delta X$，$d\Delta Y$，$d\Delta Z$，$d\lambda$，$d\Phi$，$d\Omega$，dK表示七个待定参数近似值的改正数；

l_X，l_Y，l_Z为误差方程式的常数项，由式（2-107a）求得。

式（2-109）中未知数的系数矩阵中的X'，Y'，Z'若直接用模型坐标X，Y，Z来代替，则有

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X & -Z & 0 & -Y \\ 0 & 1 & 0 & Y & 0 & -Z & X \\ 0 & 0 & 1 & Z & X & Y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\lambda \\ d\Phi \\ d\Omega \\ dK \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} \tag{2-110}$$

当每次迭代计算后，求出变换后的模型坐标，则可用此式平差。

三、坐标的重心化

坐标的重心化是区域网平差中经常采用的一种数据预处理方法，它的目的有两个：一是减少模型点坐标在计算过程中的有效位数，以保证计算的精度；二是采用了重心化坐标以后，可使法方程式的系数简化，个别项的数值变成零，部分未知数可以分开求解，从而提高了计算速度。

我们取单元模型中全部控制点（或已知点）的空间辅助坐标和地面摄测坐标（或要变换到另一空间坐标系的坐标），计算其重心的坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_{tpg} &= \frac{\Sigma X_{tp}}{n}; \quad Y_{tpg} = \frac{\Sigma Y_{tp}}{n}, \quad Z_{tpg} = \frac{\Sigma Z_{tp}}{n} \\ X_g &= \frac{\Sigma X}{n}, \qquad Y_g = \frac{\Sigma Y}{n}, \qquad Z_g = \frac{\Sigma Z}{n} \end{aligned}\right\} \tag{2-111}$$

式中：X_{tpg}，Y_{tpg}，Z_{tpg}为地面摄测坐标系重心的坐标；

X_g，Y_g，Z_g为空间辅助坐标系重心的坐标；

n 为参与计算重心坐标的控制点点数；

$\Sigma X_{tp}\cdots\Sigma Z_{tp}\cdots\Sigma Z$ 表示相应坐标的累加和。

在求重心坐标时必须注意一点，就是两个坐标系中采用的点数要相等，同时点名要一一对应。在满足这两个条件下，允许计算平面坐标的点数与 Z 坐标的点数不相等。

重心化的地面摄测坐标由下式计算：

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_{tp} &= X_{tp} - X_{tpg}\\ \overline{Y}_{tp} &= Y_{tp} - Y_{tpg}\\ \overline{Z}_{tp} &= Z_{tp} - Z_{tpg}\end{aligned}\right\} \tag{2-112}$$

重心化的空间辅助坐标由下式计算：

$$\left.\begin{aligned}\overline{X} &= X - X_g\\ \overline{Y} &= Y - Y_g\\ \overline{Z} &= Z - Z_g\end{aligned}\right\} \tag{2-113}$$

今后在坐标 X，Y，Z 上面加符号“—”表示重心化坐标。

误差方程式（2-110），若用重心化坐标表示可以写成以下形式：

$$\begin{bmatrix}v_X\\ v_Y\\ v_Z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \overline{X} & -\overline{Z} & 0 & -\overline{Y}\\ 0 & 1 & 0 & \overline{Y} & 0 & -\overline{Z} & \overline{X}\\ 0 & 0 & 1 & \overline{Z} & \overline{X} & \overline{Y} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\Delta X\\ d\Delta Y\\ d\Delta Z\\ d\lambda\\ d\Phi\\ d\Omega\\ dK\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}l_X\\ l_Y\\ l_Z\end{bmatrix} \tag{2-114}$$

$$\begin{bmatrix}l_X\\ l_Y\\ l_Z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X_{tp}\\ Y_{tp}\\ Z_{tp}\end{bmatrix} = \lambda R\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{bmatrix} \tag{2-115}$$

坐标重心化的好处可以从下面求解过程中看出。

四、空间相似变换的求解

空间相似变换的求解就是绝对定向元素的解算问题。由前面可知，空间相似变换的解算，实际上就是确定七个待定参数的问题，至少需要七个误差方程式，即三个平面高程控制点和一个高程控制点。若有多余的控制点，便可按最小二乘法原理来解算。

一个平高控制点可以列出一组误差方程式(2-114)，一个高程控制点可以列出式(2-114)中第三个误差方程式。设有多余的控制点，则按式（2-114）可以列出一般误差方程式的矩阵形式：

$$V = AX - L \qquad P = I$$

相应的法方程式的解为

$$X = (A^TA)^{-1}A^TL$$

式中

$$X=[d\Delta X,\ d\Delta Y,\ d\Delta Z,\ d\lambda,\ d\Phi,\ d\Omega,\ dK]^T$$

在坐标重心化情况下：

$$A^TA=\begin{bmatrix} n_X & 0 & 0 & \Sigma\overline{X} & \Sigma\overline{Z} \\ 0 & n_Y & 0 & \Sigma\overline{Y} & 0 \\ 0 & 0 & n_Z & \Sigma\overline{Z} & -\Sigma\overline{X} \\ \Sigma\overline{X} & \Sigma\overline{Y} & \Sigma\overline{Z} & \Sigma(\overline{X}^2+\overline{Y}^2+\overline{Z}^2) & 0 \\ \Sigma\overline{Z} & 0 & -\Sigma\overline{X} & 0 & \Sigma(\overline{X}^2+\overline{Z}^2) \\ 0 & \Sigma\overline{Z} & -\Sigma\overline{Y} & 0 & \Sigma\overline{X}\overline{Y} \\ \Sigma\overline{Y} & -\Sigma\overline{X} & 0 & 0 & \Sigma\overline{Z}\overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Sigma\overline{Y} \\ \Sigma\overline{Z} & -\Sigma(\overline{X}) \\ -\Sigma\overline{Y} & 0 \\ 0 & 0 \\ \Sigma\overline{X}\overline{Y} & \Sigma\overline{Z}\overline{Y} \\ \Sigma(\overline{Y}^2+\overline{Z}^2) & -\Sigma\overline{X}\overline{Z} \\ -\Sigma\overline{X}\overline{Z} & \Sigma(\overline{X}^2+\overline{Y}^2) \end{bmatrix} \tag{2-116}$$

$$A^TL=\begin{bmatrix} \Sigma l_X \\ \Sigma l_Y \\ \Sigma l_Z \\ \Sigma(\overline{X}l_X+\overline{Y}l_Y+\overline{Z}l_Z) \\ \Sigma(\overline{X}l_Z-\overline{Z}l_Y) \\ \Sigma(\overline{Y}l_Z-\overline{Z}l_X) \\ \Sigma(\overline{X}l_Y-\overline{Y}l_X) \end{bmatrix} \tag{2-117}$$

由于我们采用了重心化的坐标，式（2-116）中的$\Sigma\overline{X}=\Sigma\overline{Y}=\Sigma\overline{Z}=0$，于是该式变为：

$$\begin{bmatrix} n_X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma(\overline{X}^2+\overline{Y}^2+\overline{Z}^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma(\overline{X}^2+\overline{Z}^2) & \Sigma\overline{X}\overline{Y} & \Sigma\overline{Z}\overline{Y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma\overline{X}\overline{Y} & \Sigma(\overline{Y}^2+\overline{Z}^2) & -\Sigma\overline{X}\overline{Z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma\overline{Z}\overline{Y} & -\Sigma\overline{X}\overline{Z} & \Sigma(\overline{X}^2+\overline{Y}^2) \end{bmatrix} \tag{2-118}$$

又由式（2-117）中的Σl_X，Σl_Y，Σl_Z可按式（2-115）表达成：

$$\begin{bmatrix} \Sigma l_X \\ \Sigma l_Y \\ \Sigma l_Z \end{bmatrix}=\Sigma\begin{bmatrix} X_{tp}-\Delta X \\ Y_{tp}-\Delta Y \\ Z_{tp}-\Delta Z \end{bmatrix}-\lambda R\Sigma\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}=\Sigma\begin{bmatrix} \overline{X}_{tp} \\ \overline{Y}_{tp} \\ \overline{Z}_{tp} \end{bmatrix}-\lambda R\Sigma\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}=0 \tag{2-119}$$

考虑到式（2-119），并以式（2-118）作为法方程的系数矩阵情况下可知，以重心化坐标解算相似变换的参数（或绝对定向的参数）时，七个参数中三个平移量为零，实际解算的是四个参数（$d\lambda$，$d\Phi$，$d\Omega$，dK），且其中$d\lambda$可单独求出。

待定参数的解求仍然是一个逐渐趋近过程，现将解算的具体过程归纳如下：

（1）待定参数初始值的假定，令$\Phi^0 = \Omega^0 = K^0 = 0$，$\lambda_0 = 1$，$\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$。

（2）计算地面摄测坐标系重心的坐标和重心化的坐标。

（3）计算空间辅助坐标系重心的坐标和重心化的坐标。

（4）计算常数项

$$\begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{X}_{tp} \\ \overline{Y}_{tp} \\ \overline{Z}_{tp} \end{bmatrix} - \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}$$

（5）计算误差方程式系数，按式（2-114）。

（6）逐点法化及法方程式求解。

（7）计算待定参数的新值

$$\lambda = \lambda_0 (1 + d\lambda), \quad \Phi = \Phi^0 + d\Phi$$

$$\Omega = \Omega^0 + d\Omega, \quad K = K^0 + dK$$

（8）检验$d\Phi$，$d\Omega$，dK是否均小于给定的限值ε，不小于，则重复步骤3～8，小于，则计算过程结束。

下面给出一个单元模型空间相似变换的算例。

已知四个平高控制点和若干个新点中一个点的模型坐标为：

模型坐标	23	24	50	51	45
X	0.303532	0.192638	0.303848	0.204120	0.246931m
Y	0.595068	0.602834	0.403493	0.434574	0.594227m
Z	0.034298	0.034116	0.026903	0.036672	0.034676m

绝对定向元素的初始近似值为：

$$\lambda^0 = 8069.095$$

$$\boldsymbol{R}^0 = \begin{pmatrix} -0.020505 & 0.999644 & -0.017057 \\ -0.999787 & -0.020462 & 0.002692 \\ 0.002342 & 0.017109 & 0.999851 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X^0 = 358571.389\text{m}$$

$$\Delta Y^0 = 63714.971\text{m}$$

$$\Delta Z^0 = 214.750\text{m}$$

按式（2-105），可求出四个平高控制点相似变换后的模型坐标及其重心点坐标：

变换后模型坐标	23	24	50	51	重心点
X	363316.398	363397.413	361772.077	362037.939	362630.957m
Y	61168.758	62062.095	61197.679	61997.302	61606.459m
Z	579.350	576.858	493.246	574.468	555.981m

而已知的四个平高控制点地面坐标及其重心点坐标为：

地面坐标	23	24	50	51	重心点
X_t	363321.65	363402.84	361776.75	362043.11	362636.088m
Y_t	61167.56	62061.10	61196.79	61996.72	61605.543m
Z_t	579.48	576.80	493.19	574.62	556.023m

现要解求（仅解算一次）：

（1）绝对定向元素的值

（2）单位权中误差

（3）新点的最终地面坐标

首先求出两个坐标系中点的重心化坐标：

点号	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$\overline{X_t}$	$\overline{Y_t}$	$\overline{Z_t}$	$\overline{X_t}-\overline{X}$	$\overline{Y_t}-\overline{Y}$	$\overline{Z_t}-\overline{Z}$
23	685.441	-437.701	23.369	685.562	-437.983	23.457	0.121	-0.282	0.088
24	766.456	455.636	20.877	766.752	455.557	20.777	0.296	-0.079	0.100
50	-858.880	-408.780	-62.735	-859.338	-408.753	-62.833	-0.458	0.027	-0.098
51	-593.018	390.843	18.487	-592.978	391.177	18.597	0.040	0.334	0.110

由式（2-118）可列出

$$\begin{aligned} 2151888.775d\Phi - 168522.767d\Omega - 32154.006dK &= 35.868 \\ 724305.078d\Omega - 74938.086dK &= 2.731 \\ 2865675.035dK &= -759.863 \end{aligned}$$

（转置对称项）

从中解出：

$$d\Phi = 0.0008\text{gon}$$

$$d\Omega = -0.0013\text{gon}$$

$$dK = -0.0169\text{gon}$$

$$d\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1.000000 & 0.000265 & 0.000013\\ -0.000265 & 1.000000 & 0.000021\\ -0.000013 & -0.000021 & 1.000000\end{bmatrix}$$

$$d\lambda=\frac{679.456+206.941+8.150}{2146629.366+719045.669+5259.409}=0.000312,$$

$$\lambda=(1+d\lambda)\lambda^0=8071.609.$$

$$\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^0=\begin{bmatrix}-0.020770 & 0.999639 & -0.017043\\ -0.999782 & -0.020727 & 0.002718\\ 0.002363 & 0.017096 & 0.999851\end{bmatrix},$$

平移量

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{t_1}\\ Y_{t_1}\\ Z_{t_1}\end{bmatrix}-\lambda\cdot\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}X_g\\ Y_g\\ Z_g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}358575.811\text{m}\\ 63715.788\text{m}\\ 214.699\text{m}\end{bmatrix}$$

再利用式（2-105）可将四个平高控制点和新点45变换到地面坐标系：

	23	24	50	51	45
X	363321.63	363402.91	361776.83	362042.99	363324.28
Y	61167.53	62061.12	61196.87	61996.67	61624.44
Z	579.40	576.89	493.29	574.52	581.26

四个平高控制点不符值

	23	24	50	51
V_X	2	-7	-8	12cm
V_Y	3	-2	8	5cm
V_Z	8	-9	-10	10cm

由此求得单位权中误差为：

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{V^TV}{n-u}}=\pm 11.9\text{cm},\quad(n=12,\ u=7)$$

换算到模型坐标比例尺

$$\hat{\sigma}_{0,M}=\hat{\sigma}_0/\lambda=\pm 0.015\text{mm}$$

像片比例尺分母$m_b=10.000$，故按像片比例尺

$$\hat{\sigma}_{0,b}=\frac{\hat{\sigma}_0}{m_b}=\pm 12\mu\text{m}$$

五、计算绝对定向元素初值的方法

线性化误差方程式求解的前提是要有较好的未知数初始值。对于单元模型的空间相似

变换，有时其近似值是可知的。如竖直摄影航空像片对，可设$\Phi^\circ=\Omega^\circ=0$，$K^\circ$可通过两个控制点实施坐标正反变换而获得，$\lambda^\circ$也可由控制点间线段长度与模型上同名线段长度之比求出。至于三个平移量的初值可利用重心化方法而解决。

但是，如果已知至少四个平高控制点，也可以用下述更一般方法来求解：

由式（2-105）可以写出含有12个未知参数的线性方程式：

$$\begin{bmatrix} X_{tp} \\ Y_{tp} \\ Z_{tp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \tag{2-120}$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\lambda \cdot \boldsymbol{R}$$

如果视$\boldsymbol{M}$矩阵九个元素为独立未知数而不考虑其间的内在联系，则式（2-120）有12个未知数，线性方程式为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{tp} \\ Y_{tp} \\ Z_{tp} \end{bmatrix} \tag{2-121}$$

若已知四个控制点，即可解出式（2-121）中12个未知数。

进而可求出

$$\lambda_i^0=\sqrt{m_{i1}^2+m_{i2}^2+m_{i3}^2},\quad i=1,\ 2,\ 3$$

$$\lambda^0=\frac{1}{3}\Sigma\lambda_i^0 \tag{2-122}$$

$$\boldsymbol{R}^0=\frac{1}{\lambda^0}\boldsymbol{M} \tag{2-123}$$

可以利用$\boldsymbol{R}$旋转矩阵元素应满足的六个条件来检核四个地面控制点有无错误。

用这种方法可以快速而较精确地求出七个未知数的初始值。

若多于四个控制点可以进行最小二乘法平差。

如果考虑到旋转矩阵特性，引入系数m_{ij}之间的约束条件（共五个），则采用未知数间带约束条件的间接观测平差，可以获得更严密的解。

§2.6 空间前方交会

由立体像对两片的内、外方位元素和观测的像点坐标来确定该点的物方坐标（地面测量坐标系坐标或某一暂定坐标系里的坐标），称做空间前方交会。这个问题，通过§2.4，§2.5的学习已经能够解决了。本节主要是从已知一立体像对左右两片的内、外方位元素（绝对或相对方位元素）出发来研究空间前方交会的数学模型和前方交会的精度。

一、利用投影系数的空间前方交会方法

（一）空间前方交会的一般公式

由§2.4中式（2-94）、（2-95）和图2-4-2已知，模型点相对于左方投影中心为原点的模型坐标为：

$$\begin{aligned} NX_1 &= B_X + N' X_2 \\ NY_1 &= B_Y - N' Y_2 \\ NZ_1 &= B_Z - N' Z_2 \end{aligned}$$

投影系数由（1）和（3）式求得：

$$N = \frac{B_X Z_2 - B_Z X_2}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1},$$

$$N' = \frac{B_X Z_1 - B_Z X_1}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1}$$

也可以由（1）和（2）式求之。

在相对定向中上式的运算都是由像点坐标x_1，y_1，x_2，y_2和相对定向元素来计算的。如果用左、右像片的外方位元素来计算。则

$$\left.\begin{aligned} B_X &= X_{S_2} - X_{S_1} \\ B_Y &= Y_{S_2} - Y_{S_1} \\ B_Z &= Z_{S_2} - Z_{S_1} \end{aligned}\right\} \tag{2-124}$$

由左、右片的外方位角元素φ_1，ω_1，κ_1和φ_2，ω_2，κ_2计算相应的正交矩阵$\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$，则

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix} \tag{2-125}$$

这时的N，N'表示将左像点和右像点投放到地面上的投影系数。

任一点的地面坐标（地面摄测坐标）可由下式求得：

$$\left.\begin{aligned} X &= X_{S_1} + NX_1 = X_{S_1} + B_X + N' X_2 \\ Y &= Y_{S_1} + NY_1 = Y_{S_1} + B_Y + N' Y_2 = Y_{S_1} + \frac{1}{2}(NY_1 + N' Y_2 + B_Y) \\ Z &= Z_{S_1} + NZ_1 = Z_{S_1} + B_Z + N' Z_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-126}$$

（二）一对水平像片的前方交会公式

一对水平像片是指这样的一对像片：左、右像片的$\varphi=\omega=\kappa=0$，右摄站相对于左摄站的的基线分量$B_Y\neq 0$，$B_Z\neq 0$。

这时，式（2-125）变为

$$\begin{bmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\-f\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\-f\end{bmatrix} \tag{2-127}$$

N和N'变为

$$N=\frac{B_X+B_Z\frac{x_2}{f}}{x_1-x_2},\quad N'=\frac{B_X+B_Z\frac{x_1}{f}}{x_1-x_2} \tag{2-128}$$

将公式（2-127），（2-128）代入式（2-126），即可求得任一点的地面坐标。

（三）理想像片对的前方交会公式

理想像片对是指两张像片的$\varphi=\omega=\kappa=0$，同时$B_Y=B_Z=0$的立体像对。

公式（2-128）变为

$$N=\frac{B_X}{x_1-x_2},\quad N'=\frac{B_X}{x_1-x_2} \tag{2-129}$$

因为是理想像片对，所以

$$p^0=x_1-x_2$$

任一点的地面坐标为：

$$\left.\begin{aligned}X&=X_{S_1}+\frac{B}{p^0}x_1=X_{S_1}+B_X+\frac{B}{p^0}x_2\\Y&=Y_{S_1}+\frac{B}{p^0}y_1=Y_{S_1}+\frac{B}{p^0}y_2\\Z&=Z_{S_1}-\frac{B}{p^0}f=Z_{S_1}-\frac{B}{p^0}f\end{aligned}\right\} \tag{2-130}$$

由此可导出理想像对的高差公式

$$h=Z_t-Z_0=H_0\cdot\frac{\Delta P}{P_0+\Delta p} \tag{2-130a}$$

式中，H_0为相对于起始面的航高。该式在基础摄影测量中已多次使用。

（四）定向元素对模型点坐标的影响

这里讨论的是相对定向元素和绝对定向元素对模型点坐标的影响。

1.相对定向元素对模型点坐标的影响

这里假定相对定向后模型点的坐标用U，V，W表示，则由式（2-94）可得：

$$\left.\begin{aligned}U&=NX_1\approx Nx_1\\V&=NY_1\approx Ny_1\\W&=NZ_1\approx -fN\end{aligned}\right\} \tag{2-131}$$

上式中N为相对定向元素的函数，相对定向误差对模型点的影响可表示为：

$$dU = x_1 dN,\quad dV = y_1 dN,\quad dW = -fdN \tag{2-132}$$

下面我们来推演dN，已知

$$N = \frac{Z_2 B_X - X_2 B_Z}{X_1 Z_2 - Z_1 X_2},\quad \begin{bmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d\kappa_2 & -d\varphi_2 \\ d\kappa_2 & 0 & -d\omega_2 \\ d\varphi_2 & d\omega_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix} \tag{2-133}$$

在保留到小值一次项的情况下：

$$dN = \frac{B_X dZ_2 - dB_Z X_2}{X_1 Z_2 - Z_1 X_2} - \frac{Z_2 B_X}{(X_1 Z_2 - Z_1 X_2)^2}(X_1 dZ_2 - Z_1 dX_2)$$

$$= \frac{N}{Z_2 B_X}[B_X(x_2 d\varphi_2 + y_2 d\omega_2) - y_2 dB_Z] - \frac{N^2}{Z_Z B_X}[X_1(x_2 d\varphi_2 + y_2 d\omega_2) - Z_1(-y_2 d\kappa_2 + f d\varphi_2)]$$

以后用$X_1 \approx x_1$，$Y_1 \approx y_1 \approx y_2$，$Z_1 \approx Z_2 \approx -f$，$X_2 = x_2 = x_1 - b$代入上式，并将各直线长度均以像片比例尺中数据表达，则有：

$$dN = \frac{N}{b}\left\{\frac{(x_1 - b)}{f} db_z + \left(f + \frac{(x_1 - b)^2}{f}\right) d\varphi_2 + \frac{(x_1 - b)y_1}{f} d\omega_2 - y_1 d\kappa_2\right\} \tag{2-134}$$

式中x_1，y_1表示左像点的像平面坐标，b为像片基线，将上式代入式（2-132）中，得到：

$$\left.\begin{aligned} dU = x_1 dN &= N\frac{x_1}{b}\left\{\frac{x_1 - b}{f} db_z + \left(f + \frac{(x_1 - b)^2}{f}\right) d\varphi_2 + \frac{(x_1 - b)y_1}{f} d\omega_2 - y_1 d\kappa_2\right\} \\ dV = y_1 dN &= N\frac{y_1}{b}\left\{\frac{x_1 - b}{f} db_z + \left(f + \frac{(x_1 - b)^2}{f}\right) d\varphi_2 + \frac{(x_1 - b)y_1}{f} d\omega_2 - y_1 d\kappa_2\right\} \\ dW = -fdN &= -N\frac{f}{b}\left\{\frac{x_1 - b}{f} db_z + \left(f + \frac{(x_1 - b)^2}{f}\right) d\varphi_2 + \frac{(x_1 - b)y_1}{f} d\omega_2 - y_1 d\kappa_2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2-135}$$

2.绝对定向元素对模型点坐标的影响

绝对定向元素对模型点坐标的影响，其平面和高程部分分别讨论。对模型高程的影响主要是三个参数ΔZ、Ω、Φ，而比例系数λ的误差只引起整个模型的缩放，不影响高程精度，故不考虑λ的因素。

由式（2-109）的第三式可知：

$$v_Z = d\Delta Z + X' d\Phi + Y' d\Omega + Z' d\lambda - l_Z$$

由于绝对定向元素ΔZ，Φ，Ω的误差$d\Delta Z$，$d\Phi$，$d\Omega$对模型点高程的影响可以表示成：

$$dZ = d\Delta Z + X' d\Phi + Y' d\Omega \tag{2-136}$$

对模型点平面坐标的影响主要是四个参数ΔX，ΔY，λ，K的误差$d\Delta X$，$d\Delta Y$，$d\lambda$，dK。

由式（2-109）的第一，二式可知：

$$v_X = d\Delta X + X' d\lambda - Y' dK - l_X$$

$$v_Y = d\Delta Y + Y' d\lambda + X' dK - l_Y$$

因此产生的模型点的平面误差为

$$\left.\begin{aligned} dX &= d\Delta X + X' d\lambda - Y' dK \\ dY &= d\Delta Y + Y' d\lambda + X' dK \end{aligned}\right\} \tag{2-137}$$

上式中没有考虑$d\Phi$，$d\Omega$引起的平面误差，这是因为这些误差较小的缘故。

公式（2-136）、（2-137）便是研究绝对定向元素对模型点坐标影响的基本公式。

现在研究模型高程影响：主要考虑两种因素的影响，一是量测误差；二是相对定向和绝对定向的综合影响。

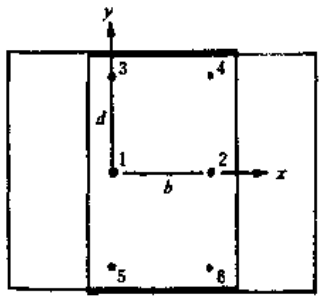


图 2-6-1

（1）高程量测误差的影响：

假设图2-6-1中3，5，2三点为已知点，其高程误差分别为：Δz_3，Δz_5，Δz_2。它们的平面坐标为：（按像片比例尺）

$$x_3 = 0\ ,\quad x_5 = 0\ ,\quad x_2 = 6$$

$$y_3 = d\ ,\quad y_5 = -d, y_2 = 0$$

代入式（2-136）中

$$-dZ_3 = d\Delta Z + d \cdot d\Omega$$

$$-dZ_5 = d\Delta Z - d \cdot d\Omega$$

$$-dZ_2 = d\Delta Z + b \cdot d\Phi$$

求得改正数为：

$$\left.\begin{aligned} d\Delta Z &= -\frac{1}{2}(dZ_3 + dZ_5) \\ d\Phi &= -\frac{2dZ_2 - dZ_3 - dZ_5}{2b} \\ d\Omega &= -\frac{1}{2d}(dZ_3 - dZ_5) \end{aligned}\right\} \tag{2-138}$$

相应的权倒数为：

$$\left.\begin{aligned} Q_{\Delta Z\Delta Z} &= \frac{1}{2}, & Q_{\Phi\Phi} &= \frac{3}{2b^2} \\ Q_{\Omega\Omega} &= \frac{1}{2d^2}, & Q_{\Delta Z\Omega} &= -\frac{1}{2b} \end{aligned}\right\} \tag{2-139}$$

由式（2-136）可得：

$$Q_{ZZ} = Q_{\Delta Z\Delta Z} + x^2 Q_{\Phi\Phi} + y^2 Q_{\Omega\Omega} + 2xQ_{\Delta Z\Phi} \tag{2-140}$$

将式（2-139）代入式（2-140）中，得：

$$Q_{ZZ} = \frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{2d^2} - \frac{x}{b} \tag{2-141}$$

顾及三个参数的改正数$d\Delta Z$，$d\Phi$，$d\Omega$的影响以后，任一点的最后高程应为：

$$Z = (Z) + dZ \tag{2-142}$$

式中（Z）为量测值，dZ为由式（2-136）求得的改正数。

假设高程观测值中误差为μ_Z(归化至像片比例尺中)，则由式（2-141）、(2-142）求得最后高程的中误差为

$$m_Z^2 = \mu_Z^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2b} + \frac{y^2}{2d^2} - \frac{x}{b}\right)\mu_Z^2$$

$$m_Z = \mu_Z\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{3x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{2d^2} - \frac{x}{b}} \tag{2-143}$$

（2）相对定向误差对高程的影响：

模型的绝对定向是在相对定向的基础上进行的，所以就模型的高程而言，除了考虑其高程的量测误差之外，还应考虑相对定向误差的影响。

相对定向误差对高程的影响，在绝对定向中用绝对定向元素加以改正，因此，式（2-135）中第三式dW和式（2-136）中dZ的总和应为零。(因为这里讨论的问题都已归化至像片比例尺，所以式（2-135）中的N不再出现)，即

$$\underbrace{\left(-\frac{(x_1-b)}{b}db_z - \frac{f^2+(x_1-b)^2}{b}d\varphi_2 - \frac{(x_1-b)y_1}{b}d\omega_2 + \frac{f}{b}y_1 dK_2\right)}_{\text{相对定向元素误差的影响}}$$

$$\underbrace{+(d\Delta Z' + x_1 d\Phi' + y_1 d\Omega') = 0}_{\text{绝对定向的补偿}} \tag{2-144}$$

这里引用ΔZ，$d\Omega$，$d\Phi$带有“撇”的符号，是表示补偿相对定向误差引入绝对定向的改正量。

对图2-6-1中3，5，2点而言，由式（2-144)可得到：

$$\left.\begin{aligned}
db_z - \frac{f^2+b^2}{b}d\varphi_2 + d\cdot d\omega_2 + \frac{f\cdot d}{b}dK_2 + d\Delta Z' + d\Omega' &= 0\\
db_z - \frac{f^2+b^2}{b}d\varphi_2 - d\cdot d\omega_2 - \frac{f\cdot d}{b}dK_2 + d\Delta Z' - d\Omega' &= 0\\
-\frac{f^2}{b}d\varphi_2 + d\Delta Z' + bd\Phi &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2-145}$$

由上式求得：

$$\left.\begin{aligned} \Delta Z' &= -db_z + \frac{f^2+b^2}{b}d\varphi_2 \\ d\Phi' &= \frac{db_z}{b} - d\varphi_2 \\ d\Omega' &= -\frac{f}{b}d\kappa_2 - d\omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-146}$$

式（2-146）中db_z，$d\varphi_2$，$d\omega_2$，$d\kappa_2$认为是已知的。

将式（2-146）代入式（2-144）中可以求得任一点上经绝对定向补偿以后剩余的相对定定向误差的影响为：

$$dZ' = -\frac{(x_1-b)}{b}db_z - \frac{f^2+(x_1-b)^2}{b}d\varphi_2 - \frac{(x_1-b)y_1}{b}d\omega_2$$
$$+\frac{f}{b}y_1 d\kappa_2 + d\Delta Z' + x_1 d\Phi' + y_1 d\Omega'$$

经整理得到：

$$dZ' = -\frac{x_1}{b}(x_1-b)d\varphi_2 - \frac{x_1 y_1}{b}d\omega_2 \tag{2-147}$$

其权倒数为：

$$Q_{Z'Z'} = \frac{x_1^2(x_1-b)^2}{b^2}Q_{\varphi_2\varphi_2} + \frac{x_1^2 y_1^2}{b^2}Q_{\omega_2\omega_2} + \frac{2x_1^2(x_1-b)y_1}{b^2}Q_{\varphi_2\omega_2} \tag{2-148}$$

若相对定向采用六点定向，则

$$m_Z' = m_0\sqrt{Q_{Z'Z'}} = \frac{x_1 f}{bd}m_q\sqrt{\frac{(x_1-b)^2}{b^2}+\frac{3y_1^2}{4d^2}} \tag{2-149}$$

在式（2-147）至（2-149）中x_1表示左像点的坐标。

根据式（2-143）和式（2-149）可以求得高程中误差的最后值：

$$M_Z = \sqrt{m_Z^2 + m_Z'^2} \tag{2-150}$$

下面讨论模型平面位置的影响：类似地，主要考虑量测误差和相对定向误差的影响。

（1）平面坐标量测误差的影响

假定采用图2-6-1中控制点1，2解求绝对定向元素中另四个参数ΔX，ΔY，$d\lambda$，$d\kappa$。那么在点1，2上的量测误差必然影响模型点点位的精度。将点1，2的坐标（按像片比例尺）代入式（2-137）中，并用dX_1，dY_1，dX_2，dY_2表示在点1和2处出现的平面坐标误差，则

$$\begin{aligned} -d\overline{X}_1 &= d\Delta X \\ -d\overline{Y}_1 &= \quad d\Delta Y \\ -dX_2 &= d\Delta X \quad + bd\lambda \\ -dY_2 &= \quad d\Delta Y \quad + bd\kappa \end{aligned}$$

以上联立求解，得到绝对定向元素的改正数：

$$\left.\begin{aligned} d\Delta X &= -dX_1 \\ d\Delta Y &= -dY_1 \\ d\lambda &= \frac{1}{b}(dX_1 - dX_2) \\ dK &= \frac{1}{b}(dY_1 - dY_2) \end{aligned}\right\} \tag{2-151}$$

对于任意模型点平面坐标的改正数为：

$$\left.\begin{aligned} dX &= d\Delta X + x d\lambda - y dK = -dX_1 + \frac{x(dX_1 - dX_2)}{b} - \frac{y(dY_1 - dY_2)}{b} \\ dY &= d\Delta Y + y d\lambda + x dK = -dY_1 + \frac{y(dX_1 - dX_2)}{b} + \frac{x(dY_1 - dY_2)}{b} \end{aligned}\right\} \tag{2-151a}$$

相应的权倒数为：

$$\left.\begin{aligned} Q_{XX} &= 1 + \frac{2x^2}{b^2} + \frac{2y^2}{b^2} - \frac{2x}{b} \\ Q_{YY} &= 1 + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2x^2}{b^2} - \frac{2y}{b} \end{aligned}\right\} \tag{2-152}$$

经绝对定向后，模型点的平面坐标为

$$\left.\begin{aligned} X &= (X) + dX \\ Y &= (Y) + dY \end{aligned}\right\} \tag{2-153}$$

式中（X），（Y）为量测值，dX，dY为用式（2-151a）求得的改正数。假设模型点（X），（Y）量测精度相等为m_0，则由量测误差引起的平面坐标精度为：

$$m_X^2 = m_0^2 + \left(1 + \frac{2x^2}{b^2} + \frac{2y^2}{b^2} - \frac{2x}{b}\right) m_0^2$$

$$m_Y^2 = m_0^2 + \left(1 + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2x^2}{b^2} - \frac{2x}{b}\right) m_0^2$$

则

$$m_X = m_Y = m_0\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x}{b}} \tag{2-154}$$

（2）相对定向误差对平面坐标的影响

在平面控制点处相对定向的误差在绝对定向中得到补偿。由式（2-135）和式（2-137）可得以下关系式：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_1(x_1 - b)}{bf} db_z + \frac{x_1}{b}\left(\frac{f^2 + (x_1 - b)^2}{f}\right) d\varphi_2 + \frac{x_1(x_1 - b)y_1}{bf} d\omega_2 \\ &\quad - \frac{x_1 y_1}{b} d\kappa_2 + d\Delta X + x_1 d\lambda - y_1 dK = 0 \\ &\frac{y_1(x_1 - b)}{bf} db_z + \frac{y_1}{b}\left(f + \frac{(x_1 - b)^2}{f}\right) d\varphi_2 + \frac{y_1^2(x_1 - b)}{bf} d\omega_2 \\ &\quad - \frac{y_1^2}{b} d\kappa_2 + d\Delta Y + y_1 d\lambda + x_1 dK = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-155}$$

与模型点高程误差的分析一样，把1，2点的坐标代入上式后，求得$d\Delta X$，$d\Delta Y$，$d\lambda$，dK。将它代入式（2-155）中，求得任一模型点经绝对定向以后，相对定向元素误差影响所产生的平面坐标的改正数dX'，dY'，以及相应的权倒数$Q_{X'X'}$，$Q_{Y'Y'}$。

最后可以求得平面坐标的精度M_X，M_Y。详细推导过程参见王之卓编《摄影测量原理》，这里不再一一列出。

二、利用共线方程的严格解法

共线方程决定了投影中心点、像点和物点间严格的关系，其线性化方程式是以像点坐标为观测值，表达成内、外方位元素和物点坐标改正数的函数〔式（2-31a）〕。

对于空间前方交会的情况，内、外方位元素已知，地面点坐标为未知待求。因此可以对每一片某像点写出：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -a_{11}\Delta X + (-a_{12})\Delta Y - a_{13}\Delta Z - [x-(x)] \\ v_y &= -a_{21}\Delta X - a_{22}\Delta Y - a_{23}\Delta Z - [y-(y)] \end{aligned}\right\} \tag{2-156}$$

对于竖直摄影像片有：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{f}{H}\Delta X + \frac{x}{H}\Delta Z - [x \quad (x)] \\ v_y &= \frac{f}{H}\Delta Y + \frac{y}{H}\Delta Z - [y-(y)] \end{aligned}\right\} \tag{2-157}$$

此时，需利用待求点的初始值X°，Y°，Z°以计算常数项。

若该点出现在两片上，则可列出上面的方程式共4个，未知数为3，故可以用最小二乘平差解求。若多片交会一个地面点，则可由总共$2n$个方程式（n为片数）解求ΔX，ΔY，ΔZ三个未知数。

这是一种严格的、不受片数约束的空间前方交会方法。其缺点是必须要提供地面点坐标的初始值，并需反复迭代计算。

§2.7 双像解析摄影测量

本节利用前面已经学习过的单片后方交会、相对定向、绝对定向、空间前方交会的理论和方法来解决单元模型中待定点坐标的确定问题（又称待定点的加密），这些属于双像解析摄影测量研究的内容。下面分别介绍确定待定点坐标的几种方法：

一、后交一前交解法

这种方法首先由单片后方交会求出左、右像片的外方位元素，再用空间前方交会公式求出待定点坐标，即利用以下的误差方程式：

$$v_x = a_{11}\Delta X_S + a_{12}\Delta Y_S + a_{13}\Delta Z_S + a_{14}\Delta\varphi + a_{15}\Delta\omega + a_{16}\Delta\kappa - l_x$$

$$v_y = a_{21}\Delta X_S + a_{22}\Delta Y_S + a_{23}\Delta Z_S + a_{24}\Delta\varphi + a_{25}\Delta\omega + a_{26}\Delta\kappa - l_y$$

和公式（2-37），由至少三个平高控制点求得像片的外方位元素X_S，Y_S，Z_S，φ，ω，κ。

再由前方交会公式求得任一待定点的坐标：

$$\left.\begin{aligned} X &= X_{S_1} + NX_1 \\ Y &= Y_{S_1} + \frac{1}{2}(NY_1 + N'Y_2 + B_Y) \\ Z &= Z_{S_1} + NZ_1 \end{aligned}\right\} \tag{2-158}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{左} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{右} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix} \\ N = \frac{B_X Z_2 - B_Z X_2}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1},\quad & N' = \frac{B_X Z_1 - B_Z X_1}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1} \end{aligned}\right\} \tag{2-159}$$

二、相对定向一绝对定向解法

这种方法先通过解求立体像对的相对定向元素，即由下式

$$v = ad\varphi + bd\omega + cd\kappa + rd\mu + sdv - l$$

其中系数a，b … s由公式（2-98）计算，求得相对定向元素$d\varphi$，$d\omega$，$d\kappa$，$d\mu$，dv以后，可以得到任一模型点的空间辅助坐标NX_1，NY_1，NZ_1。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \quad \text{（连续像对相对定向）}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{左} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{bmatrix} \quad \text{（单独像对相对定向）}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{右} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -f \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{B_X Z_2 - B_Z X_2}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1},\quad N' = \frac{B_X Z_1 - B_Z X_1}{X_1 Z_2 - X_2 Z_1}$$

其中

$$B_Z = B_X \cdot v,\quad B_Y = B_X \cdot \mu$$

求得模型点的空间辅助坐标以后，利用至少两个平高控制点和一个高程控制点进行单元模型的绝对定向，由下式

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \overline{X} & -\overline{Z} & 0 & -\overline{Y} \\ 0 & 1 & 0 & \overline{Y} & 0 & -\overline{Z} & \overline{X} \\ 0 & 0 & 1 & \overline{Z} & \overline{X} & \overline{Y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\lambda \\ d\Phi \\ d\Omega \\ dK \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{tp} \\ Y_{tp} \\ Z_{tp} \end{bmatrix} - \lambda R \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

求得七个绝对定向元素ΔX，ΔY，ΔZ，λ，Φ，Ω，K以后，由空间相似变换公式求得任一点的地面摄测坐标X_{tp}，Y_{tp}，Z_{tp}。

$$\begin{bmatrix} X_{tp} \\ Y_{tp} \\ Z_{tp} \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

其中矩阵R由绝对定向元素的Φ、Ω、K来计算。

最后再把地面摄测坐标变换为地面测量坐标。

三、立体像片对的光束法严密解法（一步定向法）

这种解求方法无需经过相对定向和绝对定向两个阶段，也不要先分别求出两张像片的外方位元素，然后再作前方交会，而是把方位元素和模型点坐标的计算放在一个整体内进行。

仍由共线方程

$$x = -f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}$$

$$y = -f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}$$

上式在线性化过程中与单片空间后方交会问题不同之处，是把模型点坐标X，Y，Z作为未知数，与其它未知参数一道求它们的偏导数，这时一般的误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= a_{11}\Delta X_S + a_{12}\Delta Y_S + a_{13}\Delta Z_S + a_{14}\Delta\varphi + a_{15}\Delta\omega \\ &\quad + a_{16}\Delta\kappa - a_{11}\Delta X - a_{12}\Delta Y - a_{13}\Delta Z - l_x \\ v_y &= a_{21}\Delta X_S + a_{22}\Delta Y_S + a_{23}\Delta Z_S + a_{24}\Delta\varphi + a_{25}\Delta\omega \\ &\quad + a_{26}\Delta\kappa - a_{21}\Delta X - a_{22}\Delta Y - a_{23}\Delta Z - l_y \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}160)$$

设右片的外方位元素以带“撇”的符号表示，对于一个立体像对中任一点可以列出两组像式（2-160）的误差方程式：

$$
\left.\begin{aligned}
v_x &= a_{11}\Delta X_S + a_{12}\Delta Y_S + a_{13}\Delta Z_S + a_{14}\Delta\varphi + a_{15}\Delta\omega \\
&\quad + a_{16}\Delta\kappa - a_{11}\Delta X - a_{12}\Delta Y - a_{13}\Delta Z - l_x \\
v_y &= a_{21}\Delta X_S + a_{22}\Delta Y_S + a_{23}\Delta Z_S + a_{24}\Delta\varphi + a_{25}\Delta\omega \\
&\quad + a_{26}\Delta\kappa - a_{21}\Delta X - a_{22}\Delta Y - a_{23}\Delta Z - l_y \\
v_{x'} &= a'_{11}\Delta X'_S + a'_{12}\Delta Y'_S + a'_{13}\Delta Z'_S + a'_{14}\Delta\varphi' + a'_{15}\Delta\omega' \\
&\quad + a'_{16}\Delta\kappa' - a'_{11}\Delta X - a'_{12}\Delta Y - a'_{13}\Delta Z - l'_x \\
v_{y'} &= a'_{21}\Delta X'_S + a'_{22}\Delta Y'_S + a'_{23}\Delta Z'_S + a'_{24}\Delta\varphi' + a'_{25}\Delta\omega' \\
&\quad + a'_{26}\Delta\kappa' - a'_{21}\Delta X - a'_{22}\Delta Y - a'_{23}\Delta Z - l'_y
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}161)
$$

对于控制点而言，上式中$\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$。这种解法含有左、右两张像片的十二个外方位元素，一个模型点可以列出四个误差方程式，同时引入三个未知数。至少需要两个平高控制点和另一高程控制点，才能确定平差的基准。设在一个立体像对中含有四个平高控制点，n 个待定点，则需解求（$12+3n$）个未知数，而误差方程式个数为（$16+4n$）。

将式（2-161）写成矩阵的形式：

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} A_1 & 0 & & B_1 \\ & & & \\ 0 & A_2 & & B_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ \\ L_2 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}162)
$$

式中：

v_1 为由左像点列出的误差方程式组；

v_2 为由右像点列出的误差方程式组；

t_1 为由左像片外方位元素组成的列矩阵；

t_2 为由右像片外方位元素组成的列矩阵；

X 为该模型中全部待定点坐标改正数组成的列矩阵；

L_1 为v_1相应的误差方程式的常数项；

L_2 为与v_2相应的误差方程式的常数项。

$$
A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix},
$$

$$
A_2 = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} & a'_{16} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & a'_{26} \end{bmatrix},\quad B_2 = \begin{bmatrix} -a'_{11} & -a'_{12} & -a'_{13} \\ -a'_{21} & -a'_{22} & -a'_{23} \end{bmatrix}
$$

式（2-162）还可以表示成更紧凑的形式：

$$
V = \left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right] \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} - L \qquad (2\text{-}163)
$$

对于控制点，$X = 0$。

相应的法方程式为：

$$
\begin{bmatrix} A^T A & A^T B \\ B^T A & B^T B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T L \\ B^T L \end{bmatrix},\ \text{或} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}164)
$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A^TA &= \begin{bmatrix} A_1^TA_1 & 0 \\ 0 & A_2^TA_2 \end{bmatrix}, & B^TB &= [B_1^TB_1 + B_2^TB_2] \\ A^TB &= \begin{bmatrix} A_1^TB_1 \\ A_2^TB_2 \end{bmatrix}, & B^TA &= [B_1^TA_1 \quad B_2^TA_2] \\ A^TL &= \begin{bmatrix} A_1^TL_1 \\ A_2^TL_2 \end{bmatrix}, & B^TL &= [B_1^TL_1 + B_2^TL_2] \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}165)$$

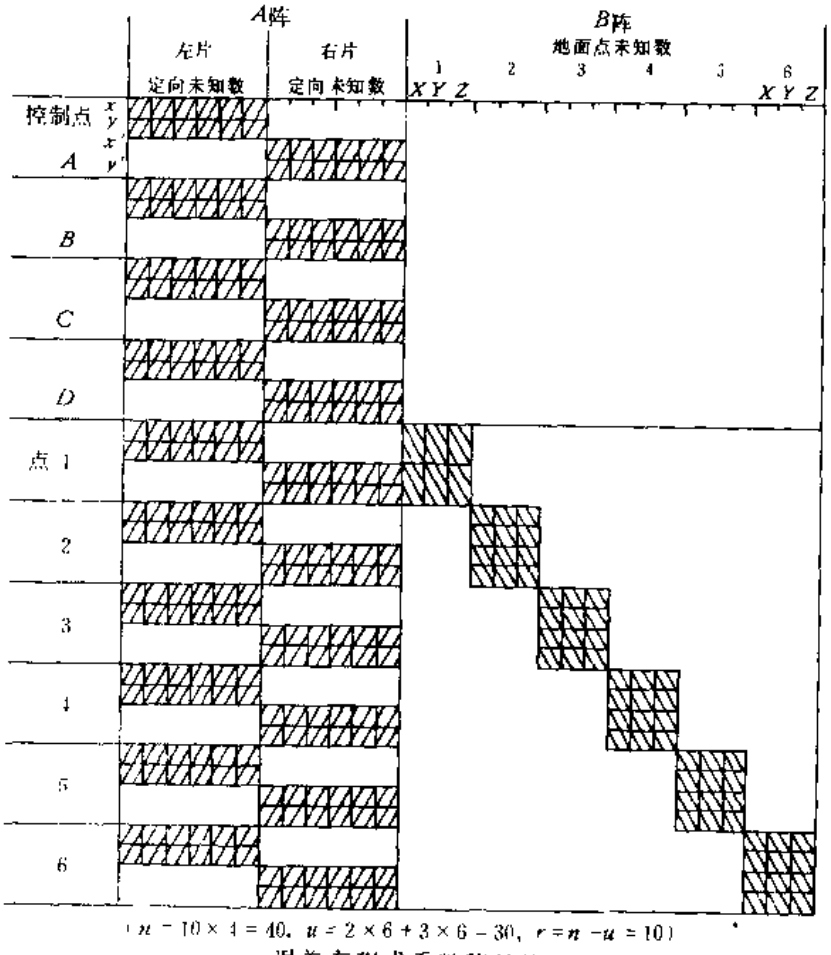
法方程式（2-164）消去一组未知数，可得改化法方程式：

$$(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^T)t = (u_1 - N_{12}N_{22}^{-1}U_2) \qquad (2\text{-}166)$$

$$(N_{22} - N_{12}^TN_{11}^{-1}N_{12})X = (u_2 - N_{12}^TN_{11}^{-1}u_1) \qquad (2\text{-}167)$$

由式（2-166）求得左、右两张像片的外方位元素，由式（2-167）求得的X为立体像对中全部待定点的坐标改正数。

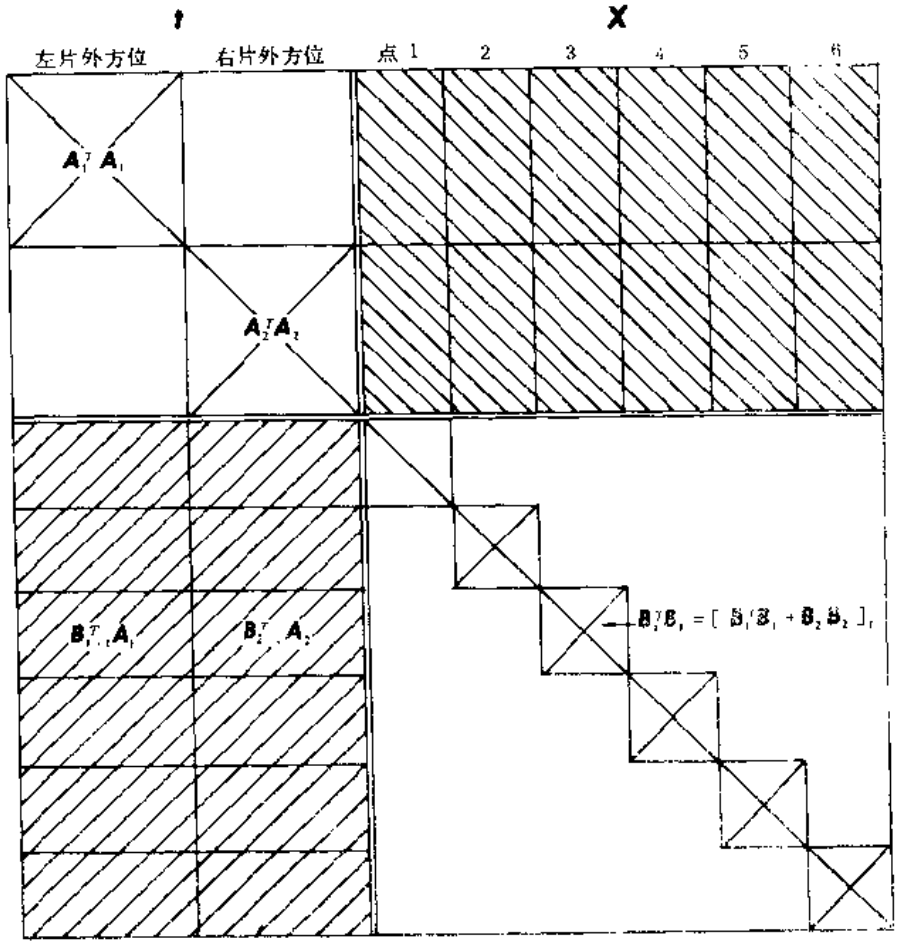
下面以一具有四个平高控制点和六个待求点的立体像对为例，用图解方法给出误差方程式和法方程系数矩阵结构图（图2-6-2，2-6-3）。



（$n = 10 \times 4 = 40$，$u = 2 \times 6 + 3 \times 6 = 30$，$r = n - u = 10$）

误差方程式系数阵结构

图 2 6-2



法方程式系数矩阵

图 2 6-3

四．三种解法的比较

前面介绍了双像解析摄影测量的三种解算方法：后交—前方解法；相对定向—绝对定向解法；一次定向解法。以第三种方法的理论严密，精度最高，待定点的坐标是完全按最小二乘法原理解求出来的。第一种方法前交的结果依赖空间后方交会的精度，前交过程中没有充分利用多余条件进行平差计算。第二种方法计算公式比较多，最后的点位精度决定于相对定向和绝对定向的精度，用这种方法的结果不能严格表达一张像片的外方位元素。

在今后，第一种方法往往在这种场合使用：当已知像片的外方位元素，需确定少量的待定点坐标时采用这种方法。第二种方法往往在航带法解析空中三角测量中应用。第三种方法在光线束法解析空中三角测量中应用。三种方法均可在机助和机控摄影测量系统中应用。

五、测图仪器安置元素的计算

（一）模拟立体测图仪上的安置元素

立体测图仪测图时，可以利用前面求得的像片外方位元素，计算仪器上基线分量的安置值：

$$\left.\begin{aligned} B_X &= \frac{X_{S_{i+1}} - X_{S_i}}{M} \\ B_Y &= \frac{Y_{S_{i+1}} - Y_{S_i}}{M} \\ B_Z &= \frac{Z_{S_{i+1}} - Z_{S_i}}{M} \end{aligned}\right\} \tag{2-168}$$

式中：M为模型比例尺的分母；

φ，ω，可以在顾及零位置后，直接安置之。由旋转矩阵$\boldsymbol{R}$求φ和ω时要视测图仪转角系统的不同而取用不同的公式（2-14）或（2-15）。

对于没有基线分量安置的立体测图仪，其基线安置值为

$$B = \sqrt{B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2} \tag{2-169}$$

这时的角元素应用ω'-φ'-κ'转角系统的数值。只要将原来的由φ，ω，κ求得的正交矩阵$\boldsymbol{R}$再经过一次$\boldsymbol{R}_u$的变换即可，则

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}_u \boldsymbol{R} \tag{2-130}$$

用$\boldsymbol{R}'$中方向余弦计算出这时所需的φ'，ω'的安置值。

若测图仪具有公共纵向倾角Φ的安置结构，它的数值为：

$$\Phi = y \tag{2-171}$$

以上这些数值的安置仅仅为工作带来方便，通常并不能完全取代立体测图仪上的相对定向和绝对定向的作业过程。

（二）分工法测图仪的安置元素

1.立体量测仪各改正机件安置值

$$\left.\begin{aligned} \Delta F &= F\left(\frac{2P_0}{f}\varphi_1 - \frac{\Delta H}{H_0}\right) \\ \beta &= \frac{F}{f}\Delta\varphi \\ \theta &= \frac{86}{f}\Delta\omega \\ P_T' &= P_T\left(1 - \frac{\Delta F}{F}\right) \\ \Delta P_2' &= \frac{h_i}{H_i}P_T' \end{aligned}\right\} \tag{2-172}$$

2.单投影仪安置元素

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\varphi=\frac{f'}{f}\sin\alpha,\quad k=\frac{f'}{f}\\
&Z_{P_A}=k\cdot\frac{H_A}{M}\\
&2e=f\cdot\alpha(k^2-1)\\
&\Delta Z_{P_A}=Z_{P_A}\cdot\frac{Q}{H_A}\\
&Q=0.0008\frac{f\cdot M}{r}\quad(\mathrm{m})
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}173)$$

还要计算图底上投影差

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta R_i=\frac{h_i}{H_i}R_i\\
&R_i=\frac{1000}{M}\sqrt{\Delta X_i^2+\Delta Y_i^2}\\
&\Delta X_i=X_i-X_S\\
&\Delta Y_i=Y_i-Y_S\\
&H_i=Z_S-Z_i
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}174)$$

其中要用到外方位元素X_S，Y_S，Z_S和像片倾角a，α由式（2-16）计算。

（三）纠正仪上的安置元素

先由式（2-16）求出α、K_V和A，进而可视不同类型纠正仪计算其安置元素，以复倾斜仪器为例：

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\varphi_E=\frac{F}{f}\sin\alpha\\
&\sin\varphi_P=\frac{FM}{H}\sin\alpha\\
&V=\frac{\mathrm{tg}\varphi_E}{\mathrm{tg}\varphi_P}\approx\frac{m}{M}\\
&D=F(1+V)\\
&\mathrm{tg}\varphi_{E_x}\approx\mathrm{tg}\varphi_E\cdot\sin K_V\\
&\mathrm{tg}\varphi_{E_y}\approx\mathrm{tg}\varphi_E\cdot\cos K_V\\
&e_X=\frac{F}{2}\left(\frac{f^2}{F^2}-1+\frac{1}{V^2}\right)\mathrm{tg}\varphi_{E_x}\\
&e_Y=\frac{F}{2}\left(\frac{f^2}{F^2}-1+\frac{1}{V^2}\right)\mathrm{tg}\varphi_{E_y}
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}175)$$

式中各符号含义详见《基础摄影测量》有关章节。

本章习题与思考题

1.试说明像平面坐标系、像空间坐标系、像空间辅助坐标系、摄影测量坐标系和地面测量坐标系的定义。

2.如何进行上述各坐标系之间的转换?

3.旋转矩阵R中有几个独立元素?通常在摄影测量中有哪几种表示旋转矩阵的方法?

4.$\varphi-\omega-\kappa$转角系统与$\varphi'-\omega'-\kappa'$转角系统中角元素存在怎样的关系?

5.什么是共线条件方程式?试导出其数学表达式,并说明它在解析摄影测量中有哪些应用?

6.什么叫单像空间后方交会?其观测值和未知数是什么?至少需要多少地面控制点?为什么?

7.单像空间后方交会有哪几种主要的解法?各有什么特点?

8.如何估计单像空间后方交会的精度?

9.利用共线方程来解求空间后方交会,为什么要引入线性化误差方程式?如何导出其表达式?

10.试导出空间后方交会中误差方程式系数$a_{25}=\dfrac{\partial y}{\partial \omega}$?

11.什么是空间后方交会的不定性?什么情况下会产生不定性?实践中应如何避免?

12.在平坦地区能否用单像后方交会同时解求内、外方位元素未知数?为什么?

13.已知四对点的像片坐标和地面坐标:

	像片坐标		地面坐标		
	x(mm)	y(mm)	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	-86.15	-68.99	36589.41	25273.32	2195.17
2	-53.40	82.21	37631.08	31324.51	728.69
3	-14.78	-76.63	39100.97	24934.98	2386.50
4	10.46	64.43	40426.54	30319.81	757.31

试计算近似垂直摄影下空间后方交会的解。此时内方位已知,$f_K=153.24\text{mm}$,$x_0=y_0=0$。

提示:解为:

$X_S=39795.45\text{m}$

$Y_S=27176.46\text{m}$

$Z_S=7772.69\text{m}$

$$R=\begin{pmatrix}0.99771 & 0.06753 & 0.00399\\ 0.06753 & 0.99772 & -0.00211\\ -0.00412 & 0.00184 & 0.99999\end{pmatrix}$$

14.用下图中所示的点进行单像空间后方交会时,试分析求解外方位元素的理论精度。

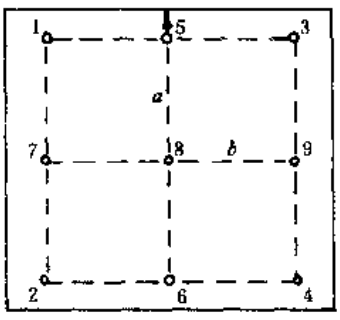
(1)四点全片后交(1~4点)

(2)六点全片后交(1~6点)

(3)九点全片后交(1~9点)

(4)四点半片后交(3~6点)

(5)六点半片后交(3~6,8,9)



你能从中得出什么结论？

15．根据上题结果计算后方交会时未知数之相关系数：$\rho_{X_S-\varphi}$和$\rho_{Y_S-\omega}$

提示：相关系数 $$\rho_{ij}=\frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}}\cdot\sqrt{Q_{jj}}}$$

16．什么是共面条件方程？利用它可以解决摄影测量中的哪些问题？

17．解析相对定向中哪些为未知数？观测值是什么？需不需要提供地面控制点？

18．连续像对相对定向与单独像对相对定向有何区别？

19．绘出解析相对定向或单像后方交会的计算机程序框图。试用课余时间写出BASIC（或者FORTRAN）程序。

20．什么叫单元模型的空间相似变换？怎样作空间相似变换？它在摄影测量中有哪些应用？

21．在空间相似变换中进行坐标重心化有何意义？试以公式说明之。

22．在§2.5节中所演示的单元模型空间相似变换实例中，试计算平差未知数的初始值。

23．在上题中，若假设模型坐标X_M，Y_M的中误差为Z_M中误差的一半，试重复全部计算过程。

24．空间前方交会解决什么问题？有哪几种解法？

25．当量测了一个立体像对上若干点的像片坐标，且其中包括有地面控制点时，如何用解析法求得所有点的地面坐标？

（1）有哪几种方法可选择？各有何优缺点？

（2）每种方法各需要至少多少个地面控制点和多少个像点坐标观测值？

26．对地面控制点和待求点列出双像光束法（一次定向法）的误差方程式。假设观测了六个标准点的像片坐标，且其中3，4，6为平高控制点，5为高程控制点。试绘出误差方程式和法方程式系数矩阵结构图。并指出多余观测r为多少？

27．已知一立体像对上某像点的坐标（x、y，x'，y'），怎样才能求得该点的地面坐标？

28．如何提高解析相对定向的精度？如何提高单像空间后方交会的精度？

第三章　像片连接点的设置与像点坐标量测

§3.1　摄影测量加密概述

一、摄影测量加密的意义

测定地球表面点位的两维或三维坐标主要采用大地测量方法，包括地面测量和空间大地测量。由于最近若干年来，电子计算机、电子计算技术和摄影测量数据采集系统的发展，使摄影测量方法的精度有了明显提高。因此，在某些领域内进行点位坐标测定既可用大地测量方法，也可以用摄影测量方法。而且有一些任务只能用摄影测量方法才能有效地得到解决。

摄影测量方法测定或加密点位坐标的意义在于：

——不触及被量测目标或物体即可测定其位置和几何形状，因此，对被测目标的可接触与否不提出任何要求；

——可以快速地在大范围内同时进行点位测定，从而可节省大量的野外测量工作量；

——凡从空间摄站处可以看到的物体，均可测定其点位。这种空中三角测量网不受地面通视条件的约束；

——摄影测量平差时，区域内部精度均匀，且不受区域大小的影响，基本可保证所加密的控制点场的同质性。

所以，摄影测量加密方法在生产需要的推动下不断发展和完善，已成为测定点位坐标的一种重要手段。

二、摄影测量加密的目的

摄影测量加密，即目前通称的解析像片三角测量，可用于以下各种不同的目的。

——为测绘地形图提供定向控制点（要求精度为图上0.1mm)和内、外方位元素；

——为制作像片平面图（像片纠正）和正射影像图（微分纠正）提供定向控制点（要求精度亦为图上0.1 mm）和内、外方位元素；

——取代大地测量方法，进行三、四等或等外三角测量的点位测定(要求精度为厘米级)；

——用于地籍测量以测定大范围内界址点的国家统一坐标，称为地籍摄影测量、以建立坐标地籍（要求精度为厘米级）；

——单元模型中解析地计算大量点的地面坐标，用于诸如数字高程模型采样和桩点法测图；

——解析法近景摄影测量和非地形摄影测量，例如建筑物，包括高层建筑物、地下工程、工业产品的形体测定和变形监测，材料检验中的量测，工艺模型结构的测量，以及用普通照相机摄得的像片以点方式重建物方目标等等。此时，所要求的精度往往较高。

因此，概括起来讲，摄影测量加密的目的可以区分为两个方面：第一是用于地形测图的摄影测量加密，要求的精度较低；第二是高精度摄影测量加密，用于各种不同的目的。在我国的航测生产中，长期来大多是进行测图目的的摄影测量加密，技术要求、作业方法与质量控制均比较粗糙，并未充分发挥摄影测量的潜力。今后，随着地籍测量和各种非地形测量应用的扩大，应当从理论和实践上重视高精度摄影测量加密，逐步推广和扩大其应用范围。

三、摄影测量加密方法的分类

利用电子计算机进行摄影测量加密可以采用各种不同的方法。

根据平差中采用的数学模型可分为航带法、独立模型法和光束法。航带法是通过相对定向和模型连接先建立自由航带，以点在该航带的摄影测量坐标为观测值，通过非线性多项式中变换参数的确定，使自由网纳入规定的地面坐标系，并使公共点上不符值的平方和为最小。独立模型法平差是先通过相对定向建立起单元模型，以模型点坐标为观测值，通过单元模型在空间的相似变换，使之纳入规定的地面坐标系，并使模型连接点上残差的平方和为最小。而光束法则直接由每片的光束出发，以像点坐标为观测值，通过每个光束在三维空间的平移和旋转，使同名光线在物方最佳地交会在一起，并使之纳入规定的坐标系，从而加密出待求点的物方坐标和像片的方位元素。

根据平差范围的大小，摄影测量加密分为单模型法、航带法和区域网法。单模型法是在单个立体像对中加密大量的点，或用解析法高精度地测定目标上的点的坐标。航带法是对一条航带进行处理，在平差中无法顾及相邻航带之间公共点条件。区域网平差，则对由若干条航带（每条航带若干个像片或模型）组成的区域进行整体平差，因此平差中将能充分地利用各种几何条件和减少地面控制点的数量。

四、进行摄影测量加密所必须的信息

所谓摄影测量加密指的是利用所摄目标地区的摄影像片所提供的摄影测量信息和必要的用以确定平差基准（即网的绝对位置）的非摄影测量信息来测定所摄目标地区未知点的物方空间坐标。由于它不像大地测量控制的三角测量网，而是将摄站及像片放到加密的整个网或锁中，起到点的传递和构网的作用，故通常亦称为空中三角测量*或像片三角测量。

（一）摄影测量信息

主要指在像片上量测的控制点、定向点、连接点及待求点的像片坐标，或在模拟仪器上对所建立的立体模型所量测的上述各类点的模型坐标。由于地面点可出现在多张像片或多个模型中，所以，在量测这些坐标时存在点在像片和模型上的辨认问题。但是，这些坐标的获得与点在地面上是否通视无关，只需它们出现在摄影像片上。

（二）非摄影测量信息

主要指使空中三角测量网纳入规定物方坐标系所必要的基准信息。也要考虑到不同方

* 严格讲，空中三角测量仅指利用航摄像片的点位测定方法，不包括航天像片和地面摄影像片，但习惯上有时并不作严格区分。

法求解时的几何可测定性和对像片系统误差的有效改正。长期来，人们主要是利用若干已知大地测量坐标的物方控制点，然而从摄影测量观测值与非摄影测量观测值的联合平差意义上讲，非摄影测量信息中还包括直接的大地测量观测值，导航数据所提供的像片外方位元素，以及物方点之间存在的相对控制条件等等，这些将在本书第九章中讨论。

§3.2 像片连接点的类型与设置

在摄影测量作业中，像片间的联系、像片对的定向均是通过像点来实现的。像片坐标量测值的精度，除了取决于摄影机、摄影材料、量测坐标的仪器和观测员的水平外，主要取决于像片上点的类型与设置方法。本节拟要介绍各种类型的像点及其转点方法，并作适当的比较和分析。

一、人工转刺点

对于常规的60%航向重叠和20～30%旁向重叠的摄影飞行，每片至少需要3×3个像片连接点（图3-2-1）。

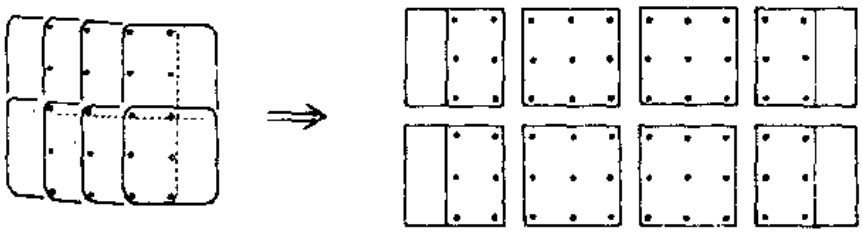


图 3-2-1

传统的人工转刺点的方法是在每片上刺出中间一排连接点，并转刺到相邻航带上。采用的工具为刺点针和简易立体镜或反光立体镜。这种方法有以下几个明显的缺点：

（1）在转刺点和以后在仪器上量测像点坐标时，总是在一片无孔一片有孔的情况下立体观测的，刺孔将破坏立体照准，使测标无法精确地切准目标点。

（2）人工在低放大倍率的立体镜下转刺点，刺点误差大。刺点中误差此时约为30～50μm，与目前采用的精密坐标量测仪器，如精密立体坐标量测仪，单像坐标量测仪及解析测图仪的仪器精度（1～3μm）不相适应，也显著大于现代航摄仪摄得像片的系统误差的中误差(5～8μm)。

二、标志化点

为了避免转刺点误差，对所有控制点和连接点布设地面标志是最好不过的。但是，由于它的成本高和不便于作业，目前只在高精度摄影测量平差，如加密Ⅲ、Ⅳ等大地控制网，数字地籍测量或高精度变形测量中采用。

为了在像片上可以辨认和量测，地面标志点的大小按照像片比例尺来确定。计算标志点标志直径的经验公式为：

$$d \approx 25\ \text{cm} \cdot m_s / 10000 \quad (m_s \text{为像比例尺分母})$$

这样在像片上得到的标志的理论直径为25μm，但由于光线照射，实际直径可能加倍到50μm。由于在坐标量测时通常使用8～12倍放大倍率的观察系统，这些标志是能够被认出的。下列各种像比例尺摄影时采用的标志大小可供实际作业参考。

像片比例尺	标志点直径（实地）
1:250(地面摄影测量)	4～8mm
1:3000～1:6000	10cm
1:10000	20cm
1:20000	50cm
1:50000	1～2m

考虑到点的可辨认性，标志周围在像片上的影像应有良好的反差，它比标志大小的选择更为重要。街道和广场的加固表面、沙土地或干燥的土丘，通常在航空像片上呈现出很亮的影像，此时其上的发亮标志就会变得不明显。涂以乳白色或橙红色的标志具有良好的反射特性。对黑白软片、标志的颜色最好为白色，亦可为黄色或红色，其背景颜色以绿色或黑色为好。而对于彩红外软片，标志可取玫瑰色或红色。对于彩色片，则宜取红色，其次为黄色和白色。

为了便于辨认，在标志点周围加辅助标志，使整个标志取图3 2-2所示的形状。标志点和辅助标志之间的间隙至少必须保持为标志点直径的三倍。如果采用立体量测，标志周围应当等高；如果单像量测，则关系不大。

图 3 2-2

标志做成在一直线上的三点（如图中的e和f），并在野外测定出它们的大地坐标，可确保点的可辨认性，同时，把它们作为点组量测后参与平差还可以提高精度和可靠性。

三、利用地面明显地物点（自然点）

所谓明显地物点是指在实地存在而且不易受到破坏的、在像片上可准确辨认的自然点。直接选取这些点作为控制点和连接点时，不在像片或透明正片上刺出孔来，而是绘出唯一确定的点位略图及文字说明，并在像片上标明位置所在。在进行立体量测时，作业员按此略图和说明来辨认点位。这种方法的优点是不破坏立体观测效应，如果地面明显地物很多，而且选点和量测由同一作业员完成，它亦可能达到接近于标志点的精度。

但是，这种方法对于明显地物不多的荒漠地区或未开发地区是不可行的。此外，该方法作业比较麻烦，在观测时辨认点要花费仪器上时间。

利用自然点作为控制点时，有时必须将平面和高程控制点分开，以保证量测精度。譬如，平坦地区的道路交叉口，其平面位置不一定很精确，但高程无变化，用作高程控制点是十分好的，而房角不宜作为高程点，但作为平面控制点也是合适的。因此，在编写程序时要考虑到这种情况。

四、利用转点仪转刺点

鉴于标志点和自然点的上述缺点，为了提高内业转刺点的精度，在50到60年代便产生了专

门用来转刺点的仪器，该类仪器能精确地在每片上刺出所有的连接点，只要用单像坐标量测仪便可快速而准确地量测出所有的像点坐标。

利用转点仪转点在许多国家已经成为一种常规作业方法。可以利用的转点仪有：

机械针刺孔：威特厂的PUG-4，克恩厂的CPM-1。

电热针烧孔：联邦德国欧波同厂的PM-1。

超声波刺孔：威特厂的PUG-5。

激光打孔：前民主德国蔡司厂的Transmark和我国生产的JC-1型激光刺点仪。

据报道，其中PM-1、PUG-5和CPM-1的转点精度较高。而且CPM-1为转点仪和单像坐标量测仪的组合，在转刺点同时，量测并记录左片的像点坐标。

下面介绍用转点仪转刺点的方法。

（一）常规方法

当坐标量测采用立体量测方法时，每片仅刺出中间一排点，相邻航线的公共点则进行转刺。当采用单像坐标量测仪量测时，则必须在每片上转刺出所有的点来。

这种方法的缺点是立体照准同名点进行转刺时，其中一片上已有刺孔，因而有损于立体观测效应，而且还可能用转刺后的点去再次转刺，这将会降低精度。只是这种方法作业上比较方便。

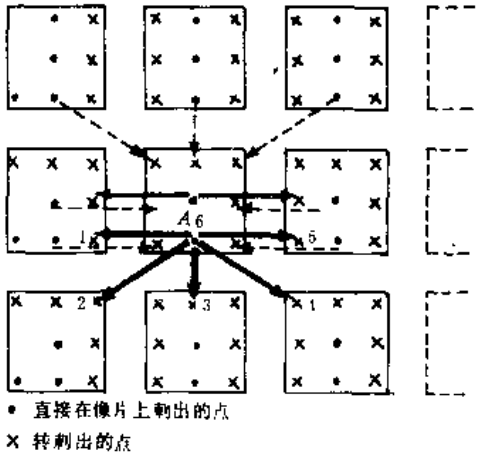


图 3-2-3

（二）Van den Hout建议的方法

该方法参见图3-2-3，是将中间一片放在转点仪上，使欲转刺的点A保持固定，将该点依次转刺到其它各片（图中1，2，3，4，5），最后再刺出本点（图中6点）。

这种方法的优点是所有转刺过程中均有完好的立体观察效应，因而能保证点的精度。缺点是每片要多次放取。在PM-1上由于放取片和对点方便，所以，推荐采用这种方法。

（三）Klaver为CPM—1设计的转刺点方法

由于在CPM—1上转点与量测左片坐标可以同时进行，所以克恩厂的Klaver工程师专门为之提出了分两步的转点法（见图3-2-4）。

第一步先转刺出航线之间的公共连接点，即将每条航线的下排点转刺到下一航线去。第一片刺三个点，其余各片仅一个角隅点。此时不进行读数记录。第二步则在同一航线内转刺点并量测所有点的左片像点坐标。

利用Appenweier试验场资料，斯图加特大学将利用转点仪PM-1转点进行区域网平差的精度与人工标志点比较，得到表3-2-1的结果。坐标量测在PK-1单像坐标量测仪上进行，平差用PAT—B光束法区域网程序。

从该表结果看出。

（1）利用全部标志点时，像片坐标量测的单位权中误差$\hat{\sigma}_0$可达到3.2～4.0μm（不带自检校）和2.5～3.0μm（带自检校平差）。利用PM-1转刺点和PK-1量测像点坐标亦可达到7.2～7.5μm（不带自检校）和6.0～6.1μm（带自检校平差），这样的精度是令人满意的。

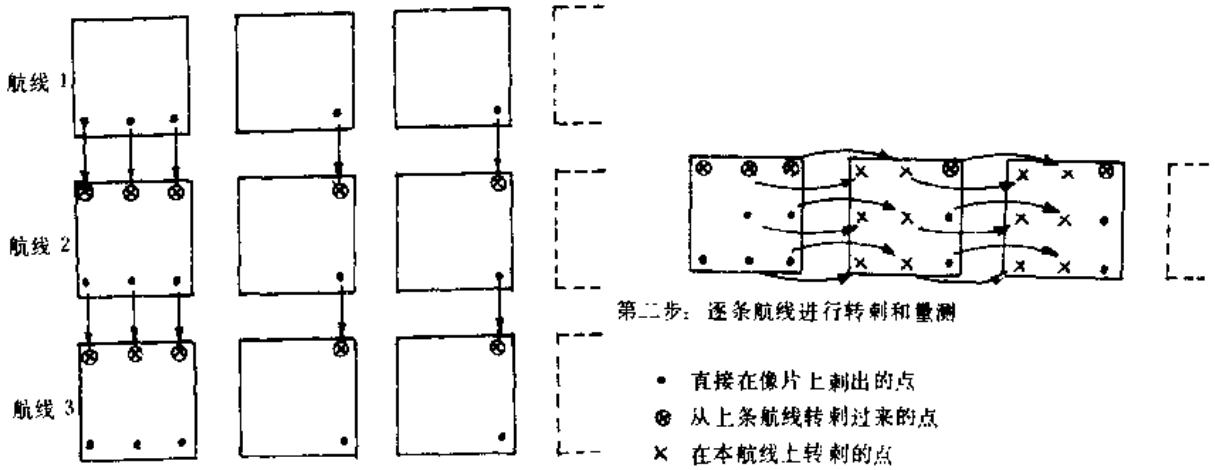


图 3-2-4

Appen-weler 西-东区域光束法平差结果

（宽角摄影，像比例尺1：7800，$p=60\%$，$q=20\%$）

24个平面周边控制点，53个高程控制点，79个平面检查点，31个高程检查点　表 3-2-1

附加参数	每片的连接点数	$\hat{\sigma}_0$ (μm)	绝对精度（由检查点求得）				
			μ_x	μ_r	μ_{xr}	μ_z	
				(μm)		(μm)	‰H
人工标志连接点							
无	27	3.2	5.2	5.4	5.3	12.7	0.08
	18	3.4	5.0	5.1	5.1	12.6	0.08
	9	4.0	4.8	4.4	4.6	12.3	0.08
12个区域不变量附加参数	27	2.5	4.3	5.0	4.7	10.3	0.07
	18	2.6	4.2	5.0	4.6	10.0	0.07
	9	3.0	4.0	4.8	4.4	10.5	0.07
PM-1转刺点							
无	27	7.2	7.5	8.7	8.1	19.9	0.13
	18	7.3	8.3	8.4	8.4	20.7	0.14
	9	7.5	8.1	9.5	8.8	27.2	0.18
12个区域不变量附加参数	27	6.0	6.7	6.0	6.4	15.0	0.10
	18	6.0	6.6	6.6	6.6	16.5	0.11
	9	6.1	6.1	7.8	7.0	16.0	0.10

（2）与外业点比较求得的绝对精度，当利用标志点和转点仪转点时，分别可达到5μm和7μm的平面精度，0.07‰H和0.11‰H的高程精度。当摄影比例尺大于1:10000时，实地精度达到几个厘米，能够满足低级控制网和数字地籍测量的要求，但尚不能达到高精度变形分析的要求。

五、利用解析测图仪转点

随着解析测图仪的出现和在生产中的应用，人们正在研究利用它来转点的方法。由于解析测图仪可将量测的像点坐标存入计算机，又可根据存贮的坐标和内定向参数将测标驱动到该点处，所以，像片连接点可以转而不刺。由此而引出各种在解析测图仪上转点的方法。

1.先航向后旁向，每片两次上仪器

这种方法（图3-2-5）是先沿各条航线观测。从第二像对起，当观测与前一像对公共的三个连接点时，根据已存贮的像点坐标，左片可自动到达该点位，立体照准即可获得右片坐标。这相当于已将该点转刺并量测出来。

观测以后各航线时应将上排点空着，最后通过航线间公共点的转点而获得上排点。如果航线间主点位置错开可临时加测点。

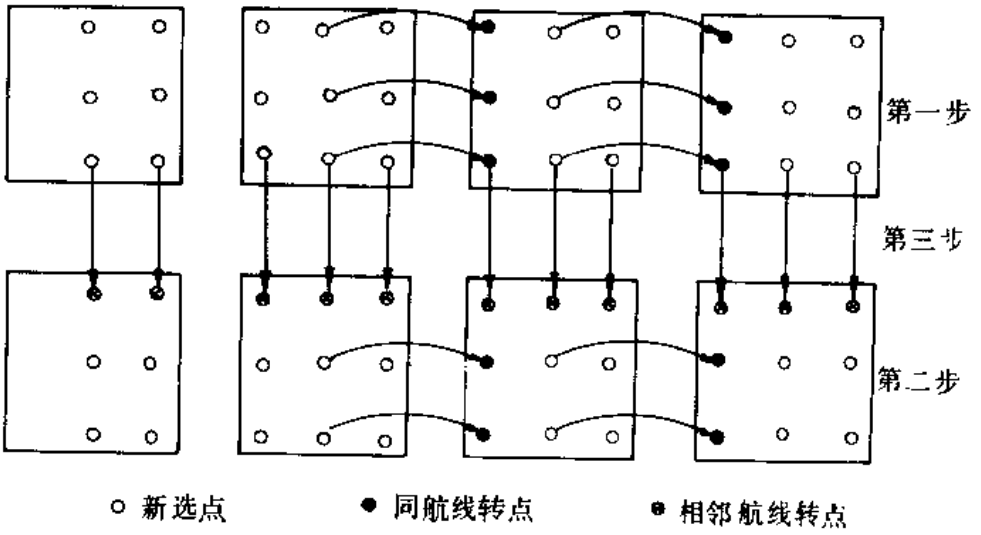


图 3-2-5

2.先旁向（隔片）后航向，一半像片两次上仪器

此法（图3-2-6）第一步是隔片进行航线间公共点的量测，全部结束后转入第二步；

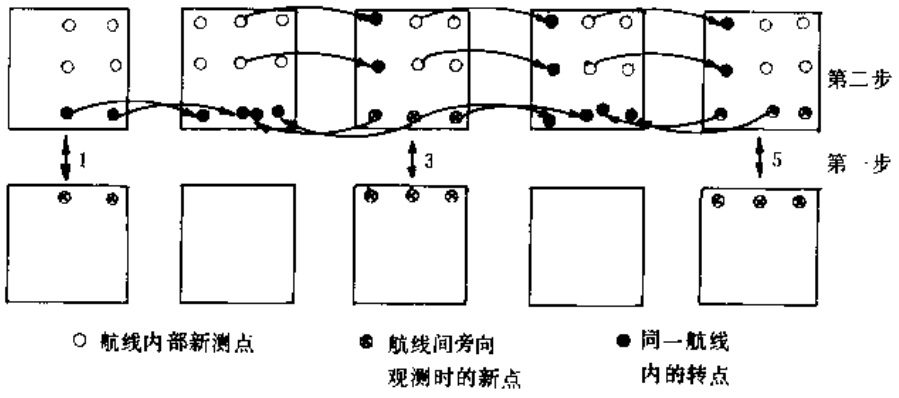


图 3-2-6

依次对各条航线进行立体量测，除了原来航向的转点外还有旁向重叠点沿航向的转点，其结果是在隔前片上下排中央有双点。

同第一种方法比较，此法减少了像片重复上仪器的次数，但是增加的双点不在可靠性最薄弱之处。

3.先旁向（隔两片）后航向，重复上仪器片数最少

此法同方法 2 的两个步骤，但第一步中旁向转点隔两片进行。结果在第 3 片上出现一个非旁向公共点，第4，5 片上有双点（图3-2-7）。

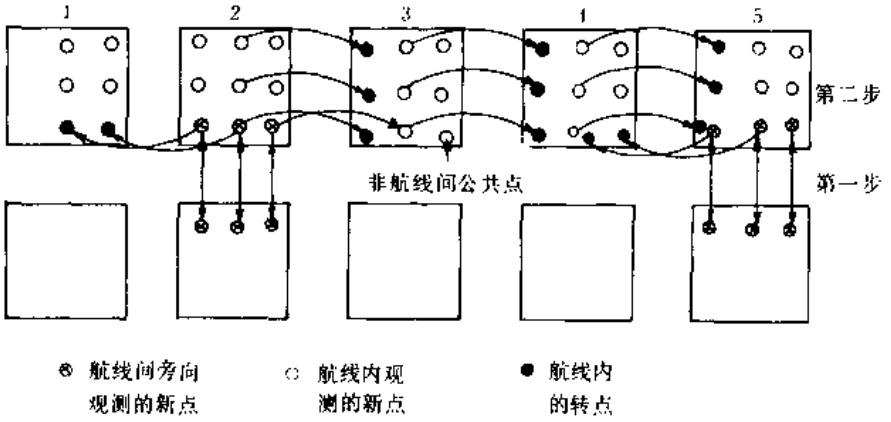


图 3-2-7

4.一种可靠性好的转点法

同方法 1，但在每航线量测时量测对本航线最有利的全部标准配置点，然后在航线之间进行公共点的相互转点。虽然仍旧每片两次上仪器，但所有旁向公共点均为双点，因此可以明显地提高平差结果的可靠性。此外，这种方法不受航线间上点错开或飞行不正规的影响，作业方式简单（图3 2-8）。

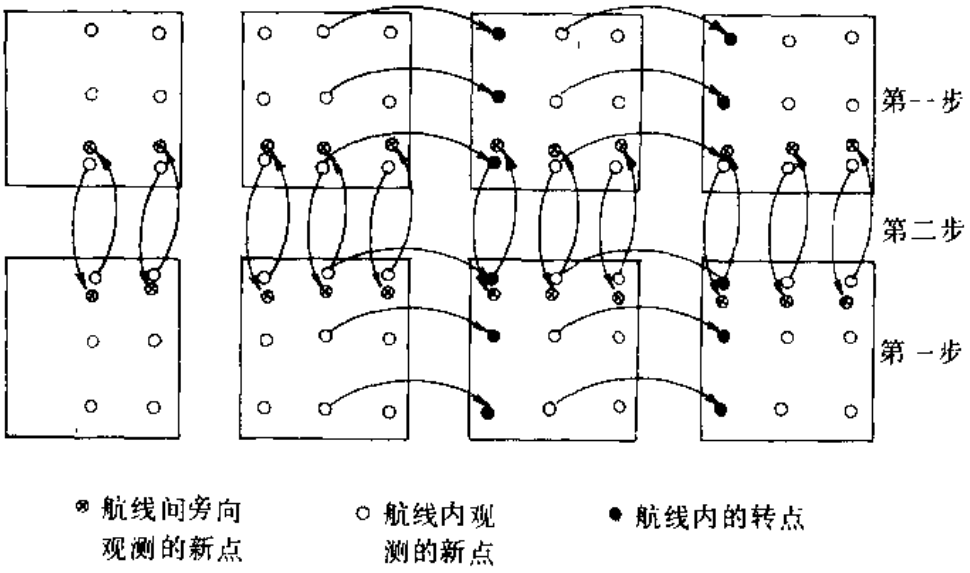


图 3-2-8

利用解析测图仪转点有下列优点：

（1）不需要事先选点、刺点和转点，全部在量测过程中进行，从而节省了工序。

（2）由于不在航摄底片或透明正片上刺点，所以对乳剂层无任何破坏，保证了完好的立体观测效应。

（3）凡已测过的点在转点时，仪器可自动将像片盘驱动到应有位置，从而加速了量测速度。

但是，该方法也有下面两个缺点：

（1）用较贵的解析测图仪顶替一般转点仪的工作，在经济上不一定合算。

（2）测图时必须仍在解析测图仪上进行，这在一定程度上限制了该方法的应用。

总的考虑是，如果在高精度摄影测量加密时不做地面标志，而直接利用解析测图仪转点和量测，肯定是有益的。目前厂家提供的解析测图仪软件均无此功能，因此，应当进行此项软件开发。

表3-2-2比较了利用解析测图仪转点与其它方法转点的加密结果。表中的数据表明，利用解析测图仪转点完全可取代利用转点仪的转刺点，条件是在像片上具有足够的明显地物点。这个结果是在1986年美国摄影测量与遥感协会的年会上报告的，可以看出人们对这个问题的关注。

各种转点方法及其加密精度　　表 3-2-2

研究者	转点方法	试验场名	$\hat{\sigma}_s$	$\hat{\mu}_{xy}$	$\hat{\mu}_z$	控制密度	像片数	重叠度 航向/旁向	仪器
Ackermarm等 1980	*S*	Appenweier	2.5	4.5	13.9	1*b*	117	60/20	PK-1
	SA		5.9						
	A								
Grün 1983	*S*	Jamijarvi	3.4	2.4	4.8	1*b*	51	60/60	Kern厂单像坐标仪MK-2
	SA		6.1	3.1	4.8				
	A		7.1						
Liao 1982	*S*	Hordorf	4.8	5.6	12.9	1.5*b*	56	60/20	解析测图仪AP-C3
	SN		5.8	3.1	10.5				
	N								
Alharthi 1984	*S*	Jamijarvi	3.8	3.7	6.5	1.5*b*	25	60/60	解析测图仪BC-1
	SN		5.5	3.8	7.9				
	N		6.2						

* 表中*S*：标志化点；*A*：转点仪转刺点；*N*：解析测图仪明显地物转点

六、利用高精度在线数字相关进行转点

将立体像对的影像数字化（即按像元素记录影像的灰度值），然后用数字相关方法寻找同名像点，称为数字影像相关。惯常的数字相关方法是比较目标区和搜索区内两个点组灰度的协方差或相关系数，在该值为最大的原则下寻求相关位置，找出同名像点，实现立体量测的自动化。

阿克曼教授提出的一种高精度数字相关方法是在左右两片两个窗口内相应灰度值之差为最小的原则下，利用最小二乘法求解。由于它能加入几何变形改正和灰度量测系统误差改正且具有大量多余观测，因而可获得极高的相关精度。

§3.3 量测像点坐标的仪器

解析摄影测量的特点是不要求在摄影测量仪器上用光学或机械方法重建物方的立体模型，而是主要量测像点坐标，然后在线（解析测图仪）或离线（解析空中三角测量）地建立立体模型并进行严格的数值解算。因此，量测像点平面坐标的仪器对于解析摄影测量是至关紧要的。

由于像点坐标是在像平面上量测的，所以它不涉及空间型仪器的复杂结构，从而为仪器设计带来了方便，而且也有可能使仪器达到更高的量测精度。

本节首先讨论高精度量测必须遵循的阿贝比长原理，然后介绍立体坐标量测仪和单像坐标量测仪及其作业方法，最后简要介绍与单像坐标量测仪配合使用的各种转点仪器。

一、阿贝比长原理

阿贝教授在1890年的一份报告中指出，在量测仪器结构配置中，应当使量测的线段与量测用的分划尺在一条直线上。这便是阿贝比长原理。

为了说明该原理的作用，在图3-3-1中分别给出两个例子。其中（a）为不符合阿贝原理的例子，（b）为符合阿贝原理的例子。

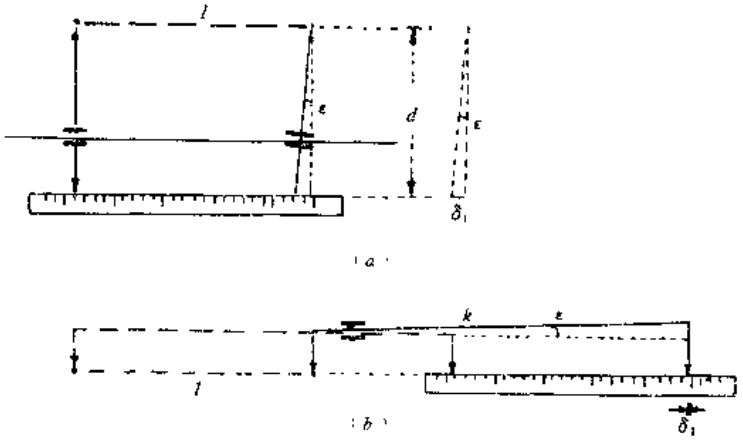


图 3-3-1

尚若量测装置在量测线段 l 的过程中，由于仪器设计和加工中的原因，造成导轨的直线性或正交性的误差，偏转了ε角。此时，对图3-3-1(a) 的情况将产生量测误差δ_1。由图中看出：

$$\delta_1 = d\tan\varepsilon \approx d\cdot\varepsilon$$

若$d=200\text{mm}$, $\varepsilon = \pm 1^0 = \pm 0.00016$, 则

$$\delta_1 = \pm 32\mu\text{m}$$

而对于图3-3-1(b) 的配置，同样的仪器误差引起的量测误差δ_2将会小得多。此时

$$\delta_2 = k(1-\cos\varepsilon) \approx \frac{k}{2}\varepsilon^2$$

若$k=1000\text{mm}$, $\varepsilon = \pm 1^0 = \pm 0.00016$, 则

$$\delta_2 = \pm 0.013\mu\text{m}$$

所以，按照阿贝比长原理将能保证仪器误差对量测结果仅起很小的（二次小项)影响，而不按照阿贝原理时，哪怕是很小的仪器误差也会导致量测结果不能允许的误差。

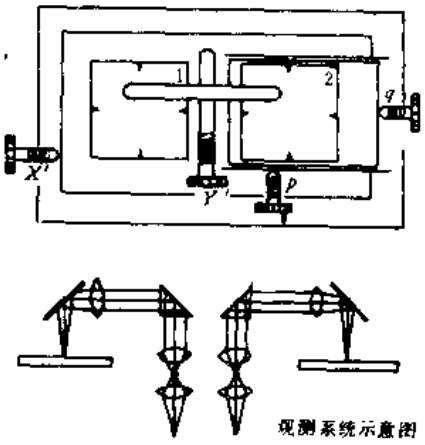


图 3-3-2

二、立体坐标量测仪简介

（一）18×18像幅立体坐标量测仪

最早用来量测像片坐标的立体坐标量测仪是德国C.Pulfrich于1901年研制的。80多年来这类仪器在结构上并无多大的改动。前民主德国蔡司厂和我国上海劳动仪器厂生产的18×18像幅的立体坐标仪就是采用相同的原理。该原理简要地示于图3-3-2中。

仪器的基本结构由基座、总滑床、Y车架、观测系统和照明系统五部分组成。基座支撑着仪器的总滑床和Y车架等全部部件。在总滑床上放有左像片盘和右像片盘的滑床。转动X手轮，则左、右像片盘同时随总滑床作X方向移动，其移动值可在X手轮的读数鼓上读出，最小分划值为0.02mm。转动Y手轮，观测系统在Y方向移动，其移动值在Y手轮读数鼓上读出，最小分划值亦为0.02mm。

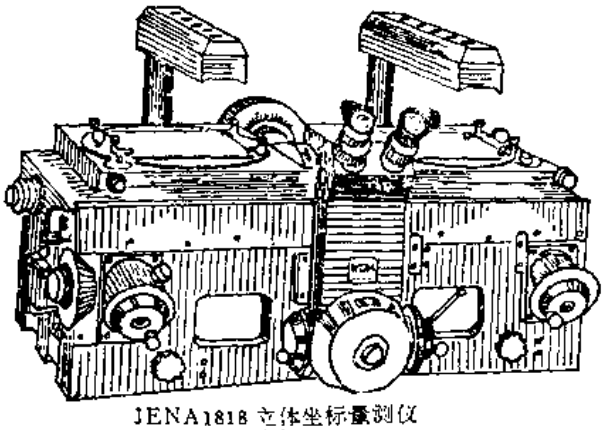
右像片盘还可以在右像片滑床上通过p螺旋和q螺旋在X和Y方向移动，从而量测右片相对于左片的移动量，即测定左右视差和上下视差。p螺旋和q螺旋的最小分划值分别为0.005和0.01mm。

由于像片平放，立体观测系统的光学部分较为简单。从图3-3-2中可以看出，所观测的像点乃位于透镜的焦面上，从而成为平行光，经直角棱镜转90°后，再经透镜成像于测标面上，进入目镜供作业员观测。

国产立体坐标量测仪型号为HCZ—1型，它与蔡司1818（图3 3-3）型相比，在外形和功能方面基本相同，仅结构上略有改进。它用来量测尺寸为18×18cm²的像片上像点的平面直角坐标x_i，y_i和左右视差p、上下视差q。

目前这类仪器可作局部改造，以量测像幅23×23cm²的像片。为了实现量测值的自动记

录、在线空中三角测量和机助测图可加入模/数转换接口与各类微型计算机(如PC机）相连。

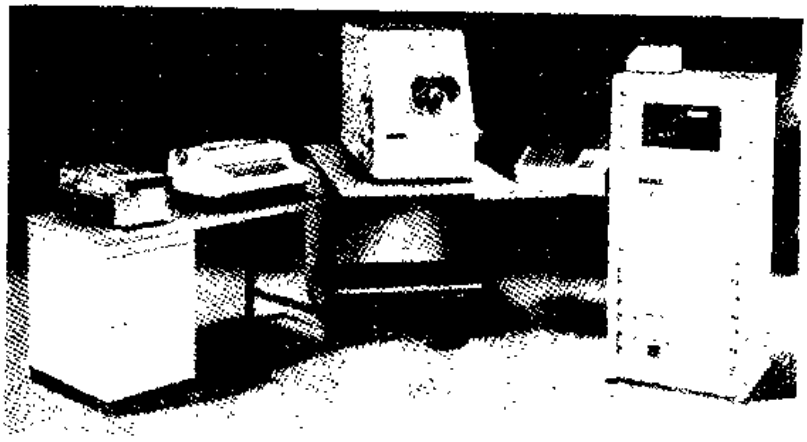


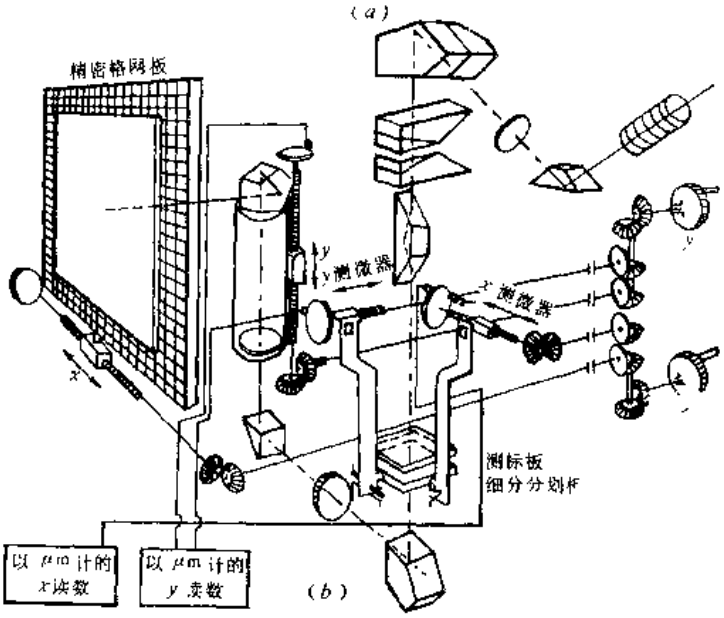
JENA1818 立体坐标量测仪

图 3 3-3

（二）精密立体坐标量测仪

通常把量测像点坐标最小读数达到1μm,量测精度达到±3μm之内的立体坐标量测仪称为精密立体坐标量测仪。在解析测图仪作为商品正式投入市场之前，各主要测绘仪器厂家均致力研究带有自动记录坐标功能的23×23cm像幅的精密立体坐标量测仪。主要产品有:联邦德国欧波同厂生产的PSK型仪器(图3-3-4)、前民主德国





(a) PSK—2 仪器全貌;(b) PSK—2 的光路与量测原理示意图

图 3-3 4

蔡司厂生产的Stecometer C型仪器(图3-3-5)，瑞士威特厂生产的STK型仪器。更早一些还有意大利OMI公司生产的三像片盘立体坐标量测仪TA—3P。该仪器可同时量测三张具有立体重叠的像片，其中任意两片可组合地进行立体观测，从而起到转点的作用。

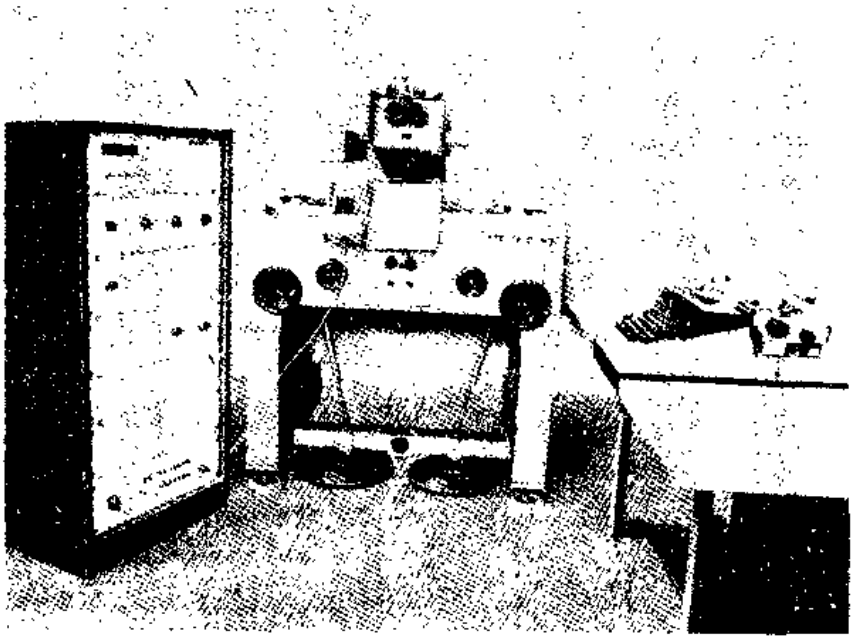


图 3-3-5

现将这几种精密坐标量测仪的主要性能特点列于表3-3-1中以资比较。

各种精密立体坐标量测仪的主要性能　　表 3-3-1

制造厂家	仪器名	量测值	量测系统	最小分划值(μm)
耶那蔡司厂	Stecometer—C	x', y'', p、q	精密丝杠	1
意大利OMI厂	TA—3P	x', y', x'', y'' x''', y'''	精密丝杠	1
威特厂	STK—1	x', y', p、q	精密丝杠	1
欧波同厂	PSK—2	x', y', x'', y''	格网和两种不同精度的丝杠	1

下面对联邦德国欧波同厂生产的PSK—2型仪器作简要说明（参见图3-3-4(b)）。

该仪器像片竖放，仪器主要精密部件均置于密封箱内。量测格网板作为承片玻璃与像片竖直贴放在一起，其上刻有间隔为5mm的精密方格网。光路中装着刻有间隔为0.1mm、精度达到1μm的短分划玻璃板，用测微螺旋使精密格网与短分划线重合以读取毫米以下的小数。

由于左、右像片均竖放，测标又固定不动，故像点x坐标的量测是使像片沿仪器的前后方向运动；像点y坐标的量测是观测系统作上下运动。左、右两像片架可作共同的运动，亦可单独运动。为了操作方便，把沿X方向移动的手轮和按钮都置于仪器的左侧，沿Y方向移动的手轮和按钮则置于仪器的右侧，且有快、慢档。通过不同的按钮和开关控制的作用，

可使所有的X（Y）方向的移动都由X（Y）手轮操纵，以利于作业。

目镜视轴下倾30°角，视场直径为10～15mm，放大倍率可用调换目镜的方式改变，有8^{x}、12^{x}和16^{x}三种。与眼同高的地方有一指示屏，由400个指示灯构成。安放观测的左右像片后，指示灯随时指出左测标照准的部位，即从像片上可看到一个直径8mm的亮点随物镜移动，指示测标在像片上移动，有利于找点。

仪器的照明设备有透光和反光两套。在透光照明下可看到像片影像而看不见格网，便于进行立体观测；而在反光照明下则只看到格网而看不见像片影像，用于读取像点的坐标值。

在观测系统光路中设有道威旋像棱镜。当影像旋转90°时，可将上下视差转换为左右视差以提高量测精度。由于安片时不进行归心定向，在立体观测时也要用旋像棱镜。光路中还设有一个反像棱镜，当使用负片代替正片时，拨动转向调节杆，可达到正像—负像的转换。此外，设有左右光路互换设施，供连续像对观测用。

PSK—2可选用两种量测方式：一是全部依据丝杆带动编码器旋转来得出坐标读数，可读至μm，但其增量为5μm，称为第二类精度；另一方式是丝杆传动只读大数，脉冲增量为100μm，其余的小读数，由分划尺移动时另一编码器来补充，最终量测结果为两者之和，增量为1μm，称为第一类精度。对于作业来说，后者要麻烦一些。

作业时，先用透光照明，这时在目镜视场中只看到影像和测标，当照准了量测点后，如采用与其它立体坐标量测仪一样的方法输出像点坐标值，它是第二类精度（5μm）的。如此时不输出像点坐标，而是改用反光照明，这时在目镜视场中只看见发亮的格网线、测标和分划尺，而看不见像片影像。若通过X、Y手轮移动分划尺，使在±0.6mm内与最邻近的格网线重合，这时输出的像点坐标便是增量为1μm的第一类精度了。

目前，所有各种精密立体坐标量测仪上均装有实现模拟量到数字量转换的自动坐标记录装置，这种接口的原理将在解析测图仪一章（第十四章）中加以阐述。而且它们可以进一步与微机相连，构成在线空中三角测量（第十二章）和机助测图系统（见《数字摄影测量》一书）。

三、单像坐标量测仪

要想充分利用像片的高分辨力，必须利用带有高放大倍率的单像坐标量测仪。而且在单像坐标仪上也易于实现阿贝比长原理。由于单像坐标量测仪的精度要比解析测图仪高，所以它仍是目前有销路的一种精密坐标量测仪器，除用于航空摄影测量外，在非地形摄影测量、天文测量及遥感像片的量测中也有广泛的应用。

带机械轴的单像坐标量测仪的原理示于图3-3-6。光学系统在像片上方沿着相互垂直的X和Y轴方向运动，用两个相应的分划尺量得其坐标。此时，单张像片上的像点成像在测标面上，然后用分光棱镜进入左右目镜进行观测。然而，这种仪器结构不符合阿贝比长原理，而且机械丝杆受周围温度的影响会产生量测误差。

满足阿贝比长原理的一种单像坐标量测仪是前民主德国蔡司厂生产的Ascorecord天文坐标记录仪，其结构原理示于图3-3-7中。

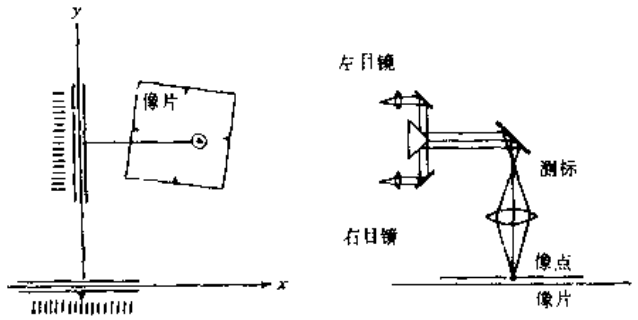


图 3-3-6

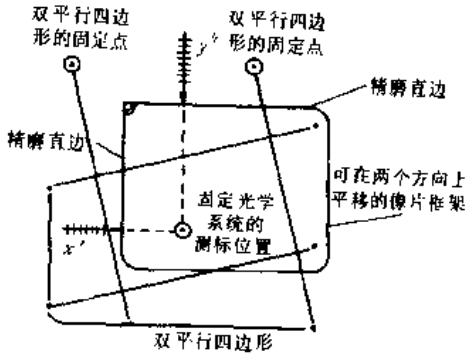


图 3-3-7

仪器的光学系统固定不动，像片车架通过双平行四边形机械装置永远保持平行移动，直至测标（它位于 x 、y 分划尺延长线的交点处）照准该点。x 和 y 分划尺互相垂直，且可在固定槽内滑动。借助于弹簧作用，使 x 和 y 分划尺一端始终分别顶着像片框架的两条精磨直尺边，分划尺的移动量即代表所量测的像片架坐标。

联邦德国欧波同厂生产的PK-1单像坐标量测仪，也是严格满足阿贝比长原理的一种精密坐标量测仪器（图3-3-8），其量测原理如图3-3-9所示。

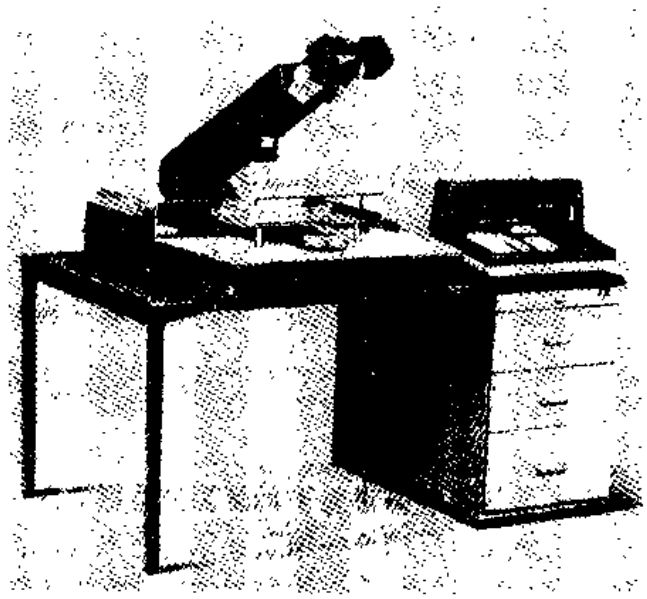
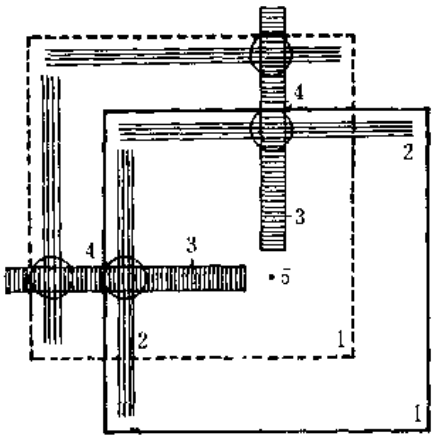


图 3-3-8



1—像盘；2—指标光栅；3 分划尺；
4—扫描装置；5—测标。

图 3-3-9

该仪器采用了移动指标光栅和固定分划尺的量测系统。像片盘的平行移动使指标光栅对分划尺光栅作相对移动，产生明暗相间的移动条纹，用光敏元件记下条纹数，即可取得像片架坐标的量测值。

该系统的光学观测系统和 X 、Y 分划尺均固定不动。像片的粗精调通过一个手动的调整器。当在平面上移动该调整器时，像片作快速移动；当调整器向左右或前后倾斜时，像片在 X 和 Y 方向上微动以精确切准量测点。如果放上相应的航空像片并作简单定向，则可

快速地找到点位以加速作业。

目前可供使用的主要单像坐标量测仪的性能综合列于表3-3-2中。其中，威特空间光学厂的单像坐标量测仪的量测系统包括两个部分：用玻璃板上对温度不敏感的十字格网保证总的量测比例尺，而点到最近格网点的矩距离则用高质量的精密丝杆来量测。此外DBA(Duane Brown Assocites)公司的坐标量测仪只有一个线性量测方向，仪器只能量测沿可旋转的杠杆臂方向的径距。因此，一张正片至少要作一次90°旋转进行两次量测，该仪器可进行自检校，最小分划为0.5μm，这上述的两种仪器均要增加量测工作量。

各类单像坐标量测仪的主要性能　　表 3-3-2

制造厂家	仪器名	量测值	量测系统	最小分划值(μm)
耶那蔡司厂	Ascorecord	x，y	玻璃分划尺	0.1
瑞士克恩厂	MK—2	x，y	玻璃分划尺	1
意大利OMI厂	TA—1p	x，y	丝杆	1
威特空间光学厂	单像坐标量测仪	x，y	格网加丝杆	1
联邦德国欧波同厂	PK—1	x，y	玻璃分划尺	1

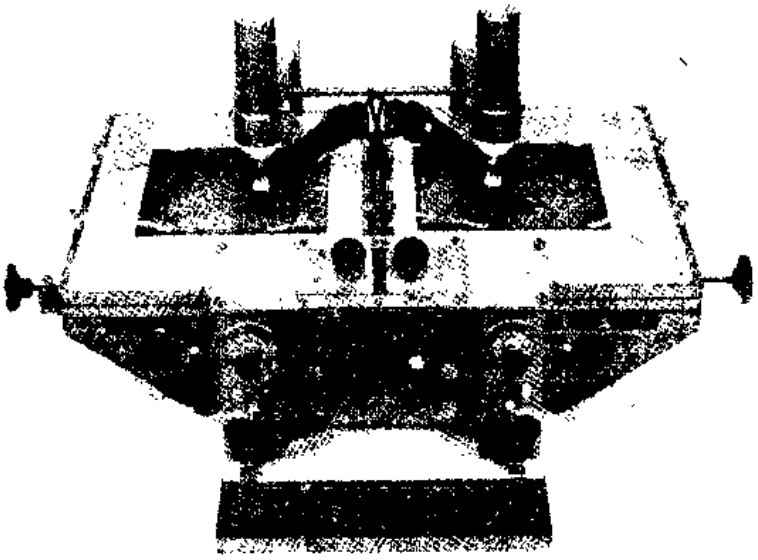
必须指出，单像坐标量测仪量测像点坐标的前提条件是这些像点必须能在单张像片上精确地辨认出来。如果在低倍放大率的立体镜下人工转点在透明正片上刺出点来再进行观测，则单像坐标量测仪1μm的高精度将会完全损失掉。为此，必须采用与单像坐标量测仪精度相匹配的转点方法，除了布设地面人工标志点外，目前主要利用精密的转点仪逐点进行转刺。

四、转点仪

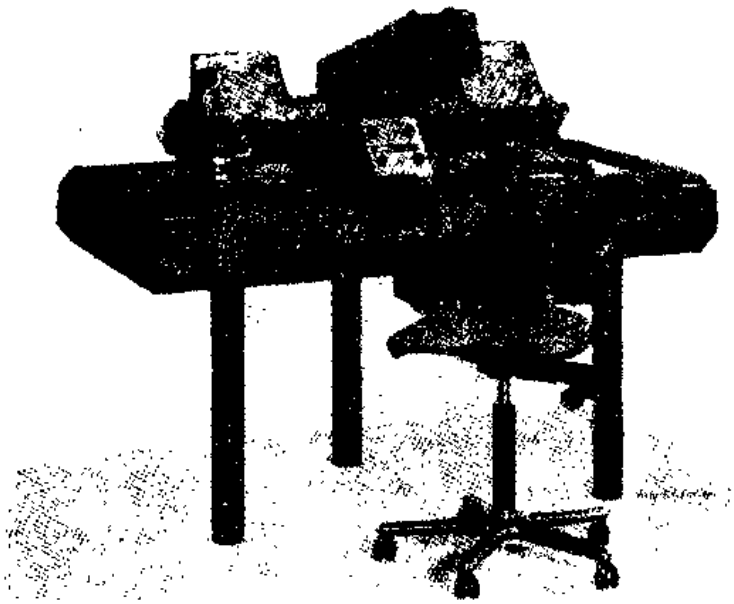
转点仪是在立体观察下专门用来转刺同名点的仪器。仪器应保证转刺点有较高的精度和长期转点的性能稳定性，而且应能处理各种不同比例尺像片之间的转刺。为此，转点仪应当像立体坐标量测仪一样，具有x，y，p，q动作，以使左右像片盘在平面上移动，从而达到测标切准左右片上的同名像点。为顾及像片比例尺不一致和影像变形，还应在光路中加入变倍和旋像系统。当然，转点仪必须有一个刺点装置，在控制旋钮或杠杆的作用下，该刺点装置能精确地对准测标位置，在左片或/和右片上刺出点来，并对该点加以整饰，绘出相应的点位符号来。

图3-3-10(a)、(b)为威特厂生产的PUG—4和PUG—5型转点仪。前者为机械刺孔，长期使用后刺针会有磨损。后者则改为采用超声波技术刺点。PUG—5工作时，刺点工具降落在软片上，超声波发生器产生电力振荡，其压电效应转化为机械振动，传至刺点工具，经摩擦产生热力，轻微深入软片，便留下永久清晰的刺点。刺孔直经可在0.04，0.06，0.10和0.15mm之中选择，标称精度为±2μm，指的是测标中心与刺孔中心之平均误差。

图3-3-11为前民主德国蔡司厂生产的Transmalk转点仪，该仪器利用一个脉冲激光



(a)



(b)

(a) PUG—4转点仪 (b) PUG-5转点仪

图 3-3-10

在药膜上烧出孔来。联邦德国欧波同厂生产的转点仪型号为PM—1(图3 3-12)，它是利用电热针在药膜上烧孔。点的孔径可从40到200μm大小。变倍系统左右独立，放大倍率为6.5到26倍。道威旋像棱镜可使像片影像在360°范围内任意旋转。不论背景亮暗，均能获得完好明晰的刺孔，并以此孔为圆心在像片上绘出2.4和6mm直径的红色圆圈以便于辨认。直接用于推动，照准点位也比较方便。

瑞士克恩厂将原来的转点仪PMG—2改型为CPM—1(图3-3-13)，使得左像片盘成为

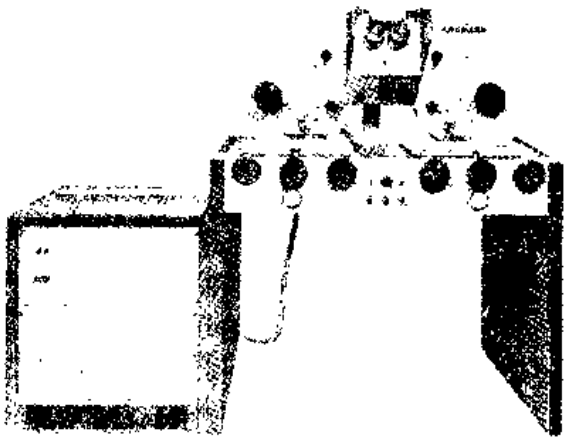


图 3-3-11

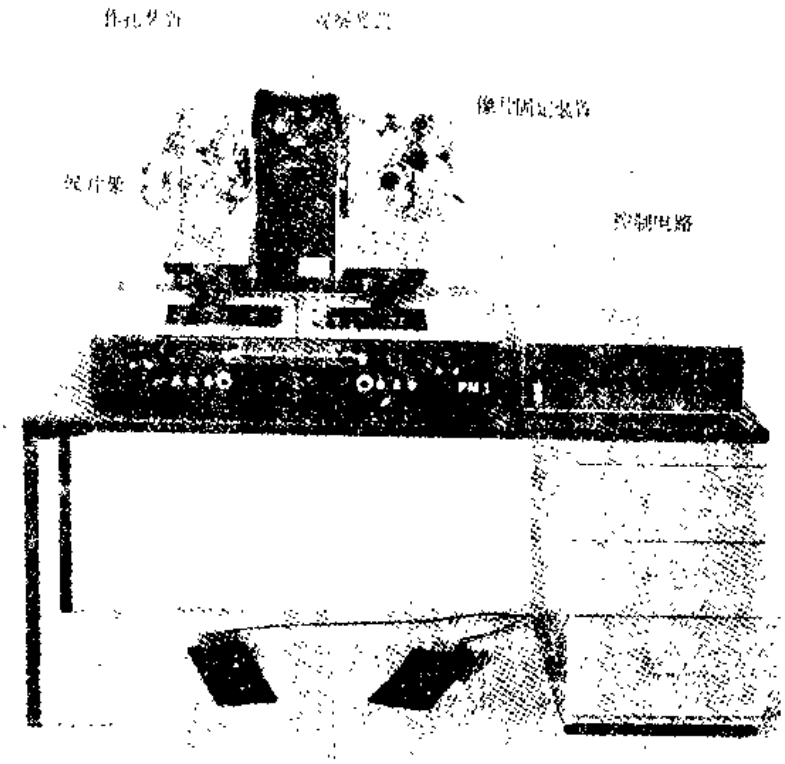


图 3-3-12

一架单像坐标量测仪。在转刺点同时，能量测左片上的像点坐标，刺点用机械针进行。

我国曾研制过型号为JC—1的激光转点仪。

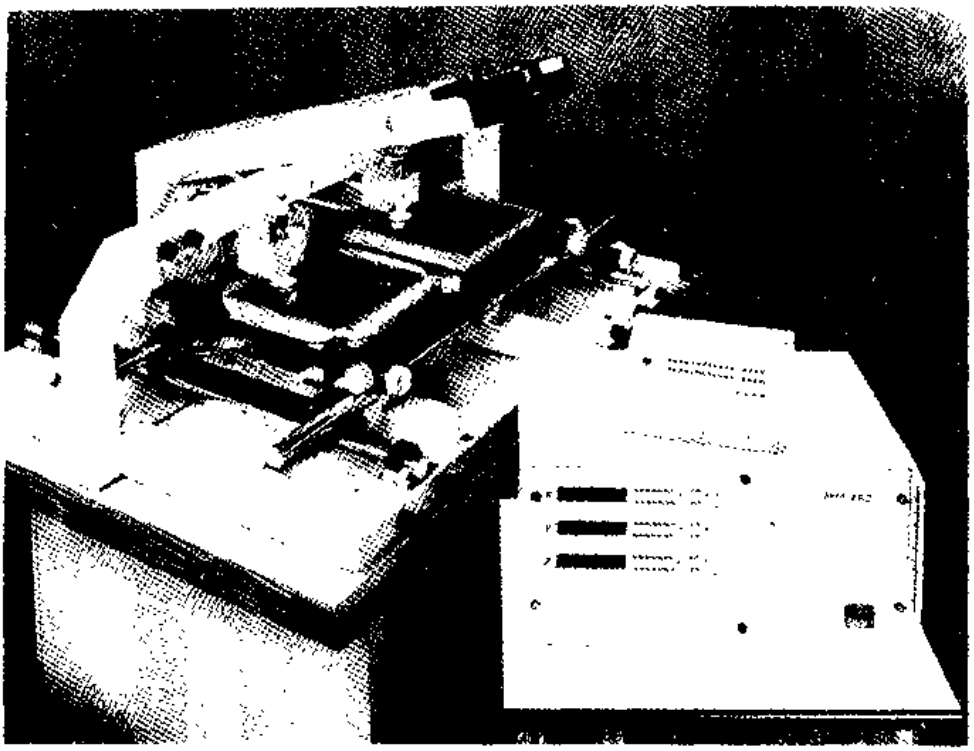


图 3-3-13

§3.4 像点坐标量测与系统误差预改正

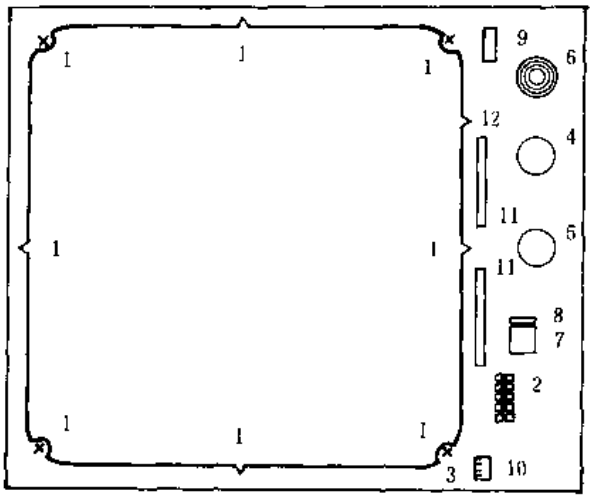
本节简要叙述像片在立体坐标量测仪和单像坐标量测仪上的放置、定向和量测方法，并讨论对像片坐标系统误差进行预改正问题。这里的讨论也适用于解析测图仪。

一、像片在坐标量测仪器上定向的方法

（一）任意放置像片法

由于航摄像片上具有框标和量测的像点坐标将进行解析处理，所以在立体或单像坐标量测仪上像片无需进行严格的定向，而可以任意放置像片。为了便于立体观测，通常只要大致使像主点与仪器中心重合，使基线方向与仪器 x 方向大致一致。此时所量测的像点坐标称为像片架坐标或仪器坐标。随后应利用平面相似变换公式，将像片架坐标变换为以像主点为原点的框标系坐标或称像片坐标。通常称该变换为内定向。为了进行内定向，必须量测像片上框标点的像片架坐标，并由航摄仪鉴定书中获得框标的理论坐标。

利用这种方法时，像片在像片架上无需作严格定向，不需要设立像片架旋转装置。同一片多次量测的结果可以在内定向之后融合在一起，而不会由于两次定向产生额外的误差。



1—8个框标；2—灰楔；3—像片号码；
4—时钟；5—气压测高计；6—水准气泡
7—日期和测区说明；8—相机号；9—暗
匣号；10—上部；11—外方位数据；12—第
九个非对称分布的框标

图 3-4-1

现代航摄仪一般具有4～8个框标（见图3-4-1）。位于像片四边中央为机械框标，位于像片四角为光学框标，它们一般均对称分布。根据量测相机的检定结果所提供的框标理论坐标或框标距理论值，用解析方法进行内定向，从而获得所量测各点的像片坐标。对于大像幅航天摄影像片（如$23\times46cm^2$像幅或$20\times37cm^2$像幅）往往具有更多的框标，以便于量测和内定向中进行系统误差预改正。

（二）辅助点定向法

该定向方法是用透明模片上的垂直线通过框标中心的方法，先在像片上刺出主点和在x（或y）轴上的辅助点。在仪器上定向时，首先将像主点对准仪器坐标系原点；然后旋转κ定向螺旋，使辅助点位于仪器坐标系x（或y）轴上。于是所规定的像片坐标系便与仪器坐标系相一致。

在此定向方法下，像点坐标量测值减去零位置，便是所需要的像点坐标，不再需要测定框标点的量测坐标。也不需要进行内定向。这种方法在我国曾长期沿用。底片变形改正则通过量测框标距的方法，求出x和y方向的底片变形改正系数。

但是，该方法是不严密的定向方法。第一，在像片上刺出主点和辅助点，其精度不好，方法陈旧；第二，需要在仪器上设置κ定向装置，不便于使量测满足阿贝比长原理；第三，同一片两次定向之间可能有较大的差别，影响最终计算结果。

因此，除中、小比例尺摄影测量外，一般不宜再采用此法定向。

（三）主点连线定向法

该方法是使主点连线（基线方向）与仪器的x轴一致。为此要在每片刺出像主点，在每片归心安置后，分别立体照准左、右主点，此时必须利用右、左片的κ螺旋。

这种定向法总能保证基线方向与仪器X轴方向一致，从而获得最好的立体效应，以利于提高立体照准精度。

用此方法可进行单独像对相对定向，或者为独立模型法区域平差提供计算的独立模型坐标。

二、解析内定向和底片变形改正

如果在仪器上量测了框标构像的直角坐标（x，y），并已知它们的理论坐标（x'，y'），则可在解析内定向过程中，一方面将量测的坐标归算到所规定的像片坐标系，另一方面也部分地改正了底片变形误差。

为此，通常采用多项式变换公式，用矩阵表示的一般公式为：

$$x' = x + At \tag{3-1}$$

其中 x 为量测的像点坐标，x' 为变换后的像点坐标，A 为变换矩阵，t 为变换参数。例如：

（1）线性正形变换公式（四个参数）

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a_0 + a_1 x - a_2 y \\ y' &= y + b_0 + a_2 x + a_1 y \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

相当于式（3-1)中：

$$\left.\begin{aligned} t^T &= [\,a_0\ b_0\ a_1\ \ a_2\,] \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & -y \\ 0 & 1 & y & \ \ x \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

（2）仿射变换（六个参数）

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a_1 + a_2 x + a_3 y \\ y' &= y + b_1 + b_2 x + b_3 y \end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

相当于式（3-1)中：

$$\left.\begin{aligned} t^T &= [\,a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3\ b_3\,] \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

（3）双线性变换公式（八个参数）

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ y' &= y + b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy \end{aligned}\right\} \tag{3-6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy \end{bmatrix}$$

（4）投影变换（八个参数）

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + 1}\ ,\quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + 1} \tag{3-7}$$

线性化形式为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & x^2 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & y^2 & xy \end{bmatrix} \tag{3-8}$$

在作业中，若仅量测三个框标，则采用（3-2）式，若量测了四个框标，则用仿射变换。只有量测了八个框标时，才宜用式（3-6)、(3-7)和（3-8)进行内定向。

严格的改正底片变形的方法是利用格网摄影机，即在承影面位置上装上带有精密方形格网的玻璃板。量测了全部格网点的坐标后，用高次正形变换或三次多项式来测定所有格网点处的像点变形误差。深入的研究还可以区分系统误差和偶然误差的大小。

但是由于此方法量测工作量明显地成倍增加，且格网的构像会妨碍立体观测，所以，目前格网摄影机的应用并不广泛。

如果未量测框标坐标而进行上文中的辅助点定向和 $o\,o$ 定向，则可以用量测框标距的方法，按下式计算所需要的像点坐标值：

$$x' = x\frac{dx'}{dx},\quad y' = y\cdot\frac{dy'}{dy} \tag{3-9}$$

或

$$\lambda_x = \frac{dx'}{dx},\quad \lambda_y = \frac{dy'}{dy} \tag{3-10}$$

关于系统误差的补偿与自检校光束法平差问题将在本书第八章中讨论。

本章习题与思考题

1. 摄影测量加密的目的和意义是什么？
2. 进行摄影测量加密需要利用哪些信息？
3. 摄影测量加密中的控制点、检查点、连接点和定向点各有何用途？
4. 简述设立像片连接点的各种方法，并比较其特点。
5. 如何设立人工标志点？标志的大小、形状和颜色应如何考虑？
6. 什么叫阿贝比长原理？为什么在测图仪器中不考虑该原理，而在加密仪器中要考虑这个原理？
7. 在立体坐标量测仪器上量测像片坐标时有哪几种像片定向方法？各有什么特点？
8. 对相邻两个立体像对用oo定向法量测了像片坐标，试问三度重叠内公共点在前后两个像对内所量测的像片坐标是否相同？如不相同，怎样才能获得中央片所有点在同一坐标系中的坐标？
9. 上题中如果改为像片任意放置定向法和辅助点定向法，情况将如何？
10. 当量测了三、四和八个框标时，像片内定向应相应采用什么公式？并请说明理由。

第四章　大地坐标系与摄影测量坐标系的变换

众所周知，地球为一旋转椭球体。地球上任一点的大地坐标是用大地经度、纬度来表示。为了测制地形图和在平面上表示的方便，通常运用一定的数学法则将大地坐标变换到平面上的平面直角坐标。我国自1952年开始正式采用高斯—克吕格平面直角坐标系，该坐标系X方向指向北（纵轴），Y方向指向东（横轴）。从椭球面到平面及其反变换是按照称为高斯—克吕格投影的一种等角横切椭圆柱投影．它保证在一定经差范围的投影带（如6°带或3°带）中，中央子午线投影后为直线，且长度不变，而且满足等角投影的柯西—黎曼条件。在国际上采用的其它投影变换还有墨卡托投影（一种等角正圆柱投影）等。

大地测量提供给摄影测量人员的平面控制点坐标（X_t，Y_t）是高斯—克吕格投影坐标。而高程h是沿铅垂方向到大地水准面的高度。我国目前采用的统一高程基准面是以青岛验潮站求得的1956年黄海平均海水面为准。

大家又知道，摄影测量平差往往是在对摄影测量平差处理自身有利的某个空间右手直角坐标系中进行。其XY平面为地球表面某点的切面，X方向与航摄飞行方向大体一致，Z方向垂直于该切面。

因此，对于测图目的的摄影测量平差而言，必须在平差前将控制点坐标转换到摄影测量坐标系，而在平差后，又必须将所有加密点的平差坐标变换到高斯—克吕格投影坐标中去。

本章主要讨论大地测量坐标与摄影测量坐标间的变换，分别介绍近似处理方法和严格处理方法，以满足小范围地形测图和大范围摄影测量与遥感的几何定位的需要。

§4.1　近似处理方法

近似处理方法是基于这样的假设：对于平面坐标而言，忽略地球的曲率，直接将高斯—克吕格坐标X_t，Y_t（左手坐标系），通过平面相似变换，变换为摄影测量坐标系X_p，Y_p（右手坐标系）。对于高程，则假设控制点高程h以地球球面为基准，面摄影测量高程Z_p则以切平面为基准。从而通过引入地球曲率改正的方法来解决它们之差异。

一、坐标正反变换公式

习惯上称由大地坐标到摄影测量坐标的变换为正变换，而由摄影测量坐标变换回到大地坐标称为反变换。显然，正变换在平差之前进行，反变换在平差后完成。

（一）正变换公式

只要已知两个控制点的高斯—克吕格坐标（X，Y_t）和摄测坐标（X_p，Y_p）即可进行。一般应取在平差范围内距离最远的两个点。

首先各自将坐标变换到以一个控制点为原点的情况，则平面相似变换中的平移项为零。参照图4-1-1，可以写出：

$$\begin{bmatrix} \Delta X_P \\ \Delta Y_P \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

下面来计算变换系数a和b。由式(4-1)可知：

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_t & \Delta X_t \\ \Delta X_t & -\Delta Y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_P \\ \Delta Y_P \end{bmatrix} \tag{4-2}$$

从中可求出：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta X_t^2 + \Delta Y_t^2} \begin{bmatrix} \Delta Y_t & \Delta X_t \\ \Delta X_t & -\Delta Y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_P \\ \Delta Y_P \end{bmatrix}$$

即

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\Delta X_P \Delta Y_t + \Delta Y_P \Delta X_t}{\Delta X_t^2 + \Delta Y_t^2} \\ b &= \frac{\Delta X_P \Delta X_t - \Delta Y_P \Delta Y_t}{\Delta X_t^2 + \Delta Y_t^2} \end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

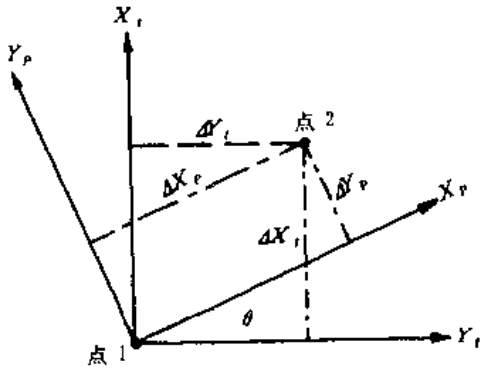


图 4-1-1

回到式(4-1)，可进而求出：

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2}{\Delta X_t^2 + \Delta Y_t^2}} \tag{4-4}$$

利用求出的系数a和b，按式(4-1)可将所有控制点坐标变换为摄影测量坐标。注意此时应将控制点的高程乘以比例尺系数归化到摄测坐标系中：

$$Z_P = \lambda Z_t \tag{4-5}$$

（二）反变换公式

对(4-1)式两边左乘以$\begin{bmatrix} b & a \\ a & -b \end{bmatrix}^{-1}$，并顾及到式(4-5)，可得到反变换公式为：

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b & a \\ a & -b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} b & a \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} \\ Z_t &= \frac{1}{\lambda} Z_P \end{aligned}\right\} \tag{4-6}$$

利用(4-6)式，可将全部摄影测量平差后所得到的加密点的地面坐标变换到测图所要求的高斯—克吕格坐标系中。

注意：

（1）旋转矩阵$\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$的行列式为－1，它体现了从左手坐标系到右手坐标系间的正确变换关系。

（2）实际作业中，为了便于质量控制，在正—反变换中往往将比例尺直接归化到大地坐标系，这样对下面的地球曲率改正将带来便利。

二、对摄测高程引入地球曲率改正

图 4-1-2中，摄测坐标系的XY平面与地球表面相切，所以摄测坐标系的高程起始面与地球表面之间存在着因地球曲率引起的高程差。在距离原点为D处的点A上，其高程差值$\Delta Z_R = AA'$。在假设地球为圆球的前提下，从图中可列出下列简单的几何关系：

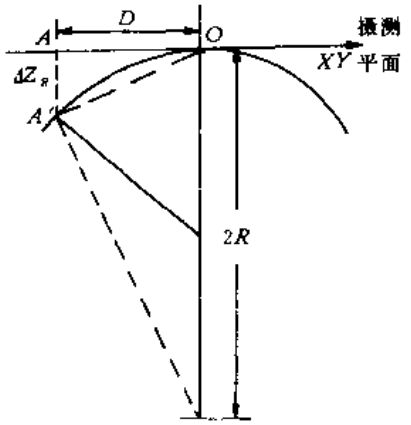


图 4-1-2

$$\frac{\Delta Z_R}{A'O} = \frac{A'O}{2R} \tag{4-7}$$

式中，R为地球平均半径

$$(A'O)^2 = D^2 + \Delta Z_R^2$$

但由于ΔZ_R远远小于D，故可近似地取

$$A'O \approx D$$

故有：
$$D = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2}$$

进而，
$$\Delta Z_R = \frac{D^2}{2R} \tag{4-8}$$

正如在基础摄影测量中已讲过，地球曲率改正值还可以引入到像片坐标系中，应用于诸如航带法空中三角测量（见§5.2）。

§4.2 大地坐标系与摄影测量坐标系间的严格变换

一、涉及到的坐标系

实现大地坐标与摄影测量坐标间的严格变换需要涉及下列各种坐标系：

（一）高斯—克吕格坐标（X_t、Y_t）与正常高h

正如上文所述，高斯—克吕格坐标是测绘专业中常用的一种平面直角坐标系坐标，是一种等角横切椭圆柱投影坐标，通常按3°带或6°带进行投影。我国各类基本图的测绘及大地测量所提供的控制点成果均系高斯—克吕格坐标在高程测量中所得到的高程h，是沿着该点铅垂线方向相对于大地水准面的高度，高程原点我国取青岛观象山的水准原点，系青岛验潮站求出的黄海平均海平面。平面坐标的大地原点则设在西安市附近。

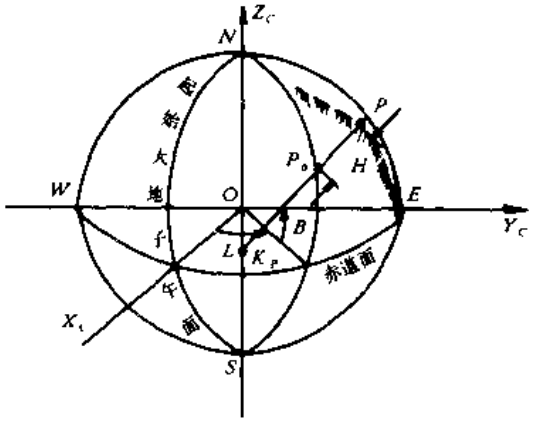


图 4-2-1

（二）大地坐标系坐标（L、B、H）

严格意义的大地坐标指的是地面上某一点的椭球面坐标，用大地经度L、大地纬度B（亦称地理坐标）和大地高H来表示（图4-2-1）。

L：过地面点P的大地子午面和起始子午

面所构成的二面角；

B：P点对于椭球的法线$P K_P$与赤道面的夹角；

H：P点沿法线到大地椭球面的距离，即图中的$\overline{PP_0}$。

（三）地心直角坐标系坐标（X_C, Y_C, Z_C）

这是一个在整体大地测量和航天摄影测量和遥感中常用到的笛卡尔右手直角坐标系（亦见图 4-2-1）。它以椭球中心O为原点*，Z_C轴与椭球的旋转轴一致，X_C轴位于起始子午面与赤道的交线上，Y_C轴亦在赤道面上且与X_C轴垂直，所以$O-X_C Y_C Z_C$构成右手直角坐标系。

（四）切面直角坐标系坐标（X_T, Y_T, Z_T）

切面直角坐标系也是右手直角坐标系，原点O_T一般选在测区中央的某个地面点上，过该点的椭球体法线为Z_T轴，正方向指向球体外，XY平面与该法线垂直，Y_T轴是过原点O_T的大地子午面与XY面的交线（见图4-2-2）。在大地测量学中称之为站心地平直角坐标系。

这种切面直角坐标系，既可以直接作为摄影测量几何处理中的物方坐标系，如光束法区域网平差、单片后方交会等；也可以用空间相似变换直接与摄影测量坐标系（$S-X_P Y_P Z_P$）进行坐标变换（见§2.6）

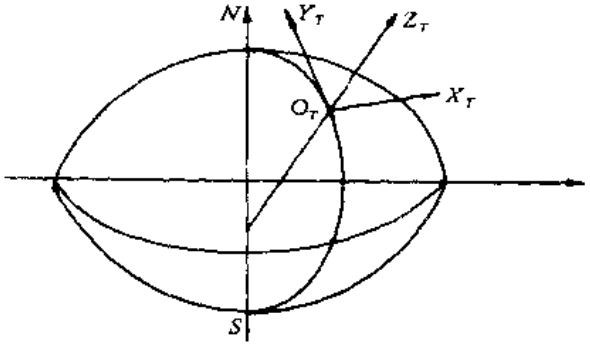


图 4-2-2

二、不同坐标系的正反算公式

（一）高斯—克吕格坐标与大地坐标间的正反算公式

1. 正算公式（由大地经纬度L, B计算高斯—克吕格投影坐标X_t, Y_t）

由大地测量可知（本书中不作推导）：

$$\left.\begin{aligned} X_t &= X_0 + \frac{N}{2\rho^2}\sin B\cdot\cos B\cdot l^2 + \frac{N}{24\rho^4}\sin B\cdot\cos^3 B\cdot \\ &\quad (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)\ l^4 \\ Y_t &= \frac{1}{\rho}N\cos B\cdot l + \frac{N}{6\rho^3}\cos^3 B\ (1 - t^2 + \eta^2)\ l^3 + D \end{aligned}\right\} \tag{4-9}$$

式中：$N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 B}}$

$t = \operatorname{tg} B$，

$l = L - L_0$，为相对于该投影带中央子午线L_0的经差，

$\eta = e'\cos B$，

$e = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}$，$e' = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{b^2}}$，（$a, b$为椭球长、短半轴）

* 严格讲，这里是球心直角坐标系，当椭球中心与地球质心重合时，这个坐标才叫地心坐标系。

X_0为该点纬度到赤道间的中央子午圈弧长，可用B为引数查表求得，或用下式计算：

$$X_0 = N\left[\frac{B}{V^2}+\left(\frac{B}{V^2}\right)^2\cdot\frac{3}{2}\eta^2 t-\left(\frac{B}{V^2}\right)^3\frac{\eta^2}{2}\left(t^2-1-\eta^2-4\eta^2t^2\right)\right]$$

而其中 $V=\sqrt{1+\eta^2}$ 。

此外，(4-9)式中的D为投影带号及加常数。

2.反算公式（由高斯—克吕格坐标计算大地经纬度）

已知X_t，Y_t求L，B的公式为：

$$\left.\begin{aligned}
B &= B_f-\frac{t_f}{2M_fN_f}Y_t^2+\frac{t_f}{24M_fN_f^3}\left(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2t_f^2\right)Y_t^4+\cdots\cdots\\
l &= \frac{1}{N_f\cdot\cos B_f}\cdot Y_t-\frac{1}{6N_f^3\cos B_f}\left(1+2t_f^2+\eta_f^2\right)Y_t^3+\frac{1}{120N_f^5\cos B_f}\\
&\quad\left(5+28t_f^2+24t_f^4\right)Y_t^5+\cdots\cdots\\
l &= L-L_0\quad(L=l+L_0)
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}10)$$

式中：$t_f=\tan B_f$，

B_f为底点纬度或垂足纬度，且有

$X_f=X_t$，$Y_f=0$。

$$B_f=V_f^2\left[\frac{X_t}{N_f}-\frac{3}{2}\eta_f^2t_f\cdot\frac{X_t^2}{N_f^2}+\frac{X_t^3}{N_f^3}\cdot\frac{\eta_t^2}{2}\left(t_f-1-\eta_f^2+5\eta_ft_f^2\right)\right]$$

此处，$V_f=\sqrt{1+e'^2\cos^2B_f}=\sqrt{1+\eta_f^2}$ ，

M_f为底点子午圈曲率半径，其值为：

$$M_f=\frac{a(1-e^2)}{W^3},\quad W=\sqrt{1-e^2\sin^2B_f}$$

N_f为底点卯酉圈半径，且

$$N_f=\frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2B_f+b^2\sin^2B_f}}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2B_f}}=\frac{a}{W}$$

所以，首先需用迭代法求出B_f，然后才能计算点的经纬度L和B。

利用电子计算机进行大地经纬度与高斯坐标间的正反变换时，可采用下列计算机用公式：

正算公式

$$\left.\begin{aligned}
X_t &= X_0+Nt\left[\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{24}\left(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4\right)m^4+\frac{1}{720}\right.\\
&\quad\left.(61-58t^2+t^4)\,m^6\right]\\
Y_t &= N\left[m+\frac{1}{6}\left(1-t^2+\eta^2\right)m^3+\frac{1}{120}\left(5-18t^2+t^4+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+14\eta^2-58\eta^2t^2\right)m^5\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}11)$$

式中，$m=(\cos B)\,l^0\cdot\frac{\pi}{180}$，其余符号同前。

各有关参数如下：

对于克拉索夫斯基椭球，

$a = 6378245\text{m}$

$e^2 = 0.00669342162297$

$e'^2 = 0.00673852541468$

$c = \frac{a^2}{b} = 6399698.90178\text{m}$

对于1975年国际椭球，

$a = 6378140\ \text{m}$

$e^2 = 0.00669438499959$

$e'^2 = 0.00673950181947$

$c = 6399596.65199\ \text{m}$

（4-11）式中子午线弧长X_0可如下求出：

对于克拉索夫斯基椭球，

$$X_0 = 111134.8611B^0 - (32005.7799\sin B + 133.9238\sin^3 B + 0.6973\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B;$$

对于1975年国际椭球，

$$X_0 = 111133.0047B^0 - (32009.8575\sin B + 133.9602\cdot\sin^3 B + 0.6976\sin^5 B + 0.0039\sin^7 B)\cos B$$

反算公式

$$\left.\begin{aligned} B^0 &= B_f^0 - \frac{1}{2}V_f^2 t_f\left[\left(\frac{Y_t}{N_f}\right)^2 - \frac{1}{12}(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2)\left(\frac{Y_t}{N_f}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{360}(61 + 90t_f^2 + 45t_f^4)\left(\frac{Y_t}{N_f}\right)^6\right]\frac{180}{\pi} \\ l^0 &= \frac{1}{\cos B_f}\left[\left(\frac{Y_t}{N_f}\right) - \frac{1}{6}(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2)\left(\frac{Y_t}{N_f}\right)^3 + \frac{1}{120}(5 + \right. \\ &\quad \left. + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2)\left(\frac{Y_t}{N_f}\right)^5\right]\frac{180}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}12)$$

其中，$V_f = \sqrt{1 + e'^2\cos^2 B_f}$，

$N_f = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 B_f}}$，

$t_f = \tan B_f$，

$\eta_f = e'\cos B_f$。

而底点纬度B_f系$X = X_t$（自赤道起算的子午线弧长）处所对应的大地纬度，可由下式直接求出：

对于克拉索夫斯基椭球，

当$X < 3000\text{km}$时，

$$B_f^0 = 9.04353301294X - 0.00000049604X^2 - 0.00075310733X^3 - 0.00000084307X^4 + 0.00000426055X^5 - 0.00000010148X^6$$

当3000km＜X＜6000km时，

$$B_f^0 = 27.11115372595 + 9.02468257083\ (X-3) - 0.00579740442\ (X-3)^2 - 0.00043532572\ (X-3)^3 + 0.00004857285\ (X-3)^4 + 0.00000215727\ (X-3)^5 - 0.00000019399\ (X-3)^6;$$

对于1975年国际椭球，

当X＜3000km时，

$$B_f^0 = 9.04369066313X - 0.00000049618X^2 - 0.00075325505X^3 - 0.00000084330X^4 + 0.00000426157X^5 - 0.00000010150X^6$$

当3000km＜X＜6000km时，

$$B_f = 27.11162289465 + 9.02483657729\ (X-3) - 0.00579850656\ (X-3)^2 - 0.00043540029\ (X-3)^3 + 0.00004858357\ (X-3)^4 + 0.00000215769\ (X-3)^5 - 0.00000019404\ (X-3)^6$$

其中X均以“千公里”为单位。以上正反算公式取自朱华统著《大地坐标系的建立》一书（测绘出版社1986年版）。

3.大地高与正常高之间的换算

设该点处大地水准面与参考椭球面的差距N'已知，则由图4-2-3可知，大地高与正常高之间的转换需要知道该点处的垂线偏差ε，然后方可求出：

$$H = h\cos\varepsilon + N' \tag{4-13}$$

当无重力观测值而未知垂线偏差ε时，可视$\varepsilon = 0$，故可取

$$H = h + N' \tag{4-14}$$

大地水准面与参改椭球面之差异N'在不同地区有不同的数据，可由地球大地测量学的成果中获得。对于研究范围小时它可视为常数。

（二）大地坐标与地心直角坐标的换算

1.由L, B, H计算X_c，Y_c，Z_c（正算）

图4-2-4表示过P点的子午椭圆，o为地心，a，b分别为其长、短半径，P_0为P点在大地椭球面上垂足，长半径方向用r轴表示，短半径方向为z轴，P_0点的纵横坐标可导出为：

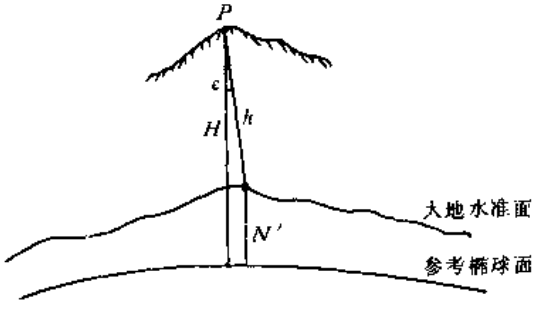


图 4-2-3

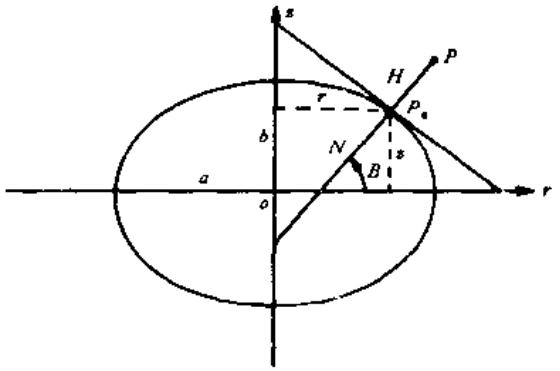


图 4-2-4

$$r=\frac{a^2\cos B}{\sqrt{a^2\cos^2 B+b^2\sin^2 B}}=\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}=N\cos B$$

$$z=\frac{b^2\sin B}{\sqrt{a^2\cos^2 B+b^2\sin^2 B}}=\frac{a\ (1-e^2)\ \sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}=N\ (1-e^2)\ \sin B$$

其中

$$N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$

为该点的地球卯酉圈曲率半径。

结合图 4-2-1，考虑 P 点的大地高 H 和经度 L，则得到 P 点的地心坐标为：

$$\left.\begin{aligned} X_C&=(N+H)\cos B.\cos L\\ Y_C&=(N+H)\cos B.\sin L\\ Z_C&=[N\ (1-e^2)+H]\sin B \end{aligned}\right\} \tag{4-15}$$

2. 由 X_C，Y_C，Z_C 求 L，B，H（反算）

此时一般必须用迭代方法解算，可以使用下列比较易于收敛的公式：

$$\left.\begin{aligned} \tan L&=\frac{Y_C}{X_C}\\ \tan B&=\frac{Z_C}{\sqrt{X_C^2+Y_C^2}}+\frac{e^2}{\sqrt{X_C^2+Y_C^2}}N\sin B\\ H&=\sqrt{X_C^2+Y_C^2+(Z_C+e^2N\sin B)^2}-N \end{aligned}\right\} \tag{4-16}$$

亦可采用下列公式直接解求：

$$\left.\begin{aligned} \tan L&=\frac{Y_C}{X_C}\\ B&=\tan^{-1}\left[\frac{Z_C}{\sqrt{X_C^2+Y_C^2}}\left(1+\frac{e^2}{1-e^2+\frac{H}{N}}\right)\right]\\ H&=(r-p)\ \left(1-\frac{1}{2}q^2\sin^2 2\varphi\right) \end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

式中：

$$r=\sqrt{(X_C^2+Y_C^2+Z_C^2)}$$

$$\sin^2\varphi=\frac{Z_C^2}{r^2},\quad \sin^2 2\varphi=4\ (\sin^2\varphi-\sin^4\varphi)$$

$$p=a\ (1+e'^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$q=\frac{e^2}{Z-e^2}$$

$$N=a\left[1-e^2\ (\sin^2\varphi+q\sin^2 2\varphi)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

该式来源请参见朱华统著《大地坐标系的建立》一书§4.10。

（三）地心直角坐标系与切面坐标系的转换

这是在不同原点的两个右手直角坐标系之间的相似变换，一般不存在比例尺的缩放问题，可以用第二章中的理论加以解决。

1.正算——由地心直角坐标（X_C, Y_C, Z_C）求切面直角坐标（X_T, Y_T, Z_T）

由图 4-2-2 和图 4-2-4 可知：

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_1\ (90^\circ - B_{0_T}) \cdot \boldsymbol{R}_3\ (90^\circ + L_{0_T}) \begin{bmatrix} X_C - X_{0_T} \\ Y_C - Y_{0_T} \\ Z_C - Z_{0_T} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin B_{0_T} & \cos B_{0_T} \\ 0 & -\cos B_{0_T} & \sin B_{0_T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin L & \cos L & 0 \\ -\cos L & -\sin L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_C - X_{0_T} \\ Y_C - Y_{0_T} \\ Z_C - Z_{0_T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin L_{0_T} & \cos L_{0_T} & 0 \\ -\sin B_{0_T}\cos L_{0_T} & -\sin B_{0_T}\sin L_{0_T} & \cos B_{0_T} \\ \cos B_{0_T}\cos L_{0_T} & \cos B_{0_T}\sin L_{0_T} & \sin B_{0_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_C - X_{0_T} \\ Y_C - Y_{0_T} \\ Z_C - Z_{0_T} \end{bmatrix} \tag{4-18}$$

其中，L_{0_T}, B_{0_T}为切面直角坐标系原点o_T在大地坐标系中的大地经、纬度；

X_{0_T}, Y_{0_T}, Z_{0_T}为o_T点的地心直角坐标

2.反算——由切面直角坐标（$X_T, Y_T\ Z_T$）求地心直角坐标（X_C, Y_C, Z_C）

将（4-18）式两端左乘以$\boldsymbol{R}_3^{-1}\ (90^\circ + L_{0_T})\ \cdot \boldsymbol{R}_1^{-1}\ (90^\circ - B_{0_T})$并移项得到(或直接由旋转矩阵特性写出)：

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{0_T} \\ Y_{0_T} \\ Z_{0_T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin L_{0_T} & -\cos L_{0_T}\sin B_{0_T} & \cos L_{0_T}\cos B_{0_T} \\ \cos L_{0_T} & -\sin L_{0_T}\sin B_{0_T} & \sin L_{0_T}\cos B_{0_T} \\ 0 & \cos B_{0_T} & \sin B_{0_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} \tag{4-19}$$

为便于进行正反算，切面直角坐标系的原点宜选在已知大地经纬度的地面控制点上。

三、不经过地心直角坐标系的实用变换公式

实用中也可以不经过上述一步步的坐标变换方式，而直接在任意两个坐标系之间进行坐标变换。

（一）大地坐标系（L, B, H）与切面直角坐标系（X_T, Y_T, Z_T）间的变换公式

1.正算公式：由L, B, H求X_T, Y_T, Z_T

根据王之卓教授《摄影测量原理》一书第十二章知：

$$\left.\begin{aligned} X_T &= (N+H)\ \cos B \sin L \\ Y_T &= (N+H)\ (\sin B \cdot \cos B_{0_T} - \sin B_{0_T}\cos B \cos l) + D\cos B_{0_T} \\ Z_T &= (N+H)(\sin B \cdot \sin B_{0_T} \cos B_{0_T} \cos B \cos l) - (N_{0_T} + H_{0_T}) + D\sin B_{0_T} \end{aligned}\right\} \tag{4-20}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} D &= e^2\ (N_{0_T}\ \sin B_{0_T} - N \sin B \\ l &= L - L_{0_T} \end{aligned}\right\} \tag{4-21}$$

上列公式中L, B, H 为所欲变换点的大地坐标，L_{0_T}、B_{0_T}, H_{0_T}为切面直角坐标系原点的大地坐标；N和N_{0_T}分别为过变换点和过切面坐标原点的地球卯西圈曲率半径，计算公式见上文。

2. 反算公式：由X_T, Y_T, Z_T求L, B, H

这里需采用迭代计算公式：

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}(L-L_{0_T}) &= \frac{N_{0_T}\overline{A}}{X_T} \\ \operatorname{tg}B &= \frac{\overline{B}}{\overline{C}} - \frac{\overline{D}(B)}{N_{0_T}\overline{C}} \\ H &= \frac{X_T}{\cos B \sin(L-L_{0_T})} - N \end{aligned}\right\} \tag{4-22}$$

或

$$H = \frac{1}{\overline{E}}\sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + (Z_T + N_{0_T} + H_{0_T})^2} - N$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \overline{A} &= \left(1 + \frac{H_{0_T}}{N_{0_T}}\right)\cos B_{0_T} - \frac{\sin B_{0_T}}{N_{0_T}}Y_T + \frac{\cos B_{0_T}}{N_{0_T}}Z_T \\ \overline{B} &= \left(1 + \frac{H_{0_T}}{N_{0_T}}\right)\sin B_{0_T} + \frac{\cos B_{0_T}}{N_{0_T}}Y_T + \frac{\sin B_{0_T}}{N_{0_T}}Z_T \\ \overline{C} &= \sqrt{\overline{A}^2 + \left(\frac{X_T}{N_{0_T}}\right)^2} \\ \overline{D} &= e^2(N_{0_T}\sin B_{0_T} - N\sin B) \\ \overline{E} &= \sqrt{1 + \frac{2\overline{D}}{N+H}\sin B + \left(\frac{\overline{D}}{N+H}\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{4-23}$$

计算中先求出$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, 并用初始值代入求$\overline{D}$和$\overline{E}$。然后由（4-22）式求L, B, H，再反过来求$\overline{D}$和$\overline{E}$的值，进而获得更精确的L, B, H值。如此反复，直至收敛为止。

3. 用圆球代替地球椭球体的简化公式

对于某些任务，特别是单个模型的情况，可用参考点上的圆球面代替地球椭球体参考面。此时，（4-23）中辅助数据$\overline{D}$, $\overline{E}$都不存在，可得到下列无需迭代的简化公式：

$$\left.\begin{aligned} X_T &= (R+H)\cos B \sin(L-L_{0_T}) \\ Y_T &= (R+H)[\sin B\cos B_{0_T} - \cos B\sin B_{0_T}\sin(L-L_{0_T})] \\ Z_T &= (R+H)[\sin B\sin B_{0_T} + \cos B\cos B_{0_T}\cos(L-L_{0_T})] - R - H_{0_T} \end{aligned}\right\} \tag{4-24}$$

和

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}B &= \frac{\overline{B}}{\overline{C}}, \\ \operatorname{ctg}(L-L_{0_T}) &= \frac{R\overline{A}}{X_T} \\ H &= \sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + (R+Z_T+H_{0_T})^2} - R \end{aligned}\right\} \tag{4-25}$$

（二）不经过大地坐标系和地心直角坐标系的坐标变换

根据Kraus一书中叙述的办法，也可以由高斯—克吕格坐标X_i, Y_i及相对于椭球面的高H出发，直接与切面直角坐标系进行坐标正反算。正算公式为（参考图4-2-5）：

$$X_T = (1 + H/R)\overline{Y_t} - \frac{1}{3R^2}(1 + H/R)\overline{Y_t}^3 + \cdots\cdots$$

$$Y_T = (1 + H/R)\overline{X_t} - \frac{1}{6R^2}(1 + H/R)\overline{X_t}^3 - \frac{1}{2R^2}(1 + H/R)\overline{X_t}\,\overline{Y_t}^2 + \cdots$$

$$Z_T = H - \frac{1}{2R}(1 + H/R)(\overline{X_t}^2 + \overline{Y_t}^2) + \cdots\cdots \qquad (4\text{-}26)$$

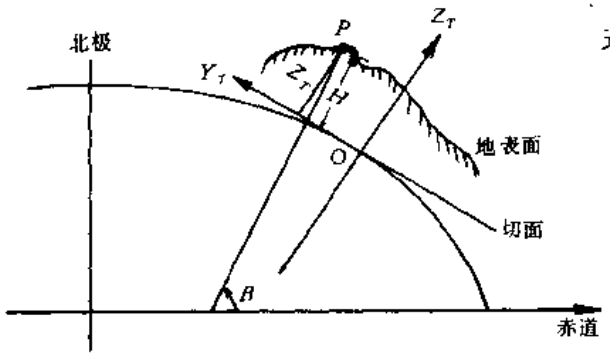


图 4-2-5

式中：X_T、Y_T、Z_T 为 P 点在以切点 O 为原点的切面直角坐标系中的坐标；

$\overline{Y_t}$，$\overline{X_t}$ 为高斯—克吕格坐标，已归化到以 O 为原点的数值；

H 为点相对于参考椭球面的高；R 为地球半径。

该式实用于 $80 \times 80\,km^2$ 的区域。

反算公式则为：

$$\left.\begin{aligned} H &= Z_T + \frac{1}{2R}(1 + Z_T/R)(X_T^2 + Y_T^2) + \cdots\cdots \\ \overline{Y_t} &= (1 - H/R)X_T + X_T Z_T^2/R^2 + X_T^3/(3R^2) + \cdots\cdots \\ X_t &= (1 - H/R)Y_T + Y_T Z_T^2/R^2 + Y_T^3/6R^2 + Y_T X_T^2/2R^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}27)$$

在$200 \times 200\,km^2$范围内换算精度达到几个毫米的公式可参见K.Hubeny的文章(BuL, 1978, 46, 35—38)。

§4.3 各种变换方法在实际中的应用

到目前为止，绝大多数的摄影测量平差均在切面直角坐标系中进行。一般均采用近似方法（§4.1）来处理大地坐标系与摄影测量坐标系之间的变换。这样的处理比较简单，可以直接由控制点的高斯—克吕格坐标和正常高参加平差，而无需提供其它大地测量和重力测量信息。当摄影测量平差区域不大时，这样做是允许的。

但是，对于非测图目的的高精度摄影测量加密，换算精度应达到几个毫米。此时对于区域大小为$80 \times 80\,km^2$以内时，可采用（4-26）、（4-27）式。如果区域更大，则应采用更精确的公式，或者经过大地坐标和地心直角坐标一步步地进行严格变换。

对于航天摄影测量和卫星遥感，研究的范围大，航高很高。此时应严格地顾及不同坐标系之间的变换关系。如果最终成果以经纬度地学编码表示，则可采用（4-20）和（4-22）式。如果只处理单个模型，可取用（4-24）和（4-25）式以简化计算。如果利用空间影像测图，最终成果以高斯-克吕格坐标表示，则仍可用（4-26）、（4-27）式。只有当精度要求较低时，才可用§4.1中的近似处理方法。

对于包括摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差（见下文第九章），最好利用经过地心坐标系变换的有关公式。此时特别要注意大地测量观测值误差方程式的建立和GPS及惯性导航数据观测值误差方程式的建立，不可简单地使用§4.1中的近似方法。

小结：可以用图4-3-1来概括各种可采用的坐标变换公式。

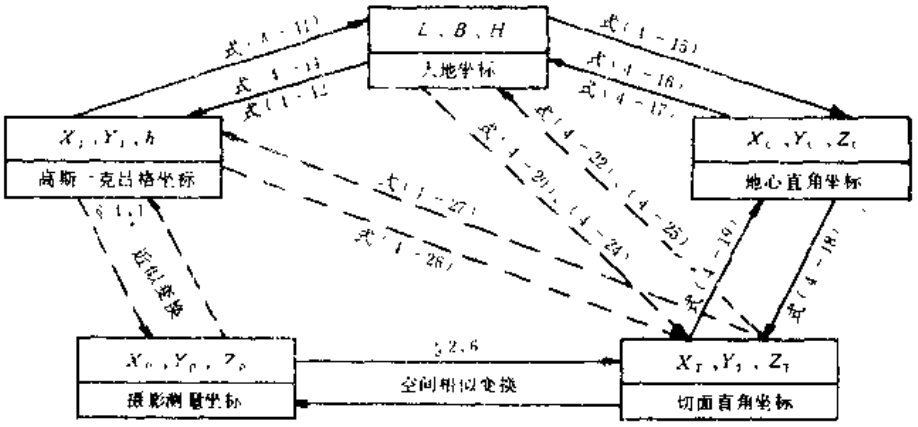


图 4-3-1

本章习题与思考题

1. 为什么要进行大地坐标系与摄影测量坐标系之间的变换？

2. 在当代摄影测量与遥感生产中，可能涉及到哪些坐标系？各坐标系是如何定义的？

3. 根据两个控制点的大地测量坐标和摄影测量坐标，如何最简便地进行坐标正反变换？此时旋转矩阵的行列式等于多少？

4. 叙述利用空间影像进行测图加密时严格的坐标变换公式。并指出在每一步变换中需要借助哪些参数？

5. 利用式（4-27）试推导§4.1节中近似变换公式的误差表达式。当允许误差（ΔX，ΔY，ΔZ）不大于5 mm时，试计算地面高差为1000 m时，区域网必须不超过多大范围？

6. 在实际作业中如何选择一个合适的处理方法来完成坐标系间的变换？

第五章　航带法空中三角测量

第二章中介绍了单片和双像解析摄影测量的理论和方法。本章在第二章的理论基础上讨论一条航带的解析摄影测量的理论和方法，它包括：航带模型的建立；航带模型的绝对定向；航带模型的非线性改正。

§5.1　概　　述

一、解析空中三角测量方法的分类

从二维的像片上量测的像点坐标求出该点在空间的三维坐标的方法称之为解析空中三角测量。解析空中三角测量方法按所处理区域的大小分类有三种：

单模型解析空中三角测量和双模型解析空中三角测量等；

单航带解析空中三角测量；

区域网解析空中三角测量。

按所采用的数学模型可分三类：

航带法解析空中三角测量；

独立模型法解析空中三角测量；

光线束法解析空中三角测量。

二、航带法解析空中三角测量的基本思想与流程

航带法解析空中三角测量研究的对象是一条航带的模型，把一个航带模型视为一个单元模型进行解析处理，因此这种方法首先把许多立体像对构成的单个模型连结成航带模型。由于在单个模型连成航带模型的过程中，各单个模型中偶然误差和残余的系统误差将传递到下一个模型中，由于这些误差传递累积的结果使航带模型产生扭曲变形，所以航带模型经绝对定向以后还需作模型的非线性改正，才能得到所需的结果，这便是航带法解析空中三角测量的基本思想。

量测了像点坐标之后，航带法解析空中三角测量的主要流程：

（1）像点坐标系统误差的改正；

（2）像对的相对定向；

（3）模型连接——构成自由航带网；

（4）航带模型的绝对定向；

（5）航带模型的非线性改正。

这些都是在电子计算机上用相应的计算机程序实现的，可见程序设计对解析空中三角

测量是何等重要。

§5.2 自由航带网的构建

一、像点坐标系统误差的改正

（一）摄影材料的变形改正

根据像片上框标位置的不同，采用不同的改正方法。

1.四个框标位于像片的四个角隅

这种形式的框标不仅能改正均匀和不均匀的变形，而且当像片上存在使矩形 1 2 3 4 变为四边形1′2′3′4′的图形变形时，亦能进行改正（如图5-2-1）。

当已知四个框标相对于主点的正确坐标值时，按下式进行像点坐标改正：

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ y' &= b_1 - b_2 x + b_3 y + b_4 xy \end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

式中：x'，y'为正确的像点坐标值；

x，y为量测的像点坐标值；

a_i，b_i为待定的系数。

将四个框标的正确坐标值和量测值代入式（5-1)中，求得待定的八个系数，之后，用式（5-1)即得到经过材料变形改正后的坐标。

2.四个框标位于像片四边的中央

如图5-2-2所示，这种形式的框标可以改正底片的均匀和不均匀的变形。当已知框标之间距离的正确值时，可按下式进行材料变形的改正：

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\,\frac{L_x}{l_x} \\ y' &= y\,\frac{L_y}{l_y} \end{aligned}\right\} \tag{5 2}$$

式中：L_x，L_y为框标之间距离的正确值；

l_x，l_y为框标之间距离的量测值；

x，y为像点坐标的量测值；

x'，y'为经材料变形改正后的坐标。

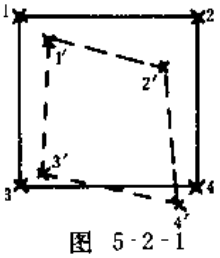


图 5-2-1

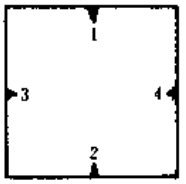


图 5-2-2

若对像片逐片量测框标之间距离，则可进行逐片逐点的改正。若只对航带的首、中、末三片的框标进行量测，那么取其平均值$l_{x均}$，$l_{y均}$代入式（5 2)中进行计算。

（二）摄影机物镜畸变差的改正

这里讨论的是物镜对称畸变差，非对称畸变差的改正未包括在内。对称的均匀畸变差可用以下形式的多项式来表达：

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1 &= -x'(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4)\\ \Delta y_1 &= -y'(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4)\end{aligned}\right\} \qquad (5\ 3)$$

式中：$r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Δx_1，Δy_1 为像点坐标改正数；

x'，y' 为像点坐标；

k_0，k_1，k_2 为物镜畸变差改正系数，由摄影机的检验报告中获得。

（三）地球曲率改正

除了按第四章严格顾及地球曲率外，也可以通过对像点坐标的改正来近似地顾及地球曲率的影响。由地球曲率引起像点坐标在辐射方向的改正为：

$$\delta = \frac{r^3}{2R} \cdot \frac{H}{f^2} \qquad (5\text{-}4)$$

式中：δ 为地球曲率引起像点坐标径向改正；

r 为像点至像主点间的距离；

f 为摄影机焦距；

H 为航高；

R 为地球的曲率半径。

像点坐标x、y的改正分别为：

$$\left.\begin{aligned}\delta_x &= \frac{x'}{2}\left(\frac{r}{f}\right)^2\left(\frac{H}{R}\right)\\ \delta_y &= \frac{y'}{2}\left(\frac{r}{f}\right)^2\left(\frac{H}{R}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}5)$$

（四）大气折光差的改正

大气折光引起像点在辐射方向的改正为：

$$\left.\begin{aligned}\Delta_y &= -f\left(1 + \frac{x'^2 + y'^2}{f^2}\right)\gamma_f\\ \gamma_f &= \frac{n - n_H}{n \cdot n_H}\operatorname{tg} i_H\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}6)$$

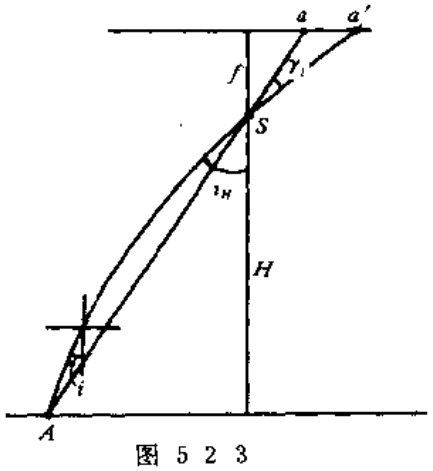


图 5 2 3

式中：Δ_y 为折光差引起的像点径向改正值；

γ_f 为折光差角；

x'，y' 为像点坐标；

i_H 为在高度H处光线的折射角；

n 为地面的大气折射率；

n_H 为高度H 处的大气折射率；

f 为摄影机焦距。

由式（5 6）可以求得大气折光差引起像点坐标的改正为：

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{x'}{r}\Delta_r \\ dy &= \frac{y'}{r}\Delta_r \end{aligned}\right\} \qquad (5\ 7)$$

利用（5-6）和（5 7）式进行大气折光差改正需要已知地面和飞行高度上的大气折射率n和n_H。一般在程序中习惯用下列公式来改正大气折光的影响（汉诺威大学BLUH程序）：

$$\Delta_r = \left(0.113\ (P1 - P2)\cdot\frac{Z_H}{Z_H - Z_G} - \frac{Z_H\cdot r\cdot 2410}{Z_H^2 - 6Z_H + 250}\right.$$
$$\left. - \frac{Z_G\cdot r\cdot 2410}{Z_G^2 - 6Z_H + 250}\cdot\frac{Z_G}{Z_H}\right)\frac{r + r^3}{f^2}\cdot 10^{-6} \qquad (5\text{-}6a)$$

式中：$P1$和$P2$表示地面和摄影高空处的大气压力，且有：

$$P1 = e^{6.94\ Z_G\cdot 0.125}$$

$$P2 \quad e^{6.94 - Z_H\cdot 0.125}$$

r为像径，f为摄影机主距。Z_H为绝对航高，Z_G为地表面平均海拔高度，两者均以km计。该式适用于$Z_H < 12$km，$Z_G < 4$km。

或者，由下式计算（取自德国《摄影测量手册》Wichmann 1989年第四版）：

$$\left.\begin{aligned} \Delta_r &= -\frac{r}{f^2}\ (f^2 + r^2)\Delta\tau_0 \\ \Delta\tau_0 &= \frac{T}{e} - \frac{Q_H - Q_G}{Z_H - Z_G},\ e = 636620 \end{aligned}\right\} \qquad (5\ 6b)$$

$$T = 178.46 - 17.14Z_H - 0.6296Z_H^2 - 0.01071Z_H^3 + 0.000077Z_H^4$$
$$Q_H = (2803.11Z_H - 134.629Z_H^2 + 3.2966Z_H^3 - 0.01205Z_H^4 + 0.000242Z_H^5)10^{-7}$$
$$Q_G = (2803.11Z_G - 134.629Z_G^2 + 3.2966Z_G^3 - 0.04205Z_G^4 + 0.000242Z_G^5)10^{-7}$$

利用（5-6a）和（5 6b）式时，只需已知地面平均海拔高度和绝对航高。

最后，经摄影材料变形、摄影机物镜畸变、地球曲率、大气折光差改正后的像点坐标为

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + \Delta x_1 + \delta x + dx \\ y &= y' + \Delta y_1 + \delta y + dy \end{aligned}\right\} \qquad (5\ 8)$$

式中：x, y为经过系统误差改正后的像点坐标；

x', y'为经过摄影材料变形改正后的像点坐标；

$\Delta x_1, \Delta y_1$为畸变差引起像点坐标的改正数；

$\delta x, \delta y$为地球曲率引起像点坐标的改正数；

dx, dy为大气折光差引起像点坐标的改正数。

以上系统误差改正适用于本书以后介绍的任一种解析空中三角测量方法。在后面所引用的像点坐标，均认为已经作过系统误差改正的处理。

二、连续像对相对定向与模型连接

这里着重介绍，如何将已经完成连续像对相对定向的立体模型联成自由航带网的理论和方法。

在§2.4中已经介绍过连续像对相对定向的理论和方法，这里不再重复。连续像对相对定向后，各立体模型的空间辅助坐标系相互平行，仅仅是坐标原点不同。因此，相邻模型之间公共点具有以下关系，如图5-2-4所示：

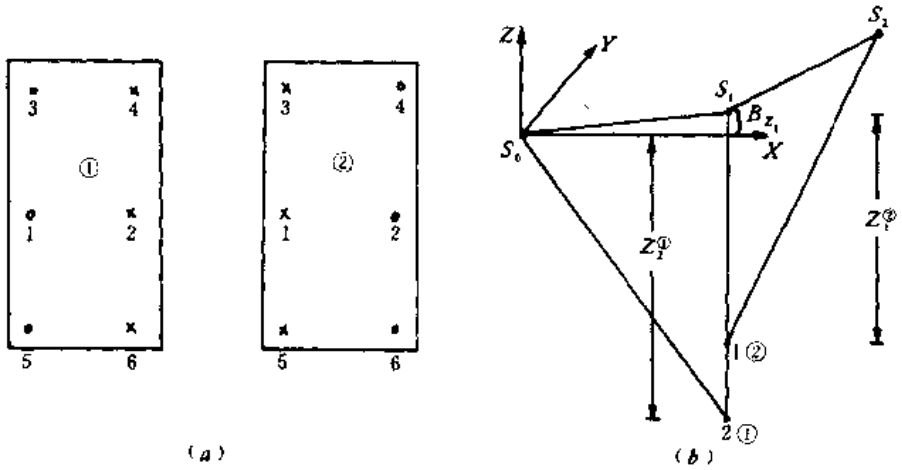


图 5-2-4

图5-2-4中①、②表示模型的编号，模型①中2、4、6与模型②中1、3、5是同名点。如果前后两个模型比例尺一致，则点1在模型②中的高程与点2在模型①中的高程有以下关系：

$$Z_1^{②} = Z_2^{①} - B_{Z_1} \tag{5-9}$$

因为图5-2-4（b）中的B_{Z_1}为正值，$Z_1^{②}$，$Z_2^{②}$为负值，所以上式右端B_{Z_1}前为负号。

如果前后两个模型的比例尺不一致，则

$$Z_1^{②} \neq Z_2^{①} - B_{Z_1}$$

其比例尺的归化系数为：

$$k = \frac{Z_2^{①} - B_{Z_1}}{Z_1^{②}} \tag{5-10}$$

式中：$Z_2^{①}$为模型①中2点的坐标；

$Z_1^{②}$为模型②中1点的坐标；

B_{Z_1}为在模型①中求得的相对定向元素B_Z。

实际生产作业时，比例尺归化系数k是取用由三个公共点2、4、6（指前一模型而言）求得三个k值的平均值，即

$$k_{均} = \frac{1}{3}(k_2 + k_4 + k_6) \tag{5-11}$$

求得模型比例尺归化系数以后，在后一模型中，每一模型点的空间辅助坐标以及基线

分量B_x、B_y、B_Z均需乘以归化系数k，就获得与前一个模型比例尺一致的坐标。由此可见模型连接的实质就是求出相邻模型之间的比例尺归化系数k。

下面说明如何求出自由航带网中任一模型里任一点的摄影测量坐标（以后简称摄测坐标）。

如图5 2-5所示，S_0、S_1、S_2为摄站点，由S_0、S_1组成航线的第一模型、S_1、S_2组成第二模型。模型点E相对于S_0的空间辅助坐标为NX_1、NY_1、NZ_1。右摄站S_1相对于S_0的空间辅助坐标为BX_1，BY_1，BZ_1。

设摄站点S_0的摄测坐标为$(X_P)_{S_0}$、$(Y_P)_{S_0}$、$(Z_P)_{S_0}$，则S_1的摄测坐标为：

$$\left.\begin{aligned}(X_P)_{S_1} &= (X_P)_{S_0} + mBX_1\\(Y_P)_{S_1} &= (Y_P)_{S_0} + mBY_1\\(Z_P)_{S_1} &= (Z_P)_{S_0} + mBZ_1\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}12)$$

第一模型中模型点i的摄测坐标为：

$$\left.\begin{aligned}X_{P_i} &= (X_P)_{S_0} + mNX_{1_i}\\Y_{P_i} &= \frac{1}{2}\left[(Y_P)_{S_0} + mNY_{1_i} + (Y_P)_{S_1} + mN'Y_{2_i}\right]\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}13)$$

$$Z_{P_i} = (Z_P)_{S_0} + mNZ_{1_i}$$

通常假定

$$(X_P)_{S_0} = (Y_P)_{S_0} = 0,\ (Z_P)_{S_0} = mf$$

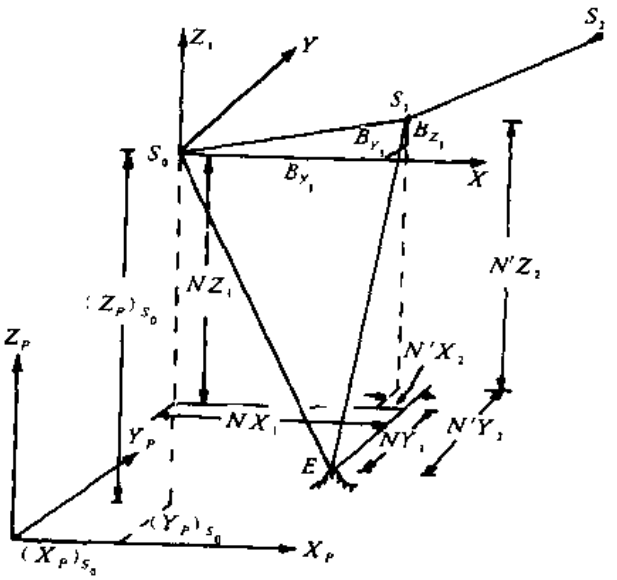


图 5-2-5

式中m为以千为单位的第一模型比例尺分母，乘以m意味着将模型点坐标变成以m为单位。

对于第二个模型和以后各模型的摄站点及模型点的摄测坐标应顾及到模型比例尺归化系数k，即

第二模型及以后各模型的摄站点的摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned}(X_P)_{S_2} &= (X_P)_{S_1} + kmBX_2\\(Y_P)_{S_2} &= (Y_P)_{S_1} + kmBY_2\\(Z_P)_{S_2} &= (Z_P)_{S_1} + kmBZ_2\end{aligned}\right\} \quad (5\ 14)$$

第二模型及以后各模型的模型点的摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned}X_P &= (X_P)_{S_1} + kmNX_1\\Y_P &= \frac{1}{2}\left[(Y_P)_{S_1} + kmNY_1 + (Y_P)_{S_2} + kmN'Y_2\right]\\Z_P &= (Z_P)_{S_1} + kmNZ_1\end{aligned}\right\} \quad (5\ 15)$$

式中各模型的左摄站的坐标，如式（5-14），（5 15）中的$(X_P)_{S_1}$、$(Y_P)_{S_1}$、$(Z_P)_{S_1}$均由前一个模型求得。BY_2、BZ_2均为本像对求得的相对定向元素，BX_2由本像对2点的左右视差

P_2 代替。X_1、Y_1、Z_1 为左像点的空间辅助坐标；X_2、Y_2、Z_2 为右像点的空间辅助坐标。

这里还要说明的一点，就是在公式（5-13），（5 15）中模型点的摄测坐标Y_P均用由左右摄站计算结果的平均值，这是由于计算N，N'的公式来自式（2 94）的第一、第三两式的结果，它们不一定能满足第二式，即$NY_1 + B_Y + N'Y_2$。因此取用均值更合理些。

三、单独像对相对定向与模型连接

单独像对相对定向已在§2.4中介绍过了，这里着重讨论已完成单独像对相对定向后，两个模型之间的模型连接问题。

单独像对相对定向与连续像对相对定向不同的一点是，前者每个模型的空间辅助坐标系不相互平行，因此模型连接不能采用求比例尺归化系数的办法，而是根据相邻两个模型的公共连接点和公共摄站点进行空间相似变换完成模型之间的连接（参见§2.5）。

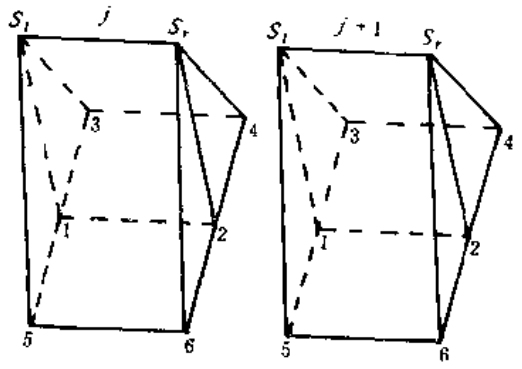


图 5 2-6

图5-2 6表示第j和$j+1$ 两个相邻的模型，其中第j模型的2、4、6点与第$j+1$模型的1、3、5点是同名点，它们的空间辅助坐标应当相等；j模型的右摄站与$j+1$模型的左摄站是同名摄站，它们的空间辅助坐标也应当相等，即

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{j}_{2,4,6} = \lambda R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{j-1}_{1,3,5} + \begin{bmatrix} Xs \\ Ys \\ Zs \end{bmatrix}^{j} \qquad (5\ 16)$$

式中：$j, j+1$ 为模型的编号；

1、3、5和2,4,6表示在相应模型中的点号；

$(Xs, Ys, Zs)^j$ 表示j模型右摄站的坐标。

为了书写方便，式（5 16）中2,4,6与1,3,5的下标省略。

由于在相似变换中，$j+1$模型的坐标原点设在左摄站点，因此，这里空间相似变换解求的七个参数中的三个平移量可以视为已知，即j模型的右摄站坐标。这样可以采用以下的误差方程式求解，即

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & -Z & O & -Y \\ Y & O & -Z & X \\ Z & X & Y & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Phi \\ d\Omega \\ dK \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} \qquad (5\cdot 17)$$

式中

$$\begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{j} - \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{j+1} - \begin{bmatrix} X_{S_r} \\ Y_{S_r} \\ Z_{S_r} \end{bmatrix}^{j} \tag{5-18}$$

利用模型之间的公共点，由式（5-17），(5-18）列出法方程式进行逐渐趋近求解，求得空间相似变换的参数以后，由下式求得经模型连接后的 $j+1$ 模型中的任一点 i 的坐标，即

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}^{(j+1)_{新}} = \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}^{j+1} + \begin{bmatrix} X_{S_r} \\ Y_{S_r} \\ Z_{S_r} \end{bmatrix}^{j} \tag{5-19}$$

如此下去，就完成一条航带模型连接工作。摄站点和模型点的摄测坐标由下式计算：

第一个模型

$$\left.\begin{aligned} (X_P)_{S_1} &= (X_P)_{S_0} + mB_{X_1} \\ (Y_P)_{S_1} &= (Y_P)_{S_0} \\ (Z_P)_{S_1} &= (Z_P)_{S_0} \end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{P_i} &= (X_P)_{S_0} + mX_i \\ Y_{P_i} &= (Y_P)_{S_0} + mY_i \\ Z_{P_i} &= (Z_P)_{S_0} + mZ_i \end{aligned}\right\} \tag{5-20a}$$

第二个和以后各模型

$$\begin{bmatrix} B_{X_2} \\ B_{Y_2} \\ B_{Z_2} \end{bmatrix} = \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} B \\ O \\ O \end{bmatrix} \tag{5-21}$$

$$\left.\begin{aligned} (X_P)_{S_2} &= (X_P)_{S_1} + mB_{X_2} \\ (Y_P)_{S_2} &= (Y_P)_{S_1} + mB_{Y_2} \\ (Z_P)_{S_2} &= (Z_P)_{S_1} - mB_{Z_2} \end{aligned}\right\} \tag{5-22}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{P_i} &= (X_P)_{S_1} + mX_{i\,新} \\ Y_{P_i} &= (Y_P)_{S_1} + mY_{i\,新} \\ Z_{P_i} &= (Z_P)_{S_1} + mZ_{i\,新} \end{aligned}\right\} \tag{5-23}$$

式中 $X_{i\,新}$、$Y_{i\,新}$、$Z_{i\,新}$ 表示由式（5-19）求得的空间辅助坐标，其余符号含义与连续法相对定向模型连接公式中符号相同。

四、带模型连接条件的相对定向

带模型连接条件的相对定向与不带模型连接条件相对定向的差别，在于相对定向元素的解算过程中，不仅考虑到定向点上残余上下视差为零或小于某一限差的条件，而且还要顾及模型之间公共点在前后两个模型中求得的空间辅助坐标相等的条件。在满足这两个条件的前提下，所完成的相对定向，既实现了定向点上残余上下视差为零的条件，又完成了模型的连接。

如图5-2-7所示，按 e_i 和 e_{i+1} 分别为 E 点在 i 和 $i+1$ 片上的构像。带有连接条件的相对

定向对模型$S_i\ S_{i+1}$进行处理时，S_{i-1}、e_{i-1}、L三点应满足共线条件：

$$\frac{X_2}{NX_1 - B_X} = \frac{Y_2}{NY_1 - B_Y} = \frac{Z_2}{NZ_1 - B_Z} \tag{5-24}$$

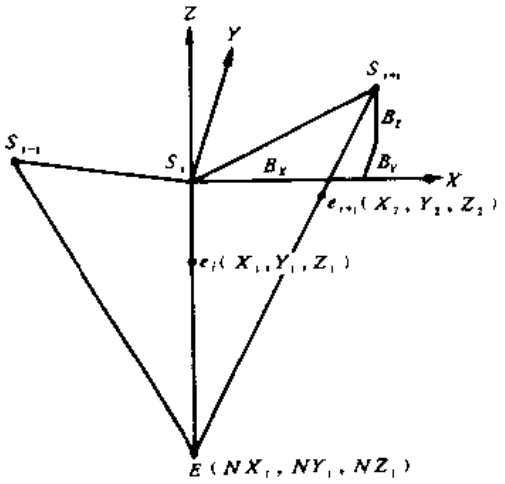


图 5-2-7

上式可以改写成

$$\left.\begin{aligned} F_Y &= Z_2(NY_1 - B_Y) - Y_2(NZ_1 - B_Z) = 0 \\ F_X &= Z_2(NX_1 - B_X) - X_2(NZ_1 - B_Z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-25}$$

式（5 25）便是模型连接点在相对定向中应满足的两个条件式。

以B_X, B_Y, B_Z和右片的三个角元素为自变量按泰勒级数展开，并保留到小值一次项：

$$\left.\begin{aligned} F_Y &= F_Y^0 + \frac{\partial F_Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_Y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F_Y}{\partial \kappa} d\kappa \\ &\quad + \frac{\partial F_Y}{\partial B_Y} dB_Y + \frac{\partial F_Y}{\partial B_Z} dB_Z = 0 \\ F_X &= F_X^0 + \frac{\partial F_X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_X}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F_X}{\partial \kappa} d\kappa \\ &\quad + \frac{\partial F_X}{\partial B_X} dB_X + \frac{\partial F_X}{\partial B_Z} dB_Z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-26}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_Y}{\partial \varphi} = (NY_1 - B_Y)\frac{\partial Z_2}{\partial \varphi} - (NZ_1 - B_Z)\frac{\partial Y_2}{\partial \varphi} = N' X_2 Y_2 \\ &\frac{\partial F_Y}{\partial \omega} = (NY_1 - B_Y)\frac{\partial Z_2}{\partial \omega} - (NZ_1 - B_Z)\frac{\partial Y_2}{\partial \omega} = N' Y_2^2 + N' Z_2^2 \\ &\frac{\partial F_Y}{\partial \kappa} = (NY_1 - B_Y)\frac{\partial Z_2}{\partial \kappa} - (NZ_1 - B_Z)\frac{\partial Y_2}{\partial \kappa} = -N' X_2 Z_2 \\ &\frac{\partial F_Y}{\partial B_Y} = -Z_2, \qquad \frac{\partial F_Y}{\partial B_Z} = Y_2 \end{aligned}\right\} \tag{5 27}$$

类似地可以得到：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_X}{\partial \varphi} = N' X_2^2 + N' Z_2^2, \qquad \frac{\partial F_X}{\partial \omega} = N' X_2 Y_2 \\ &\frac{\partial F_X}{\partial \kappa} = N' Y_2 Z_2, \quad \frac{\partial F_X}{\partial B_X} = Z_2, \qquad \frac{\partial F_X}{\partial B_Z} = X_2 \end{aligned}\right\} \tag{5-2a}$$

将式（5-27），(5-27a)中偏导数代入式(5-26)中，并在公式两端除以Z_2，经整理后可得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_Y^0}{Z_2} &= -\frac{X_2 Y_2}{Z_2} N' d\varphi - \left(Z_2 + \frac{Y_2^2}{Z_2}\right) N' d\omega + N' X_2 d\kappa + dB_Y - \frac{Y_2}{Z_2} dB_Z \\ \frac{F_X^0}{Z_2} &= -\left(Z_2 + \frac{X_2^2}{Z_2}\right) N' d\varphi - \frac{X_2 Y_2}{Z_2} N' d\omega - N' Y_2 d\kappa - \frac{X_2}{Z_2} dB_Z + dB_X \end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

设 $dB_Y = B_X d\mu$，$dB_Z = B_X dv$，$dB_X = B_X dm$ （5-29）

代入，并由式（5-25），可得：

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{F_Y^0}{Z_2} - NY_1 + N'Y_2 - B_Y \\ P &= \frac{F_X^0}{Z_2} - NX_1 - N'X_2 - B_X \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}30)$$

代入式（5-28）中，则

$$\left.\begin{aligned} Q &= -\frac{X_2Y_2}{Z_2}N'd\varphi - \left(Z_2 + \frac{Y_2^2}{Z_2}\right)N'd\omega + N'X_2d\kappa + B_Xd\mu - \frac{Y_2}{Z_2}B_Xdv \\ P &= \left(Z_2 + \frac{X_2^2}{Z_2}\right)N'd\varphi - \frac{X_2Y_2}{Z_2}N'd\omega - N'Y_2d\kappa - \frac{X_2}{Z_2}B_Xdv + B_Xdm \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}31)$$

上式便是带有模型连接条件的相对定向公式，每量测一个模型连接点就可以列出一对方程式（5-31），其中第一式简称Q方程，第二式简称P方程。写成误差方程式的形式为

$$\left.\begin{aligned} v_Q &= ad\varphi + bd\omega + cd\kappa + rd\mu + sdv - l_Q \\ v_P &= a'd\varphi + b'd\omega + c'd\kappa + s'dv - t'dm - l_P \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}32)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{X_2Y_2}{Z_2}N', \quad b = -\left(Z_2 + \frac{Y_2^2}{Z_2}\right)N', \quad c = X_2N' \\ r &= B_X \qquad s = -\frac{Y_2}{Z_2}B_X \\ l_Q &= NY_1 - N'Y_2 - B_Y \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}32a)$$

$$\left.\begin{aligned} a' &= -\left(Z_2 + \frac{X_2^2}{Z_2}\right)N', \quad b' = -\frac{X_2Y_2}{Z_2}N', \quad c' = N'Y_2 \\ s' &= \frac{X_2}{Z_2}B_X, \qquad t = B_X \\ l_P &= NX_1 - N'X_2 - B_X \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}32b)$$

像对中的非模型连接点，不受连接条件的约束，只要列出式（5-32）中的Q方程。

式（5-32）与不带模型连接条件的相对定向公式（2-97），（2-98）相比，前者有六个定向元素φ、ω、κ、B_Y、B_Z、B_X，多了一个B_X。B_X的引入，起到改变模型比例尺的作用，因此带连接条件的相对定向能在定向过程中完成模型连接的任务。由于在定向过程中要改变模型的比例尺，因此趋近过程中重复计算所使用的B_X值是变化的，不像不带连接条件相对定向解算过程中B_X的值始终不变。

另一个不同之点是误差方程式中常数项计算不相同。在

$$l_Q = NY_1 - N'Y_2 - B_Y$$

中的NY_1表示连接点在后一模型中相对于左摄站S_1的空间辅助坐标，在带连接条件相对定向过程中必须与前一模型中的同名点相对于前一模型右摄站S_2的空间辅助坐标$N'_{前}Y_{2前}$相等，即

$$\left.\begin{aligned} NY_2 &= N_{前}Y_{2前} \\ NX_1 &= N'_{前}X_{2前} \\ NZ_1 &= N'_{前}Z_{2前} \end{aligned}\right\} \tag{5-33}$$

l_Q中$N'Y_2$表示模型连接点在后一模型中相对于摄站S_{i+1}的空间辅助坐标，其N'可由下式求得：

$$N'Z_2 = NZ_1 - B_Z$$

将式（5-33）中第三式代入上式，可得：

$$N' = \frac{N'_{前}Z_{2前} - B_Z}{Z_2} \tag{5-34}$$

模型连接点的N'就按上式计算，非连接点的N'仍按常规方法计算。

在顾及关系式（5-33）的条件下，l_Q,l_P的公式可以写成：

$$\left.\begin{aligned} l_Q &= N'_{前}Y_{2前} - NY_2 - B_Y \\ l_P &= N_{前}X_{2前} - N'X_2 - B_X \end{aligned}\right\} \tag{5-35}$$

一条航带中，第一像对不存在模型连接的问题，当然不能采用带连接条件的相对定向方法。带连接条件的相对定向是从第二像对开始的，如果仍用六个定向点的话，这时可以列出九个误差方程式，因为在定向点1、3、5上多列出三个P条件方程，这样增加了多余观测，提高了求解的可靠性，便于发现粗差和进行粗差的定位。这是这种定向方法的优点。

与前面两种方法一样可以求得任一像对中任一模型点的摄测坐标如下：

第i模型中右摄站的摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned} (X_P)_{S_i} &= (X_P)_{S_{i-1}} + mB_X \\ (Y_P)_{S_i} &= (Y_P)_{S_{i-1}} + mB_Y \\ (Z_P)_{S_i} &= (Z_P)_{S_{i-1}} + mB_Z \end{aligned}\right\} \tag{5-36}$$

第一像对和其它像对中非连接点的摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_P &= (X_P)_{S_{i-1}} + mNX_1 \\ Y_P &= \frac{1}{2}\left[(Y_P)_{S_{i-1}} + mNY_1 + (Y_P)_{S_i} + mN'Y_2\right] \\ Z_P &= (Z_P)_{S_{i-1}} - mNZ_1 \end{aligned}\right\} \tag{5-37}$$

式中：$(X_P)_{S_{i-1}}$、$(Y_P)_{S_{i-1}}$、$(Z_P)_{S_{i-1}}$为像对中左摄站的摄测坐标；

$(Y_P)_{S_i}$为像对中右摄站的坐标；

m为像片比例尺分母（以千为单位）；

X_1、Y_1、Z_1为左像点的空间辅助坐标；

N、N'为由式（2-95）求得的投影系数。

第i像对（$i \geq 1$）中任一连接点的摄测坐标由下式计算：

$$\left.\begin{aligned} X_P &= (X_P)_{S_i} - mN'X_2 \\ Y_P &= (Y_P)_{S_i} - mN'Y_2 \\ Z_P &= (Z_P)_{S_i} - mN'Z_2 \end{aligned}\right\} \tag{5-38}$$

式中

$$N' = \frac{N'_{前} Z_{2前} \quad B_Z}{Z_2}$$

$(X_P)_{S_i}$、$(Y_P)_{S_i}$、$(Z_P)_{S_i}$为第i像对右摄站的摄测坐标；

X_2、Y_2、Z_2为右像点的空间辅助坐标。

这里需要说明的一点，就是每个像对中连接点的摄测坐标均由各像对的右摄站的摄测坐标来推算的，而不是用左摄站，这是因为在带连接条件的相对定向解算过程中，对连接点而言，任一像对的左像点的空间辅助坐标及其投影系数N均采用前一像对的相应值，若用左摄站进行计算，其结果必然与前一像对计算结果相同，由于这个缘故，用右摄站来推算连接点的摄测坐标比较合理。最后比较前后两个模型求得连接点的坐标较差，符合要求者，取均值作为最后结果。

§5.3 单航带自由网的绝对定向与非线性改正

在§5.2中建立起来的自由比例尺航带网，比例尺统一，但是网中任一点绝对位置是无法知道的，为了解决这个问题，需知道一定数量的控制点，以便作网的绝对定向。因为经绝对定向以后的航带网存在残余系统误差和偶然误差在模型连接中传递累积的影响，使航带网产生模型的扭曲，所以还要进行网的非线性变形的改正。以下逐一地说明这些问题。

一、航带网的绝对定向

航带网的绝对定向与单元模型绝对定向完全相同，只不过现在是把航带网当作单元模型来处理罢了。现将航带网绝对定向的主要过程归纳如下：

（1）将控制点的地面测量坐标转换成地面摄测坐标

选择分布在航带网首末像对中两个控制点，用式（4-3）和(4-1)计算出转换系数a，b，λ。然后再由式（4-1）将控制点的地面测量坐标转换成地面摄测坐标。

（2）重心和重心化坐标的计算

选择不位于一直线上，跨度尽量大的足够数量的控制点（至少两个平高控制点，一个高程控制点）作为绝对定向的定向点。利用这些定向点，由式（2-111)计算地面摄测坐标和摄测坐标的重心，由式(2-112)，(2-113)计算重心化的地面摄测坐标和重心化的摄测坐标。

（3）绝对定向误差方程式的建立和法方程式的求解

利用控制点的重心化坐标可以列出误差方程式：

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \overline{X}_P & -\overline{Z}_P & 0 & -\overline{Y}_P \\ 0 & 1 & 0 & \overline{Y}_P & 0 & \overline{Z}_P & \overline{X}_P \\ 0 & 0 & 1 & \overline{Z}_P & \overline{X}_P & \overline{Y}_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\lambda \\ d\Phi \\ d\Omega \\ d\kappa \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} \tag{5-39}$$

$$\begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{tP} \\ Y_{tP} \\ Z_{tP} \end{bmatrix} - \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} \overline{X}_P \\ \overline{Y}_P \\ \overline{Z}_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \tag{5-40}$$

然后由式(2-118),(2-117)列出法方程式的系数矩阵,逐渐趋近解出七个绝对定向元素。

(4) 绝对定向后坐标的计算

设经绝对定向后坐标为X、Y、Z,则

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} \overline{X}_P \\ \overline{Y}_P \\ \overline{Z}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \tag{5-41}$$

二、航带网的非线性改正

(一) 航带网的误差传播

航带网中的误差主要是系统误差和偶然误差。系统误差的影响在像点坐标的预处理中已经得到改正,但是并不彻底,有些残余的系统误差如:摄影材料的局部变形,摄影机物镜的非对称畸变差;仪器误差和人差等,将引起航带模型的变形。偶然误差主要来源于像点坐标的量测误差和其它偶然因素引起的误差,这种误差在同一张像片上不同的点位处出现时,大小不等、符号亦不相同。即使这些误差在不同像片的同一地方出现时,亦有同样的性质。

残余系统误差引起相对定向元素的误差在每个像对中产生的影响数值相同,符号一样,这种影响在模型连接过程的传递累积的结果产生模型扭曲,这是容易理解的。

偶然误差导致的相对定向元素误差,在模型连接过程中同样会产生模型的扭曲。以上不论是那种误差,在连接过程中传递的规律大致可以分为两类:

1.独立累积性误差

这种误差在传递过程中,对以后模型的影响,不随模型个数的增加而增大其影响。

假定在第1,2,…n,…$2n$个模型中产生的独立累积性误差相应地为$\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_n,\cdots\delta_{2n}$,则在任一个模型上其累积的总误差可以表示为:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{第}n\text{个模型} & [\delta]_n=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n \\ \text{第}2n\text{个模型} & [\delta]_{2n}=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n+\cdots+\delta_{2n} \end{array}\right\} \tag{5-42}$$

2.非独立累积性误差

这种误差在前一个模型中产生以后,在传递过程中对以后模型的影响,将随模型个数的增多而成比例的增加。

设在第1,2,…n,…$2n$个模型中产生的非独立累积性误差为δ_1、δ_2、…δ_n…δ_{2n},则在任一个模型中累积的总误差为:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{第}n\text{个模型} & [\delta]_n=n\delta_1+(n-1)\delta_2+\cdots+\delta_n \\ \text{第}2n\text{个模型:} & [\delta]_{2n}=2n\delta_1+(2n-1)\delta_2+\cdots+\delta_{2n} \end{array}\right\} \tag{5-43}$$

由系统误差或偶然误差引起的相对定向元素误差对模型点坐标的影响,有的属于独立累积性的,有的属于非独立累积性的。下面举几个例子说明这个问题

图5 3 1中，$S_0S_1S_2S_3$ 0 1 2 3表示进行相对定向没有误差时，空中三角测量构网的形状。当S_1投影光束在相对定向中引入db_2的误差时，原来正确的光线$\overline{S_1O}$，现在变为$\overline{S_1''O''}$，如果第一个投影光束没有误差，为了仍保持0点的正确位置，须将S_1投影光束向右移动一个db_2至S_1'处即可。这时模型点1变为1′。假定从S_1'以后投影光束不再有相对定向的误差，为了使第2个模型在完成相对定向后与第一模型连接，必须使光线$\overline{S_2'1}$通过1′点，则必须将S_2移至S_2'，这时模型点2变为2′。如此继续连接下去，模型点3变为3′，投影光束S_3移至S_3'。从图5-3 1可见，仅仅是第一个模型中S_1投影光束引起db_2的误差产生了比例尺传递的误差，这种传递误差对模型点位X的影响将随传递模型个数的增加而成比例地增加，如图中$33'>\overline{22'}>\overline{11'}$。因此$db_2$对模型点$X$坐标的影响是属于非独立累积性的。

db_2误差对模型点高程的影响，则属于独立累积性影响。图5 3 1中1′、2′、3′点上引起的高程变化都为ΔZ_1。

再看图5 3 2，$S_0S_1S_2S_3$ 0 1 2 3为没有相对定向误差时构网形状。假设S_1投影光束产生3 $d\varphi_1$误差，原来正确的光线$\overline{S_10}$变为$\overline{S_10''}$。要使0点高程不变，则需将投影光束S_1移

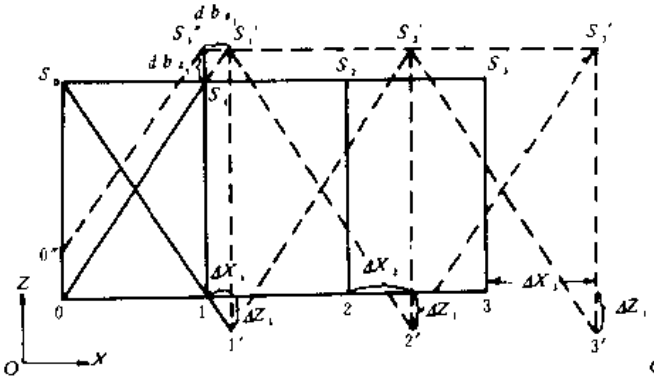


图 5-3 1

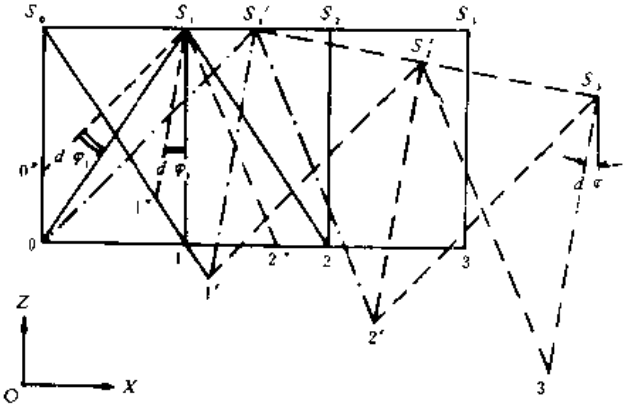


图 5 3 2

至S_1'，模型点1变为1′。假定S_1以后的各个光束在相对定向中不再产生误差，那么这时的$\overline{S_21}$必须与$\overline{S_20}$平行（S_21在图中未画），又为了保证模型的连接，$\overline{S_21}$必须通过1′点，这就必须使S_2投影光束移至S_2'，这时模型点2变为2′。如此继续下去，投影光束S_3移至S_3'，模型点3变为3′。由图可见，仅仅是第一个模型中S_1投影光束产生$d\varphi_1$误差对模型点位和高程的影响，这些影响随着传递模型个数的增加而成比例地增加。因此说$d\varphi$误差对模型点坐标X和Z的影响都是非独立累积性的。

这里仅以一个光束产生误差的影响作了讨论，若每个光束均有误差产生，则使航带模型产生弯曲和扭曲。

（二）航带法平差中常用的多项式改正公式

如果构成的自由航带网没有误差，自由航带网经绝对定向以后，即能求得每一点的地面测量坐标。实际上，误差是无法避免的，这些误差综合影响的结果使航带模型产生的变形，很难用一个数学模型精确地表达出来。可是，在实际作业中又必须知道这个变形的规律，以便进行改正。为了解决这个矛盾，数学中常采用“多项式逼近”的办法。

所谓“多项式逼近”就是取用一个多项式曲面$Z=\varphi(x,y)$来代替上述复杂的变形曲面，并使该曲面在经过航带网中已知点时，所求得坐标变形值与它们实际的变形值相等或使其差的平方和为最小，这就是利用多项式作航带网的非线性变形改正的依据。

选用的多项式，常有两种类型，一是对X、Y、Z分列的多项式；另一种是对平面坐标采用正形变换公式。下面分别介绍这两种类型的公式：

1.三次和二次多项式改正航带网非线性变形的公式

非线性变形改正需具有一定数量分布合理的控制点。设经绝对定向后，控制点的重心化坐标为$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$，相应点的重心化地面摄测坐标为$\overline{X}_{tp}$，$\overline{Y}_{tp}$，$\overline{Z}_{tp}$。对$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$应加入的变形改正为：

$$\begin{aligned}\Delta X &= A_0 + A_1\overline{X} + A_2\overline{Y} + A_3\overline{X}^2 + A_4\overline{X}\,\overline{Y} \boxed{+ A_5\overline{X}^3 + A_6\overline{X}^2\overline{Y}}\\ \Delta Y &= B_0 + B_1\overline{X} + B_2\overline{Y} + B_3\overline{X}^2 + B_4\overline{X}\,\overline{Y} \boxed{+ B_5\overline{X}^3 + B_6\overline{X}^2\overline{Y}}\\ \Delta Z &= C_0 + C_1\overline{X} + C_2\overline{Y} + C_3\overline{X}^2 + C_4\overline{X}\,\overline{Y} \boxed{+ C_5\overline{X}^3 + C_6\overline{X}^2\overline{Y}}\end{aligned} \qquad (5\ 44)$$

式中

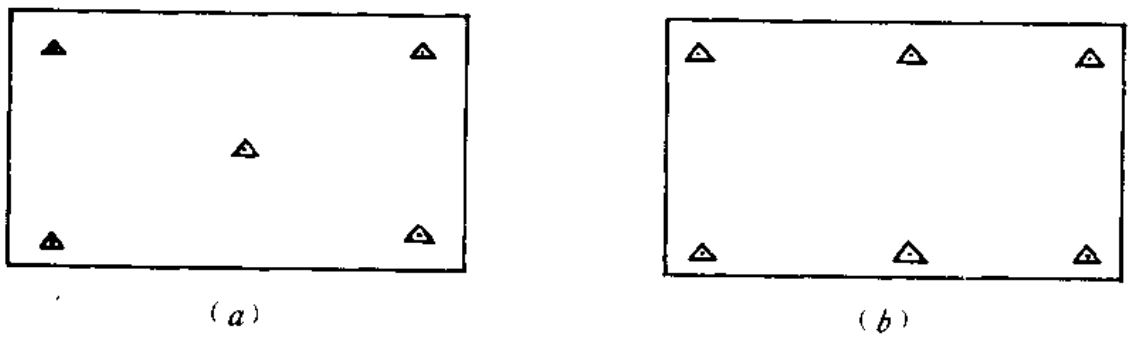
$$\Delta X = \overline{X}_{tp} - \overline{X},\ \Delta Y = \overline{Y}_{tp} - \overline{Y},\ \Delta Z = \overline{Z}_{tp} - \overline{Z} \qquad (5\ 45)$$

上式中□里的内容为采用三次多项式时应增加的内容。

（5-44）式并非完全的三次或二次多项式，而是略去了含Y的二次和三次项。

若用二次多项式改正非线性变形，则有十五个未知数，必须至少五个平高控制点。采用三次多项式改正非线性变形时，必须至少七个平高控制点。实际作业时，究竟采用二次还是三次多项式，取决于两个因素：

（1）足够数量的控制点，通常如图5-3-3所分布的控制点，宜用二次多项式。像图5-3-4所示的控制点分布，可用三次多项式改正非线性变形。



（a）　　（b）

图 5-3-3

（2）航带网的实际变形接近二次曲面时，用二次多项式有利，接近三次曲面时，用三次多项式改正有利。一般长航带才用三次多项式改正。

实际上，不论用哪一种多项式改正，均应有多余控制点，因此，用最小二乘法解求多项式中系数，其误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} -v_x &= A_0 + A_1\overline{X} + A_2\overline{Y} + A_3\overline{X}^2 + A_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ -v_y &= B_0 + B_1\overline{X} + B_2\overline{Y} + B_3\overline{X}^2 + B_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ -v_z &= C_0 + C_1\overline{X} + C_2\overline{Y} + C_3\overline{X}^2 + C_4\overline{X}\,\overline{Y} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+A_5\overline{X}^3 + A_6\overline{X}^2\overline{Y} \\ &+B_5\overline{X}^3 + B_6\overline{X}^2\overline{Y} \\ &+C_5\overline{X}^3 + C_6\overline{X}^2\overline{Y} \end{aligned} \left.\begin{aligned} &-l_x \\ &-l_y \\ &-l_z \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}16)$$

$$l_x = \overline{X}_{tp} - \overline{X},\ l_y = \overline{Y}_{tp} - \overline{Y},\ l_z = \overline{Z}_{tp} - \overline{Z} \quad (5\text{-}17)$$

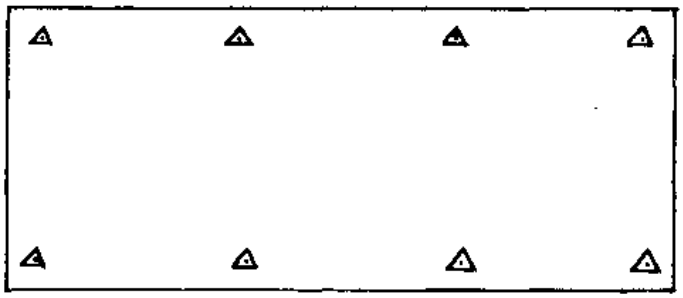


图 5-3-4

一般的二次或三次多项式改正非线性变形时，X、Y、Z坐标是分别进行的，求得式（5-16）中系数A_i、B_i、C_i以后按下式求得经非线性变形改正后的坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_{tp} &= X_{tp_x} + \overline{X} + A_0 + A_1\overline{X} + A_2\overline{Y} + A_3\overline{X}^2 + A_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ Y_{tp} &= Y_{tp_x} + \overline{Y} + B_0 + B_1\overline{X} + B_2\overline{Y} + B_3\overline{X}^2 + B_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ Z_{tp} &= Z_{tp_x} + \overline{Z} + C_0 + C_1\overline{X} + C_2\overline{Y} + C_3\overline{X}^2 + C_4\overline{X}\,\overline{Y} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+A_5\overline{X}^3 + A_6\overline{X}^2\overline{Y} \\ &+B_5\overline{X}^3 + B_6\overline{X}^2\overline{Y} \\ &+C_5\overline{X}^3 + C_6\overline{X}^2\overline{Y} \end{aligned} \quad (5\text{-}17)$$

式中：X_{tp}、Y_{tp}、Z_{tp}为经非线性变形改正后的坐标；

X_{tp_x}、Y_{tp_x}、Z_{tp_x}为由地面控制点的地面摄测坐标求得的重心坐标；

$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$为经绝对定向后的重心化坐标。

2. 平面正形变换多项式改正航带网非线性变形的公式

当用正形变换多项式逼近时，除满足前面多项式改正的要求外，还必须满足：由多项式曲面上一个点（x、y），变换到航带网无变形曲面上相应点（X',Y'）时，应保持该点处在极小范围内相应线段的夹角保持不变，即满足所谓保角变换的条件。由此可知，经正形变换以后的图形与原始图形保持局部的相似，这是正形变换的特点。

假定我们采用完全的三次多项式来作上述的平面变换，其变换公式为：

$$\left.\begin{aligned} X' &= a_0 + a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4XY + a_5Y^2 \\ &\quad + a_6X^3 + a_7X^2Y + a_8XY^2 + a_9Y^3 \\ Y' &= b_0 + b_1X + b_2Y + b_3X^2 + b_4XY + b_5Y^2 \\ &\quad + b_6X^3 + b_7X^2Y + b_8XY + b_9Y^3 \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}18)$$

要使上式变换为保角变换，必须满足柯西—黎曼条件，即

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = \frac{\partial Y'}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial X'}{\partial Y} = -\frac{\partial Y'}{\partial X} \quad (5\text{-}19)$$

使式（5-40）分别对X、Y取偏导数得：

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = a_1 + 2a_3X + a_4Y + 3a_6X^2 + 2a_7XY + a_8Y^2 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial Y} = b_2 + b_4X + 2b_5Y + b_7X^2 + 2b_8XY + 3b_9Y^2 \qquad (b)$$

$$\frac{\partial X'}{\partial Y} = a_2 + a_4X + 2a_5Y + a_7X^2 + 2a_8XY + 3a_9Y^2 \qquad (c)$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial X} = -b_1 - 2b_3X - b_4Y - 3b_6X^2 - 2b_7XY - b_8Y^2 \qquad (d)$$

根据柯西—黎曼条件，上列公式（a）和（b）以及式（c）和（d）的对应系数应相等，并以惯用符号A_i表示，即

$$\left.\begin{array}{llll} a_1 = b_2 = A_3, & 2a_3 = b_4 = 2A_5, & a_4 = 2b_3 = 2A_6 & \\ 3a_6 = b_7 = 3A_7, & a_7 = b_8 = -3A_8, & a_2 = b_1 = A_4 & \\ a_4 = -2b_3, & 2a_5 = -b_4, & a_7 = -3b_6 & \\ a_8 = -b_7, & a_8 = 3b_9, & 3a_9 = 6b_8 & \\ a_0 = A_1, & b_0 = A_2 & & \end{array}\right\} \qquad (5\text{-}50)$$

将式（5-50）代入式（5-48）中，经整理后得到正形变换的三次项公式：

$$\left.\begin{aligned} X' &= A_1 + A_3X - A_4Y + A_5(X^2 - Y^2) - 2A_6XY \\ &\quad + A_7(X^3 - 3XY^2) - A_8(3X^2Y - Y^3) \\ Y' &= A_2 + A_4X + A_3Y + A_6(X^2 - Y^2) + 2A_5XY \\ &\quad + A_7(3X^2Y - Y^3) + A_8(X^3 - 3XY^2) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}51)$$

若将上式中X'、Y'用地面摄测坐标$\overline{X}_{ip}$、$\overline{Y}_{ip}$代入，而X、Y用经绝对定向后的重心化坐标$\overline{X}$、$\overline{Y}$代入，并在上式两边都减去相应的$\overline{X}$、$\overline{Y}$，那么右边的

$$\overline{X}_{ip} - \overline{X} = \Delta X, \qquad \overline{Y}_{ip} - \overline{Y} = \Delta Y$$

就是航带网中某一点的$\overline{X}$坐标和$\overline{Y}$坐标的变形改正数。式（5-51）中第一式右边$\overline{X}$项的系数和第二式$\overline{Y}$项的系数变为（$A_3 - 1$），我们仍写成A_3，这样做既不影响计算的结果，也不影响其保角性，则有：

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= A_1 + A_3\overline{X} - A_4\overline{Y} + A_5(\overline{X}^2 - \overline{Y}^2) - 2A_6\overline{X}\overline{Y} \\ \Delta Y &= A_2 + A_4\overline{X} + A_3\overline{Y} - A_6(\overline{X}^2 - \overline{Y}^2) + 2A_5\overline{X}\overline{Y} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} +A_7(\overline{X}^3 - 3\overline{X}\overline{Y}^2) \\ -A_8(3\overline{X}^2\overline{Y} - \overline{Y}^3) \\ +A_7(3\overline{X}^2\overline{Y} - \overline{Y}^3) \\ +A_8(\overline{X}^3 - 3\overline{X}\overline{Y}^2) \end{array}} \qquad (5\text{-}52)$$

式（5-52）是严密的正形变换的三次项公式。在单航带解析空中三角测量中，往往认为航带中某一点的$\overline{Y}$与$\overline{X}$比较起来要小得多，因此，把式中$\overline{Y}^2$项和$\overline{X}\overline{Y}^2$、$\overline{Y}^3$项舍去，得到常用的近似正形变换多项式：

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= A_1 + A_3\overline{X} - A_4\overline{Y} - A_5\overline{X}^2 - 2A_6\overline{X}\overline{Y} \\ \Delta Y &= A_2 - A_4\overline{X} - A_3\overline{Y} + A_6\overline{X}^2 - 2A_5\overline{X}\overline{Y} \\ \Delta Z &= C_0 + C_1\overline{X} - C_2\overline{Y} + C_3\overline{X}^2 - C_4\overline{X}\overline{Y} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} +A_7\overline{X}^3 - 3A_8\overline{X}^2\overline{Y} \\ 3A_7\overline{X}^2\overline{Y} - A_8\overline{X}^3 \\ +C_6\overline{X}^3 + C_5\overline{X}^2\overline{Y} \end{array}} \qquad (5\text{-}53)$$

高程变形，仍采用一般多项式改正，如上式中第三式，去掉公式（5-53）中[ ]里的内容，即为二次正形变换改正公式。

与多项式改正的平差计算相类似，已知一定数量的控制点，就可以求出系数A_i、C_i，达到改正非线性变形的目的。

这里要注意的是，正形变换公式中ΔX、ΔY两式中的系数相互关联，因此采用正形变换公式时，X、Y坐标必须联合平差计算。正由于此，为了解求正形变换公式中系数A_i所需的控制点数目可以减少。若用二次正形变换公式，只需三个平控点即可（一个平控点可列出两个方程式）。

求得式（5-53）中系数A_i、C_i以后，可按下式求得非线性改正后的地面摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_{tp} &= X_{tp_s} + \overline{X} + A_1 + A_3\overline{X} - A_4\overline{Y} + A_5\overline{X}^2 - 2A_6\overline{X}\,\overline{Y} \\ Y_{tp} &= Y_{tp_s} + \overline{Y} + A_2 + A_4\overline{X} + A_3\overline{Y} + A_6\overline{X}^2 + 2A_5\overline{X}\,\overline{Y} \\ Z_{tp} &= Z_{tp_s} + \overline{Z} + C_0 + C_1\overline{X} + C_2\overline{Y} + C_3\overline{X}^2 + C_4\overline{X}\,\overline{Y} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &+ A_7\overline{X}^3 - 3A_8\overline{X}^2\overline{Y} \\ &+ 3A_7\overline{X}^2\overline{Y} + A_8\overline{X}^3 \\ &+ C_6\overline{X}^3 + C_5\overline{X}^2\overline{Y} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}54)$$

（三）非线性改正中的附加改正项

前面讨论了由于航带网的非线性变形应加进的坐标改正。当地面点高差较大，航线较长时，还要注意由于基准面弯曲和高差引起点位的变化，以及由于平面点位的改正所引起比例尺的变化对高程的影响。特别是把摄站也作为一个待定点进行计算时，这项改正更显得重要。

如图5-3-5所示，E为大地水准面，P为航带网模型的基准面，假定在基准面P上有一点M_1，经模型的非线性变形改正后，在E面上获得它的正确位置M_0。当M_1点具有高差$\overline{Z}$时，由于网的变形，使铅垂线产生倾斜（如图5-3-5），使得M_2的实际位置在M_0'而不是在M_0，$\overline{M_0M_0'}$就是由于在网的非线性变形情况下、高差$\overline{Z}$所引起的点位误差δ。

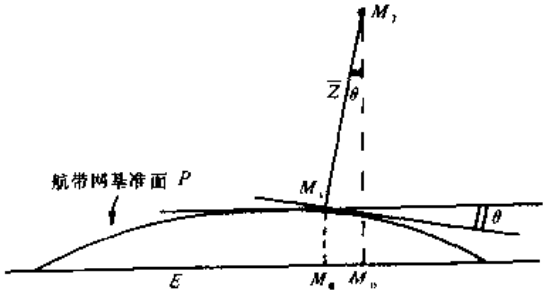


图 5-3-5

为了便于计算，将δ分解成X、Y方向上的两个分量δ_x、δ_y，其相应的角度为Q_x、Q_y。由公式（5-44）和（5-53）中第三式，不难求得（忽略小角度θ_X，θ_Y与$\mathrm{tg}\theta_X$，$\mathrm{tg}\theta_Y$的区别）：

$$\theta_x = \frac{\partial \Delta Z}{\partial \overline{X}} = C_1 + 2C_3\overline{X} + C_4\overline{Y} + 3C_5\overline{X}^2 + 2C_6\overline{X}\,\overline{Y}$$

$$\theta_y = \frac{\partial \Delta Z}{\partial \overline{Y}} = C_2 + C_4\overline{X} + C_6\overline{X}^2$$

这里要注意一点，θ_x，θ_y为在变形的曲面上某点处X、Y方向的斜率。那么由于点相对于基准面的高差引起点位坐标的改正为：

$$\left.\begin{aligned} \delta X &= -\overline{Z}\theta_x = -\overline{Z}\,(C_1 + 2C_3\overline{X} + C_4\overline{Y} + 3C_5\overline{X}^2 + 2C_6\overline{X}\,\overline{Y}) \\ \delta Y &= -\overline{Z}\theta_y = -\overline{Z}\,(C_2 + C_4\overline{X} + C_6\overline{X}^2) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}55)$$

当高差很大时，航带网的非线性改正引起了网的比例尺变化，这种变化可以视为由于

X 的改正变引起的（因为X坐标远大于Y坐标）它对高程的影响可以由下式求得：

对于一般多项式

$$\delta Z = \overline{Z}\frac{\partial \Delta X}{\partial \overline{X}} - \overline{Z}\left(A_1 + 2A_3\overline{X} + A_4\overline{Y} + 3A_5\overline{X}^2 + 2A_6\overline{X}\,\overline{Y}\right) \tag{5-56}$$

对于正形多项式

$$\delta Z = \overline{Z}\frac{\partial \Delta X}{\partial \overline{X}} = \overline{Z}\left(A_3 + 2A_5\overline{X} - 2A_6\overline{Y} + 3A_7\overline{X}^2 - 6A_8\overline{X}\,\overline{Y}\right) \tag{5-57}$$

公式（5-55），(5-56）和（5-57)就是航带网的非线性变形改正中加入的附加项。

带有附加项的多项式改正公式：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta X &= A_0 + A_1\overline{X} + A_2\overline{Y} + A_3\overline{X}^2 + A_4\overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Z}\left(C_1 + 2C_3\overline{X} + C_4\overline{Y}\right)\\
&\quad \boxed{+ A_5\overline{X}^3 + A_6\overline{X}^2\overline{Y} - \overline{Z}\left(3C_5\overline{X}^2 + 2C_6\overline{X}\,\overline{Y}\right)}\\
\Delta Y &= B_0 + B_1\overline{X} + B_2\overline{Y} + B_3\overline{X}^2 + B_4\overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Z}\left(C_2 + C_4\overline{X}\right)\\
&\quad \boxed{+ B_5\overline{X}^3 + B_6\overline{X}^2\overline{Y} - Z\left(C_6\overline{X}^2\right)}\\
\Delta Z &= C_0 + C_1\overline{X} + C_2\overline{Y} + C_3\overline{X}^2 + C_4\overline{X}\,\overline{Y} + Z\left(A_1 + 2A_3\overline{X} + A_4\overline{Y}\right)\\
&\quad \boxed{+ C_5\overline{X}^3 + C_6\overline{X}^2\overline{Y} + \overline{Z}\left(3A_5\overline{X}^2 + 2A_6\overline{X}\,\overline{Y}\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{5-58}$$

带有附加项的正形变换公式：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta X &= A_1 + A_3\overline{X} - A_4\overline{Y} + A_5\overline{X}^2 - 2A_6\overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Z}\left(C_1 + 2C_3\overline{X} + C_4\overline{Y}\right)\\
&\quad \boxed{+ A_7\overline{X}^3 - 3A_8\overline{X}^2\overline{Y} - Z\left(3C_5\overline{X}^2 + 2C_6\overline{X}\,\overline{Y}\right)}\\
\Delta Y &= A_2 + A_4\overline{X} + A_3\overline{Y} + A_6\overline{X}^2 + 2A_5\overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Z}\left(C_2 + C_4\overline{X}\right)\\
&\quad \boxed{+ 3A_7\overline{X}^2\overline{Y} + A_8\overline{X}^3 - \overline{Z}\left(C_6\overline{X}^2\right)}\\
\Delta Z &= C_0 + C_1\overline{X} + C_2\overline{Y} + C_3\overline{X}^2 + C_4\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{Z}\left(A_3 + 2A_5\overline{X} - 2A_6\overline{Y}\right)\\
&\quad \boxed{+ C_5\overline{X}^3 + C_6\overline{X}^2\overline{Y} + \overline{Z}\left(3A_7\overline{X}^2 - 6A_8\overline{X}\,\overline{Y}\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{5-59}$$

式（5-58)、(5-59)中方框范围内的内容去掉即为带有附加项的二次多项式改正和正形变换改正公式。

因为附加项中系数A_i、C_i开始是未知的，所以在使用带有附加项公式计算时，需反复趋近。具体算法如下：

（1）先按不带附加项的Z坐标改正公式计算出系数C_i；

（2）用求得的系数C_i，由公式（5-55）计算X、Y坐标改正的附加项，将它合并到相应的常数项中，解求出系数A_i，B_i；

（3）由系数A_i计算高程改正的附加项，并在考虑到附加项的情况下，再重新计算C_i；

（4）由新的C_i值重新计算$\overline{X}$、$\overline{Y}$坐标改正的附加项，计算新的A_i、B_i值；

（5）用新的A_i、C_i值，求得每点的坐标改正数。

§5.4 航带法区域网平差

一、航带法区域网平差的基本思想

前面介绍了单航带解析空中三角测量的理论和方法，单航带法是以一条航带作为独立解算的单元，求出待定点的地面测量坐标。航带法区域网平差是以单航带作为基础，以几条航带或一个测区作为一个解算的整体，同时求出整个测区内全部待定点的地面测量坐标。

航带法区域网平差的基本思想是：

首先按单航带方法，每条航带构成自由网，然后用本航带的控制点及与上一条相邻航带的公共点为依据，进行本航带的三维线性变换，把整个测区内的各航带都纳入统一的摄影测量坐标系中，然后各航带按非线性变形改正公式同时解算各航带的非线性变形改正系数。计算过程中注意到相邻航带公共点的坐标应相等，控制点的摄测坐标与它的地面摄测坐标相等，又要使观测值改正数的平方和$[pvv]$=最小，单点在平差中不起作用，故不参加平差计算，在这种条件下求得全区待定点的坐标。

二、误差方程式的建立

（一）重心和重心化坐标计算

根据全区域首、末两个控制点A和F（如图5-4-1）计算全区域重心的地面摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_{tpR} &= \frac{1}{2}(X_{tpA}+X_{tpF}) \\ Y_{tpR} &= Y_{tpA} \\ Z_{tpR} &= \frac{1}{2}(Z_{tpA}+Z_{tpF}) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}60)$$

全区域重心的摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_g &= \frac{1}{2}(X_A+X_F) \\ Y_g &= Y_A \\ Z_g &= \frac{1}{2}(Z_A+Z_F) \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}61)$$

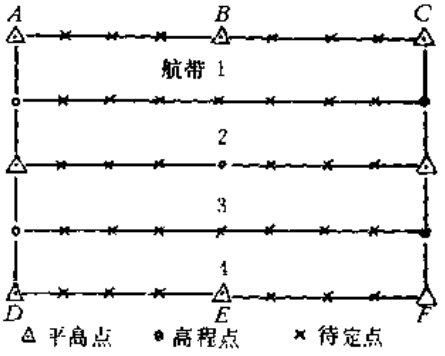


图 5-4-1

每条航带重心的X和Z坐标与全区重心的相应坐标相等，而各航带重心的Y坐标，则根据A点和F点的Y坐标增量按全区航带总数平分的办法求得。即任一航带重心的地面摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_{tpgi} &= X_{tpg} \\ Y_{tpgi} &= Y_{tpA}-(i-1)\left(\frac{Y_{tpA}-Y_{tpF}}{N}\right) \\ Z_{tpgi} &= Z_{tpg} \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}62)$$

任一航带重心的摄测坐标为：

$$\left.\begin{aligned} X_{gi} &= X_g \\ Y_{gi} &= Y_A - (i-1)\frac{Y_A - Y_F}{N} \\ Z_{gi} &= Z_g \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}63)$$

式中：i为航带的顺序编号；

N为全区域航带的总数。

有了各航带的重心坐标以后，按公式（2-112），(2-113)计算各点的重心化坐标，用重心化坐标列出误差方程式。

（二）误差方程式的建立

假定我们采用二次多项式进行各航带的非线性改正，即

$$\begin{aligned} \delta_x &= a_0 + a_1\overline{X} + a_2\overline{Y} + a_3\overline{X}^2 + a_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ \delta_y &= b_0 + b_1\overline{X} + b_2\overline{Y} + b_3\overline{X}^2 + b_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ \delta_z &= c_0 + c_1\overline{X} + c_2\overline{Y} + c_3\overline{X}^2 + c_4\overline{X}\,\overline{Y} \end{aligned}$$

式中：$\overline{X}$、$\overline{Y}$为本航带任一点重心化的摄测坐标，$a_0 \cdots a_4$、$b_0 \cdots b_4$，$c_0 \cdots c_4$为本航带的非线性改正的15个待定系数。

第i条航带中，任一点经非线性改正后的地面摄测坐标为：

$$\left.\begin{aligned} X_{ip} &= \overline{X} + \delta_x + X_{ipgi} = X_{ipgi} + \overline{X} + a_0 + a_1\overline{X} + a_2\overline{Y} + a_3\overline{X}^2 + a_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ Y_{ip} &= \overline{Y} + \delta_y + Y_{ipgi} = Y_{ipgi} + \overline{Y} + b_0 + b_1\overline{X} + b_2\overline{Y} + b_3\overline{X}^2 + b_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ Z_{ip} &= \overline{Z} + \delta_z + Z_{ipgi} - Z_{ipgi} + \overline{Z} + c_0 + c_1\overline{X} + c_2\overline{Y} + c_3\overline{X}^2 + c_4\overline{X}\,\overline{Y} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}64)$$

式中：X_{ipgi}、Y_{ipgi}、Z_{ipgi}为第i条航带重心的地面摄测坐标。

现以X坐标为例，说明误差方程式的建立。设重心化摄测坐标$\overline{X}$视为观测值，其改正数为v_x，由式（5-61）可得到航带法区域网平差的观测方程式，对控制点：

$$X_{ip} = \overline{X} + X_{ipgi} + v_x + \delta_x$$

或

$$v_x = a_0 + a_1\overline{X} + a_2\overline{Y} + a_3\overline{X}^2 + a_4\overline{X}\,\overline{Y} - (X_{ip} - X_{ipg} - \overline{X}) \qquad (5\text{-}65)$$

相邻航带的公共点有：

$$\begin{aligned} v_x + \overline{X} + \delta_x + X_{gi} &= v_x' + \overline{X}' + \delta_x' + X_{gi+1} \\ (v_x - v_x') &= a_0 + a_1\overline{X} - a_2\overline{Y} - a_3\overline{X}^2 - a_4\overline{X}\,\overline{Y} \\ &\quad - (a_0' - a_1'\overline{X}' + a_2'\overline{Y}' + a_3'\overline{X}'^2 - a_4'\overline{X}'\,\overline{Y}') \\ &\quad - [(\overline{X}' + X_{gi+1}) - (\overline{X} + X_{gi})] \end{aligned} \qquad (5\text{-}66)$$

假定控制点的误差方程式的权为1，那么对于公共连接点误差方程式的权应为$\frac{1}{2}$，因为它是两个观测量的较差。

若第i条航带中有3个控制点，其误差方程式为

$$-\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}^{控} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \overline{X}_1 & \overline{Y}_1 & \overline{X}_1^2 & \overline{X}_1\overline{Y}_1 \\ 1 & \overline{X}_2 & \overline{Y}_2 & \overline{X}_2^2 & \overline{X}_2\overline{Y}_2 \\ 1 & \overline{X}_3 & \overline{Y}_3 & \overline{X}_3^2 & \overline{X}_3\overline{Y}_3 \end{bmatrix}^{控}}_{A^{控}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ a_{4i} \end{bmatrix}}_{a_i} - \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}^{控}}_{l_i^{控}} \tag{5-67}$$

式中 $$l = X_{ip} - X_{ipgi} - \overline{X}$$

将式（5-67）写成更一般的形式：

$$-V^{控} = A_i^{控} a_i - l_i^{控} \tag{5-67a}$$

设第i条航带中有几个公共点，其误差方程式为：

$$-V_{i,i+1} = [A_i^{下} \quad \cdots A_{i+1}^{上}] \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} - l_{i,i+1} \tag{5-68}$$

式中

$$-V_{i,i+1} = \begin{bmatrix} -(v_1 - v_1') \\ -(v_2 - v_2') \\ \vdots \\ -(v_n - v_n') \end{bmatrix}, \quad l_{i,i+1} = (\overline{X}' + X_{gi+1}) - (\overline{X} - X_{gi})$$

$$[A_i^{下} \quad -A_{i+1}^{上}] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \overline{X}_1 & \overline{Y}_1 & \overline{X}_1^2 & \overline{X}_1\overline{Y}_1 & -1 & -\overline{X}_1' & -\overline{Y}_1' & -\overline{X}_1'^2 & -\overline{X}_1'\overline{Y}_1' \\ 1 & \overline{X}_2 & \overline{Y}_2 & \overline{X}_2^2 & \overline{X}_2\overline{Y}_2 & -1 & -\overline{X}_2' & -\overline{Y}_2' & -\overline{X}_2'^2 & -\overline{X}_2'\overline{Y}_2' \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & \\ 1 & \overline{X}_n & \overline{Y}_n & \overline{X}_n^2 & \overline{X}_n\overline{Y}_n & -1 & -\overline{X}_n' & -\overline{Y}_n' & -\overline{X}_n'^2 & -\overline{X}_n'\overline{Y}_n' \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} a_i \\ \cdots\cdots \\ a_{i+1} \end{bmatrix} = [a_{0i} \quad a_{1i} \quad a_{2i} \quad a_{3i} \quad a_{4i} \quad | \quad a_{0i+1}' \quad a_{1i+1}' \cdots a_{4i+1}']^t \tag{5-69}$$

其中：i、$i+1$为相邻航带的编号；

$A_i^{下}$为第i条航带下排点的误差方程式系数；

$A_{i+1}^{上}$为第$i+1$条航带上排点的误差方程式系数。

现按图5-4-1中布点情况，列出误差方程式如下：

$$-\begin{bmatrix} V^{控} \\ V_{1,2} \\ V_2^{控} \\ V_{2,3} \\ V_3^{控} \\ V_{3,4} \\ V_4^{控} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{控} & & & & & & \\ A_1^{下} & -A_2^{上} & & & & & \\ & A_2^{控} & & & & & \\ & A_2^{下} & -A_3^{上} & & & & \\ & & A_3^{控} & & & & \\ & & A_3^{下} & & -A_4^{上} & & \\ & & & & A_4^{控} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1^{控} \\ l_{1,2} \\ l_2^{控} \\ l_{2,3} \\ l_3^{控} \\ l_{3,4} \\ l_4^{控} \end{bmatrix} \tag{5-70}$$

相应的权矩阵为：

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & N'_{44} \\ \vdots & & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ L'_4 \\ \vdots \end{matrix}$$

仍存放在第四行中。

经上述消元以后的法方程式变为：

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & & \\ & N'_{22} & N_{23} & \\ & & N'_{33} & N_{34} \\ & & & N'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4 \end{bmatrix} \tag{5-75}$$

由上式经过回代，求得各航带的待定系数为

$$\left.\begin{aligned} a_4 &= N'^{-1}_{44} L'_4 \\ a_3 &= N'^{-1}_{33} L'_3 - N'^{-1}_{33} N_{34} a_4 \\ a_2 &= N'^{-1}_{22} L'_2 - N'^{-1}_{22} N_{23} a_3 \\ a_1 &= N^{-1}_{11} L_1 - N^{-1}_{11} N_{12} a_2 \end{aligned}\right\} \tag{5-76}$$

由上例，可以列出航带法区域网平差法方程式系数的消元与回代的通式。

消元通式：

$$\left.\begin{aligned} N'_{i+1,i-1} &= N_{i+1,i+1} - N^T_{i,i+1} N'^{-1}_{ii} N_{i,i+1} \\ L'_{i+1} &= L_{i+1} - N^T_{i,i-1} N'^{-1}_{ii} L'_i \\ i &= 1, 2, \cdots n-1 \end{aligned}\right\} \tag{5-77}$$

回代通式：

$$\left.\begin{aligned} a_n &= N'^{-1}_{nn} L'_n \\ a_i &= N'^{-1}_{ii} (L'_i - N_{i,i+1} a_{i+1}) \\ i &= (n-1) \cdots 1 \end{aligned}\right\} \tag{5-78}$$

式中：i表示系数矩阵的行编号；

n表示全区航带的总条数。

以上是以X坐标为例，同法可以求得Y和Z坐标的非线性改正系数。

五、待定点地面测量坐标计算

求得每条航带的非线性变形改正系数以后，按下式求得待定点的地面摄测坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_{ip} &= X_{ipgi} + \overline{X} + a_{0i} + a_{1i}\overline{X} + a_{2i}\overline{Y} + a_{3i}\overline{X}^2 + a_{4i}\overline{X}\overline{Y} \\ Y_{ip} &= Y_{ipgi} + \overline{Y} + b_{0i} + b_{1i}\overline{X} - b_{2i}\overline{Y} + b_{3i}\overline{X}^2 - b_{4i}\overline{X}\overline{Y} \\ Z_{ip} &= Z_{ipgi} + \overline{Z} - c_{0i} + c_{1i}\overline{X} + c_{2i}\overline{Y} + c_{3i}\overline{X}^2 - c_{4i}\overline{X}\overline{Y} \end{aligned}\right\} \tag{5-79}$$

式中：i为航带的编号；

X_{ipgi}、Y_{ipgi}、Z_{ipgi}为第i条航带重心的地面摄测坐标；

$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$为该航带某点的重心化摄测坐标。

如果是单点，由式（5-79）求得结果即为该点的地面测量坐标。若是相邻航带公共点，则取用相邻两条航带计算出的坐标的均值。最后再将地面摄测坐标转换为地面测量坐标。

以上非线性改正是采用二次多项式，若用三次多项式亦可得到类似的结果。当采用正

式中N_{ij}、L_i表示式（5-73）、(5-72）中的相应项，a_1、a_2、a_3、a_4相应于每条航带的非线性性改正系数。

从式（5 73）中可以看出法方程式系数矩阵有以下规律：

（1）主对角线上为各条航带参与平差点（控制点和相邻航带之间公共点）的逐点自身法化阵之和，控制点的自身法化项前面的系数为1，公共点自身法化项前面的系数为$1/k$，k表示公共点所跨的航带数。

（2）非主对角线上为航带之间的相互法化，其系数为$-1/k$。

对于常数向量和带宽也可得到它们的规律性。

四、法方程式的求解

这里法方程式的解求，采用直接解法。法方程中未知数的消元过程如下：

（1）将式（5-74）中法方程系数矩阵的第一列主对角线以下的元素变为零，相应的常数项同时参加化算；

（2）将经第一步化算后的第二列主对角线以下的元素变为零，如此继续下去，直至第4列。这时的法方程式系数变成一个上三角矩阵；

（3）回代求解，求出各航带的未知数。

现以式（5-74）为例：

第一步：第一行元素不变。

第二步：第一行乘以$N_{12}^T N_{11}^{-1}$（包括常数项）变为：

$$N_{12}^T \quad N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12} \quad 0 \quad 0 \;\vdots\; N_{12}^T N_{11}^{-1} L_1 \qquad (a)$$

第三步：消去法方程式系数矩阵第二行中N_{12}^T，则以第二行减去式（a）的对应项，则有：

$$0 \quad N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12} \quad N_{23} \quad 0 \;\vdots\; L_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} L_1 \qquad (b)$$

式（b）仍存放在原第二行中，并改写成：

$$0 \quad N'_{22} \quad N_{23} \quad 0 \;\vdots\; L'_2 \qquad (c)$$

第四步：消去第三行中N_{23}^T，则用第三行减去$N_{23}^T N_{22}'^{-1} X$（c）的结果，即

$$0 \quad 0 \quad N_{33} - N_{23}^T N'^{-1}_{22} N_{23} \quad N_{34} \;\vdots\; L_3 - N_{23}^T N_{22}^{-1} L'_2$$

上式可以改写成

$$0 \quad 0 \quad N'_{33} \quad N_{34} \;\vdots\; L'_3 \qquad (d)$$

第五步：消去第四行中N_{34}^T，用第四行减去$N_{34}^T N'^{-1}_{33} X$（d）的结果

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad N_{44} - N_{34}^T N'^{-1}_{33} N_{34} \;\vdots\; L_4 - N_{34}^T N'^{-1}_{33} L'_3$$

将上式改写成

$$P=\begin{bmatrix}
\overbrace{\begin{matrix}1\\ \end{matrix}}^{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \overbrace{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}^{9} & \overbrace{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \overbrace{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}^{7} & \overbrace{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}^{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}^{9} & \overbrace{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}^{3}
\end{bmatrix}\begin{matrix}\}3\\ \}9\\ \}2\\ \}7\\ \}2\\ \}9\\ \}3\end{matrix} \tag{5-71}$$

三、法方程式的建立及系数矩阵填写规律

由误差方程式（5-70）和权矩阵（5-71）可以列出法方程式系数矩阵A^TPA和常数项矩阵A^TPL：

$$A^TPL=\begin{bmatrix}
A_{1\text{控}}^T l_{1\text{控}}+\frac{1}{2}A_{1\text{下}}^T l_{12} \\
A_{2\text{控}}^T l_{2\text{控}}-\frac{1}{2}A_{2\text{上}}^T l_{12}+\frac{1}{2}A_{2\text{下}}^T l_{23} \\
A_{3\text{控}}^T l_{3\text{控}}-\frac{1}{2}A_{3\text{上}}^T l_{23}+\frac{1}{2}A_{3\text{下}}^T l_{34} \\
A_{4\text{控}}^T l_{4\text{控}}-\frac{1}{2}A_{4\text{上}}^T l_{34}
\end{bmatrix} \tag{5-72}$$

由式（5-72）和式(5-73)可将航带法区域网的法方程式表达成以下更紧凑的形式（假定全区有四条航带）：

$$A^TPA=\begin{bmatrix}
A_{1\text{控}}^T A_{1\text{控}}+\frac{1}{2}A_{1\text{下}}^T A_{1\text{下}} & -\frac{1}{2}A_{1\text{下}}^T A_{2\text{下}} & & \\
-\frac{1}{2}A_{2\text{上}}^T A_{1\text{下}} & A_{2\text{控}}^T A_{2\text{控}}+\frac{1}{2}A_{2\text{上}}^T A_{2\text{上}}+\frac{1}{2}A_{2\text{下}}^T A_{2\text{下}} & -\frac{1}{2}A_{2\text{下}}^T A_{3\text{上}} & \\
 & -\frac{1}{2}A_{3\text{上}}^T A_{2\text{下}} & A_{3\text{控}}^T A_{3\text{控}}+\frac{1}{2}A_{3\text{上}}^T A_{3\text{上}}+\frac{1}{2}A_{3\text{下}}^T A_{3\text{下}} & -\frac{1}{2}A_{3\text{下}}^T A_{4\text{上}} \\
 & & -\frac{1}{2}A_{4\text{上}}^T A_{3\text{下}} & A_{4\text{控}}^T A_{4\text{控}}+\frac{1}{2}A_{4\text{上}}^T A_{4\text{上}}
\end{bmatrix} \tag{5-73}$$

$$\begin{bmatrix}
N_{11} & N_{12} & & \\
N_{12}^T & N_{22} & N_{23} & \\
 & N_{23}^T & N_{33} & N_{34} \\
 & & N_{34}^T & N_{44}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{bmatrix}=0 \tag{5-74}$$

形多项式时，X、Y坐标应同时进行平差计算。非线性改正中附加项，亦可以像单航带一样进行整体平差求解。

最后，应将所有点求得的坐标通过坐标反变换，变换到规定的地面测量坐标系中去。如果要计算每片外方位元素，则需逐片进行空间后方交会。

本章习题与思考题

1. 试说明航带法解析空中三角测量的基本思想与基本作业过程。

2. 用解析法构建自由航带有哪几种不同的方法？各有什么特点？

3. 用连续像对法相对定向法如何构建自由航带网？

4. 用单独像对相对定向法如何构建自由航带网？

5. 什么是带模型连接条件的相对定向？它与不带连接条件的相对定向有何区别？

6. 为什么要进行航带网的绝对定向？绝对定向的严密公式和实用公式是什么？

7. 评述航带网绝对定向的计算步骤。

8. 重心化坐标的采用对航带网绝对定向元素的解求带来什么影响？

9. 航带法解析空中三角测量中，为什么要将控制点的地面测量坐标转换为地面摄测坐标中去？

10. 为什么航带网不能像单模型那样只进行绝对定向，而必须进行非线性改正？什么情况下，单模型必须作非线性改正？

11. 什么叫偶然误差的非独立累积？设有下列误差系列，试计算其一次总和和二次总和，并绘图表示之。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
δ_i	+3	+1	−12	+3	+3	+3	+4	−7	−7	−8	0	−4	+1	+5	0
$\Sigma\delta_i$															
$\Sigma\Sigma\delta_i$															

12. 试以dB_y对Y坐标的影响为例，推导dB_y为系统误差和偶然误差时，第i个模型点Y坐标的中误差。

13. 试以dK对Y坐标的影响为例，推导dK分别为系统误差和偶然误差时，第i个模型点Y坐标的中误差。

14. 导出平面正形多项式改正的方程式（至三次项为止）。

15. 航带网非线性改正中，一般多项式与正形多项式有何区别？对控制点要求有何不同？

16. 什么叫附加改正项？为什么要引入它？在平差计算中如何处理附加改正项。

17. 相对定向元素的误差，哪些属于独立累积性误差？哪些属于非独立累积性误差？试对于X，Y，Z坐标分别讨论。

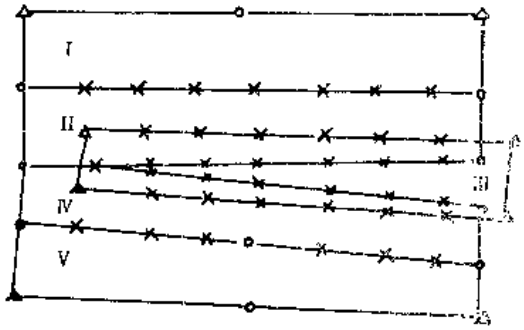
18. 试说明航带法区域网平差的基本思想，它比单航带平差有哪些优点？

19. 叙述航带法区域网平差的基本流程。此时坐标重心化应如何进行？

20. 试说明航带法区域网平差中改化法方程式系数矩阵和常数项向量的规律。

21. 试说明航带法区域网平差中改化法方程式求解的方法。

22. 如何计算航带法区域网平差法方程式的带宽？根据下图列出法方程式结构内容。此时带宽



多大？

23. 绘出航带法区域网平差的计算机程序框图。

第六章　独立模型法区域网空中三角测量

§6.1　概　　述

第五章叙述了航带法空中三角测量的原理和方法。它是通过一个个像对相对定向和模型连接构建自由航带，以各条自由航带为平差的基本单元，各航带中点的摄测坐标作为平差的观测值。由于这种方法构建自由航带时，是以前一步计算结果作为下一步计算的依据，所以误差累积得很快，甚至偶然误差也会产生二次和的累积作用。这是航带法区域网平差的主要缺点和不严密之处。

能否缩小参加整体平差的单元呢？本章讨论的方法，是以单模型（或双模型）作为平差计算单元。由一个个相互连接的单模型既可以构成一条航带网，也可以组成一个区域网。本章主要介绍独立模型法区域网平差的理论和方法，以及大型稀疏带状矩阵求解的循环分块解法等。

独立模型法平差方法的提出还有一个实用上的原因。在60～70年代，精密型模拟测图仪得到十分广泛的应用。能否利用这类仪器上经相对定向而获得的模型坐标进行解析空中三角测量呢？独立模型法空中三角测量正是为了满足生产上这种要求应运而生的。其中由阿克曼教授等研制的独立模型法区域网平差程序PAT—M43可作为有代表性的独立模型法区域网平差程序。在我国类似的程序有郑州测绘学院、国家测绘局测绘研究所、武汉地震研究所及江苏省测绘研究所等单位分别研制的，并已用于生产。

什么是独立模型法区域网平差的基本思想呢？

独立模型法区域网空中三角测量是把一个单元模型（可以由一个立体像对或两个立体像对，甚至三个立体像对组成）视为刚体，利用各单元模型彼此间的公共点连成一个区域，在连结过程中，每个单元模型只能作平移、缩放、旋转（因为它们是刚体），这样的要求只有通过单元模型的三维线性变换（空间相似变换）来完成，在变换中要使模型间公共点的坐标尽可能一致，控制点的坐标应与其地面摄测坐标尽可能一致（即它们的差值尽可能变小），同时观测值改正数的平方和为最小，在满足这些条件下，按最小二乘法原理求得待定点的地面摄测坐标的方法，就是独立模型法区域网空中三角测量的基本思想（见图6-1-1）。

独立模型法区域网空中三角测量的主要内容：

（1）求出单元模型中模型点的坐标，包括摄站点坐标；

（2）利用相邻模型之间公共点和所在模型中控制点，每个模型各自进行三维线性变换，列出误差方程式，并作逐点法化；

（3）建立全区域的改化法方程式，并按循环分块法求解，求得每个模型的七个参数；

（4）由已经求得每个模型的七个参数，计算每个模型中待定点平差后的坐标，若为相邻模型的公共点，则取其平均值为最后结果。

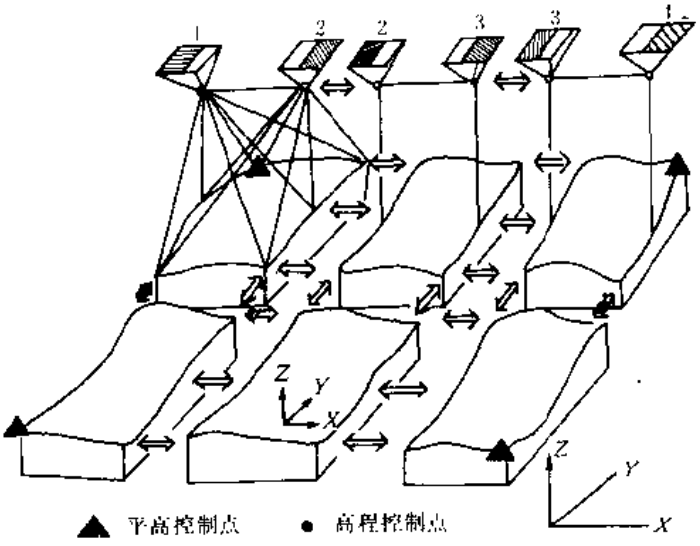


图 6-1-1

§6.2 平面高程联解的独立模型法区域网平差

一、基本方法与整体平差的初始值计算

不论哪种区域网平差方法，在进行整体平差以前，必须为整体平差提供模型点的坐标概值，这些坐标的坐标系要统一，比例尺要统一。通常获取坐标概值有两个路径：一是由模拟测图仪上获得各个模型点和投影中心的模型坐标，利用模型之间公共点，使后一个模型进行三维线性变换，完成模型连接，构成自由航带网，再利用相邻航带之间公共点和本航带的控制点进行航带模型的三维线性变换，完成航带之间的连接，构成比例尺和坐标系统一的区域网，这时所获得的模型坐标作为整体平差的概值。另一办法是用航带法空中三角测量的结果作为概值使用。

独立模型法区域网平差有两种方法：一种是平面高程联解；另一种是平面与高程分求的解法。本节和下一节逐一介绍这些方法。

二、平面高程联解的独立模型法区域网平差的数学模型

区域网平差中每一个单元模型各自进行三维线性变换，即

$$\begin{bmatrix} X_{iP} \\ Y_{iP} \\ Z_{iP} \end{bmatrix}_{i,j} = \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}_{i,j} + \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix}_j \tag{6-1}$$

式中：

$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$为单元模型中任一模型点的重心化坐标；

X_{tP}、Y_{tP}、Z_{tP}为地面摄测坐标；

X_g、Y_g、Z_g为该模型重心在地面摄测坐标系中的坐标；

λ为单元模型的缩放系数；

$\boldsymbol{R}$为由模型绝对定向角元素构成的旋转矩阵；

i，为点号，j为模型编号。

仿照第五章中模型的绝对定向，将式（6-1）进行线性化，可以列出误差方程式：

$$-\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}_{i,j} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \overline{X} & \overline{Z} & 0 & -\overline{Y} \\ 0 & 1 & 0 & \overline{Y} & 0 & -\overline{Z} & \overline{X} \\ 0 & 0 & 1 & \overline{Z} & -\overline{X} & \overline{Y} & 0 \end{array}\right]_{i,j} \begin{bmatrix} \Delta X_g \\ \Delta Y_g \\ \Delta Z_g \\ \Delta\lambda \\ \Delta b \\ \Delta a \\ \Delta c \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{i,j} - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix}_{i,j} \tag{6-2}$$

式中：ΔX、ΔY、ΔZ为待定点的坐标改正数；

其它符号的含义同前：

$$\begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}_{i,j} - \lambda\boldsymbol{R}\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}_{i,j} - \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix}_j \tag{6-3}$$

式中：X_0、Y_0、Z_0为模型公共点的坐标均值，在逐渐趋近中，每次用新坐标值求得。

式（6-2），(6-3)为模型之间公共点列出的误差方程式和常数项，若对于控制点，则式(6-2)、(6-3)变为：

$$-\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}_{i,j} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \overline{X} & \overline{Z} & 0 & -\overline{Y} \\ 0 & 1 & 0 & \overline{Y} & 0 & -\overline{Z} & \overline{X} \\ 0 & 0 & 1 & \overline{Z} & -\overline{X} & \overline{Y} & 0 \end{array}\right]_{i,j} \begin{bmatrix} \Delta X_g \\ \Delta Y_g \\ \Delta Z_g \\ \Delta\lambda \\ \Delta b \\ \Delta a \\ \Delta c \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} \tag{6-4}$$

$$\begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} X_{tP} \\ Y_{tP} \\ Z_{tP} \end{bmatrix}_{i,j} - \lambda\boldsymbol{R}\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix}_{i,j} - \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix}_j \tag{6-5}$$

如果考虑到控制点的误差，则在式（6-4）中应保留坐标改正数ΔX、ΔY、ΔZ，此外，还应列出三个附加误差方程式（对于每个控制点），并赋予相应的权阵。

$$-\begin{bmatrix} v_X^c \\ v_Y^c \\ v_Z^c \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_c \tag{6-6}$$

我们将式（6-2）、(6-4)写成更紧凑的矩阵形式，即：

$$-V = At \cdot BX - L \tag{6-7}$$

公共点：

$$-V = At + BX - L$$

其中L用式（6 3)计算。

控制点：

$$-V = At + O - L \tag{6-8}$$

其中L用式（6-5)计算。

相应的法方程式为：

$$\begin{bmatrix} A^TA & A^TB \\ B^TA & B^TB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^tL \\ B^TL \end{bmatrix} \tag{6 9}$$

或

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \tag{6-10}$$

在以上法方程式中含两种不同类型的未知数，一是与全区域中每个模型有关的定向未知数t，另一是与各待定点有关的坐标改正数X。通常未知数X的个数大于t的总数，在法方程式求解时，往往消去其中含未知数较多的X，得到仅含一种款型未知数t的改化法方程式：

$$(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^T)t = n_1 - N_{12}N_{22}^{-1}n_2 \tag{6-11}$$

$$t = (N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^T)^{-1}(n_1 - N_{12}N_{22}^{-1}n_2) \tag{6-12}$$

式（6-12）求得的t便是全区域每个模型的七个参数。利用上式求得的每个模型的七个参数，按下式求得待定点的坐标：

$$\begin{bmatrix} X_{tP} \\ Y_{tP} \\ Z_{tP} \end{bmatrix} = \lambda R\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix}$$

对模型之间的公共点取其坐标的均值作为最后结果，到这里求得的是地面摄测坐标，还需经过由地面摄测坐标到地面测量坐标的转换，才得最终结果。

这里要说明的一个问题是改化法方程式求解的问题。若有一区域四条航带，每航带10个模型，这是个很普通的区域，在改化法方程式中含有$40 \times 7 = 280$个未知数，那么，改化法方程式占用内存贮量为$280 \times 280 = 78400$字，这样大的容量，在一般的计算机上是很难满足，因此平面高程联解的算法是很难实现的，要完成独立模型法区域网平差必须在算法上加以改进。

§6.3 平面高程分求的独立模型法区域网平差

一、基本思想

在平面高程联求的独立模型法区域网平差中，曾经提到，这种解法对于一个不太大的

区域（四条航带，每航带10个模型）的联立求解所需计算机的存贮量已为一般计算机难已接受，要使独立模型法区域网平差在生产实践中成为可能，在算法上加以改进是很有必要的。前面介绍过的改化法方程式求解也是在算法上的一种改进，即使如此，对计算机存贮量的要求仍然是相当可观的，因此要求算法进一步简化才能满足实际的需要。平面高程分求的思想就是把三维线性变换中七个未知参数分为三个和四个，在平面坐标平差中解求四个参数，高程平差中解求三个参数，这样在平高分求中使未知数的个数大大减少，这种分求的方案是否可行，求得的解是否与联求的一致，这是需要进一步分析研究的。

下面我们把三维线性变换的误差方程式（6-2）重新排列成以下的形式：

$$-\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} -\overline{Y} & \overline{X} & 1 & 0 & 0 & \overline{Z} & 0 \\ \overline{X} & \overline{Y} & 0 & 1 & -\overline{Z} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \overline{Z} & 0 & 0 & \overline{Y} & -\overline{X} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta C \\ \Delta\lambda \\ \Delta X_g \\ \Delta Y_g \\ \hline \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta Z_g \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} \Delta X \\ \Delta Y \\ \hline \Delta Z \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} l_X \\ l_Y \\ \hline l_Z \end{array}\right] \tag{6-13}$$

若式(6-13)中$\overline{Z}=0$，或Z=常数（即平坦地区），则式（6-13）可以分成两个完全相互独立的方程组，即：

$$-\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{Y} & \overline{X} & 1 & 0 \\ \overline{X} & \overline{Y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C \\ \Delta\lambda \\ \Delta X_g \\ \Delta Y_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \end{bmatrix} \tag{6-14}$$

和 $$-v_Z = \begin{bmatrix} \overline{Y} & -\overline{X} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta Z_g \end{bmatrix} - [\Delta Z] - [l_Z] \tag{6-14a}$$

这就是平面高程分求的基本公式，由前面分析可知，公式（6-14）、(6-14a）是在地区平坦的条件下才成立，实际情况，地面起伏总是存在的，因此，从理论上说，分求解法是不严密的，需要从平面→高程→平面→高程，如此连续趋近来完成每个模型七个参数的求解。经反复趋近求得的结果与联求的基本一致。

因此，为力求平高分求算法的严密性，应当：(1) 在每次平面解算后，不仅改正平面坐标，而且按比例尺系数改正高程；(2)在每次高程解算之后，用三个参数的新值代入式(6-1)，对X、Y、Z坐标进行一次严格的变换。

二、平面坐标的平差

从式（6-14）可见，平面坐标的平差实际上解求的是每个模型二维坐标转换的四个参数，即平移、缩放、旋转。这是个线性的变换，可以直接引用下式：

$$\left.\begin{aligned} X &= \lambda\cdot\cos k\cdot\overline{X} - \lambda\cdot\sin k\cdot\overline{Y} + X_g \\ Y &= \lambda\cdot\sin k\cdot\overline{X} + \lambda\cos k\cdot\overline{Y} + Y_g \end{aligned}\right\} \tag{6-15}$$

令

$$\left.\begin{aligned} r &= \lambda \cdot \cos k, \qquad s = \lambda \cdot \sin k \\ \lambda &= \sqrt{r^2 + s^2} \qquad \sin k = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \end{aligned}\right\} \tag{6-15a}$$

代入式（6-15）中，则

$$-\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{Y} & \overline{X} & 1 & 0 \\ \overline{X} & \overline{Y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ r \\ X_g \\ Y_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{6-16}$$

式（6-16）中四个未知参数需经式（6-15a）的转换才能得到我们所需要的λ, k, X_g, Y_g。

我们将式（6-16）表示成矩阵符号的形式，对于模型之间公共点：

$$-\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} + 0 \tag{6-17}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\overline{Y} & \overline{X} & 1 & 0 \\ \overline{X} & \overline{Y} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{E} \\ &\boldsymbol{t} = [\, s \quad r \quad X_g \quad Y_g \,]^T, \qquad \boldsymbol{X} = [\, X \quad Y \,]^T \end{aligned}\right\} \tag{6-17a}$$

对于控制点：

$$-\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + O - \boldsymbol{L} \tag{6-18}$$

其中

$$\boldsymbol{X} = 0, \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{6-18a}$$

若控制点的坐标认为有误差时，平面控制点的误差方程式应为以下的形式：

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{V} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} + 0 \\ -\boldsymbol{V}' &= \quad + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{L}_c, \boldsymbol{P}_c \end{aligned}\right\} \tag{6-19}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \end{bmatrix} \tag{6-19a}$$

X_c、Y_c为控制点的地面摄测坐标（或地面测量坐标），P_c为控制点坐标观测值的权阵。

从以上误差方程式可见，式中亦含有两种类型的未知数$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{t}$，通常先消去与待定点坐标有关的未知数$\boldsymbol{X}$，得到改化法方程式，解出定向未知数$\boldsymbol{t}$。

三、高程平差计算

由式（6-14a）可得模型公共点的误差方程式：

$$-V = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L} \tag{6-20}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = [\overline{Y} \quad -\overline{X} \quad 1\,], \qquad t = [\Delta a \quad \Delta b \quad \Delta Z_g]^T \\ &\boldsymbol{B} = -E\ (\text{负单位阵}) \quad \boldsymbol{X} = \Delta Z \\ &\boldsymbol{L} = \boldsymbol{Z}_0 - \lambda\overline{Z} - Z_g \end{aligned}\right\} \tag{6-20a}$$

这里Z_0为公共点高程均值，$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$以及入均用平面坐标平差后的新值。

控制点：

$$-\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{t} + 0 - \boldsymbol{L} \tag{6-21}$$

其中

$$\boldsymbol{L} = Z_{tp} - \lambda\overline{Z} - Z_g \tag{6-21a}$$

若考虑控制点的高程带有误差时，则应列出以下两组误差方程式：

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{V} &= \boldsymbol{At} + \boldsymbol{BX} - \boldsymbol{L} \\ -\boldsymbol{V}' &= \boldsymbol{BX} - \boldsymbol{L}_c, \boldsymbol{P}_c \end{aligned}\right\} \tag{6-22}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_c = Z_c \tag{6-22a}$$

高程平差中摄站点应参加平差，而且此时$\overline{Z}$不能视之为零，由此可得摄站点误差方程式的矩阵形式与式（6-20）相同、但是，其中$\boldsymbol{A}$、t、$\boldsymbol{L}$的内容不一样，它们是：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \overline{Z} & 0 \\ -\overline{Z} & 0 & 0 \\ \overline{Y} & \overline{X} & 1 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_t = \begin{bmatrix} P_{X_s} & & \\ & P_{Y_s} & \\ & & P_{Z_s} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{L} &= \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} - \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6-23}$$

式中：ΔX、ΔY、ΔZ为摄站点的坐标改正数；

X_0、Y_0、Z_0为公共摄站点坐标的均值；

$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$、λ、X_g、Y_g均用平面坐标平差后的新值，P_s为摄站坐标的权阵，通常小于模型坐标的权。

由以上三种类型的点的误差方程式，在消去未知数X以后，由改化法方程式解出未知数t。

四、平面高程迭代解算过程

平面高程分求的独立模型法区域网平差方法是一个先平面后高程的反复迭代过程，具体过程如下：

（1）计算每个模型重心的摄测坐标和模型点的重心化坐标。

利用模型之间的公共点和本模型的控制点计算重心的摄测坐标（摄站点不参加重心坐标的计算），然后再求出重心化的摄测坐标$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$。

（2）平面坐标平差计算。

摄站点不参加平面坐标平差，也无需引入未知数初始值，由误差方程式（6-16），(6-18），逐点法化，由改化法方程式求出每个模型的四个参数s、r、X_g、Y_g，再由式（6-15a）将s、r换算成λ、κ，将λ、κ、X_g、Y_g代入式（6-15）中，求得任一模型中任一点的平面坐标：

$$X = \lambda \cdot \cos\kappa \cdot \overline{X} - \lambda \cdot \sin\kappa \cdot \overline{Y} + X_g$$

$$Y = \lambda \cdot \sin\kappa \cdot \overline{X} + \lambda \cos\kappa \cdot \overline{Y} + Y_g$$

同时利用求出的λ系数对各模型点高程进行变换。

（3）高程平差计算。

利用模型间公共点、公共摄站点、控制点，由式（6-20）、(6-21）、(6-23），列出相应的误差方程式，之后解算改化法方程式，求得每个模型的三个参数ΔZ_g，Δa，Δb。第一次平差之前应提供各待求点的近似高程。

到此为止完成了一次由平面到高程的循环，并求得每个模型的七个参数。

（4）计算各模型的新参数。

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a, \qquad b = b_0 + \Delta b \\ \kappa &= \operatorname{tg}^{-1}\frac{S}{r}, \qquad \lambda = \sqrt{S^2 + r^2} \\ Z_g &= Z_{g_0} + \Delta Z_g, X_g, Y_g \end{aligned}\right\} \tag{6 24}$$

（5）计算待定点坐标的新值。

$$\begin{bmatrix} X_{tP} \\ Y_{tP} \\ Z_{tP} \end{bmatrix} = \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} \tag{6 25}$$

这里λ、$\boldsymbol{R}$、X_g、Y_g、Z_g每次迭代计算中用新值代入，而$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$的数值为由坐标概值求得的重心化摄测坐标，在迭代过程中始终不变。

（6）检查每个模型中Δa，Δb、Δc是否均已小于规定的限差，若不小于限差，则重复步骤1至6，直至满足要求为止。

许多程序中通常采用迭代一次变换一次的方法，此时式（6 24）中$a_0 = b_0 = 0$，而式（6-25）中$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$的数值均由上次变换后的模型坐标计算。这种处理方法的优点是在倾角大和地面高差大时能保证平高迭代解法的精度。

（7）相邻模型的公共点取均值。

（8）将求得的地面摄测坐标转换为地面测量坐标。

五、改化法方程式的建立和它的一般结构

在独立模型法区域网平差中常用的一种误差方程式形式为：

$$-\boldsymbol{V} = \boldsymbol{At} + \boldsymbol{BX} - \boldsymbol{L}$$

在不同的算法中，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{X}$、t、$\boldsymbol{L}$均有不同的含义，这些在前面都已经讨论过了，这里不再重复，下面不再追求这些矩阵所包含的内容，而是就这些符号来讨论改化法方程式的建立问题。由式（6-11）已知上述误差方程式的改化法方程式为：

$$(\boldsymbol{N}_{11} - \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{22}^{-1}\boldsymbol{N}_{12}^{T})t = \boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{22}^{-1}\boldsymbol{n}_2$$

现用一个具体例子来说明这个问题。

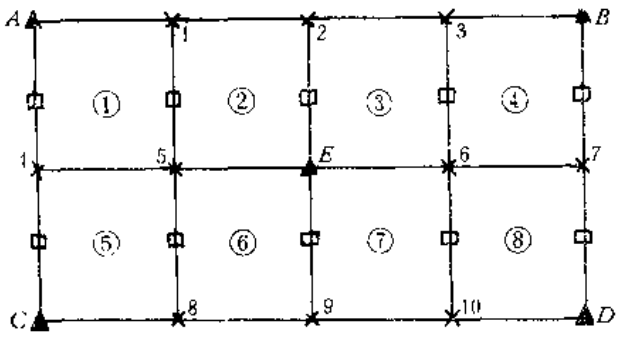


图 6-3-1

图6-3-1为一2 × 4区域网，其中点A，B，C，D，E为控制点（已知平面和高程），点1到点10为待定点，现欲进行平高分求的独立模型法平差。下面仅对平面平差进行分析。

假设控制点没有误差，平面平差的误差方程式结构如图6-3-2所示。

误差方程式的具体形式则为：

$$
\begin{bmatrix} L_{A1} \\ L_{11} \\ L_{41} \\ L_{51} \\ L_{12} \\ L_{22} \\ L_{52} \\ L_{E2} \\ L_{23} \\ L_{33} \\ L_{E3} \\ L_{63} \\ L_{34} \\ L_{B4} \\ L_{64} \\ L_{74} \\ L_{45} \\ L_{55} \\ L_{c5} \\ L_{85} \\ L_{56} \\ L_{E6} \\ L_{86} \\ L_{96} \\ L_{E7} \\ L_{67} \\ L_{97} \\ L_{107} \\ L_{68} \\ L_{78} \\ L_{108} \\ L_{D8} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{11} \\ V_{41} \\ V_{51} \\ V_{12} \\ V_{22} \\ V_{52} \\ V_{E2} \\ V_{23} \\ V_{33} \\ V_{E3} \\ V_{63} \\ V_{34} \\ V_{B4} \\ V_{64} \\ V_{74} \\ V_{45} \\ V_{55} \\ V_{c5} \\ V_{85} \\ V_{56} \\ V_{E6} \\ V_{86} \\ V_{96} \\ V_{E7} \\ V_{67} \\ V_{97} \\ V_{107} \\ V_{68} \\ V_{78} \\ V_{108} \\ V_{D8} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
A_{A1} & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
A_{11} & & & & & & & & -E & & & & & & & & & \\
A_{41} & & & & & & & & & & & -E & & & & & & \\
A_{51} & & & & & & & & & & & & -E & & & & & \\
 & A_{12} & & & & & & & -E & & & & & & & & & \\
 & A_{22} & & & & & & & & -E & & & & & & & & \\
 & A_{52} & & & & & & & & & & & -E & & & & & \\
 & A_{E2} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & A_{23} & & & & & & & -E & & & & & & & & \\
 & & A_{33} & & & & & & & & -E & & & & & & & \\
 & & A_{E3} & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & A_{63} & & & & & & & & & & & -E & & & & \\
 & & & A_{34} & & & & & & & -E & & & & & & & \\
 & & & A_{B4} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & A_{64} & & & & & & & & & & -E & & & & \\
 & & & A_{74} & & & & & & & & & & & -E & & & \\
 & & & & A_{45} & & & & & & & -E & & & & & & \\
 & & & & A_{55} & & & & & & & & -E & & & & & \\
 & & & & A_{C5} & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & A_{85} & & & & & & & & & & & -E & & \\
 & & & & & A_{56} & & & & & & & -E & & & & & \\
 & & & & & A_{E6} & & & & & & & & & & -E & & \\
 & & & & & A_{86} & & & & & & & & & & & -E & \\
 & & & & & A_{96} & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & A_{E7} & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & A_{67} & & & & & & & -E & & & & \\
 & & & & & & A_{97} & & & & & & & & & -E & & \\
 & & & & & & A_{107} & & & & & & & & & & -E & \\
 & & & & & & & A_{68} & & & & & -E & & & & & \\
 & & & & & & & A_{78} & & & & & & -E & & & & \\
 & & & & & & & A_{108} & & & & & & & & & -E & \\
 & & & & & & & A_{D8} & & & & & & & & & &
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ \text{---} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \end{bmatrix}
\tag{6-26}
$$

式中

$$
A_{ij} = \begin{bmatrix} -\overline{Y} & \overline{X} & 1 & 0 \\ \overline{X} & \overline{Y} & 0 & 1 \end{bmatrix}_{ij}, \quad \blacksquare = -E = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},
$$

且 i 为点号，j 为模型号。

假定各误差方程式的权均为 1．则其法方程式为：

$$
\begin{bmatrix}
(A_{41}^{I}A_{41}+A_{11}^{I}A_{11}+A_{41}^{T}A_{41}+A_{51}^{T}A_{51}) & -A_{11}^{I} & -A_{41}^{I} & A_{51}^{I} & & & & & \\
(A_{12}^{T}A_{12}+A_{22}^{I}A_{22}+A_{52}^{I}A_{52}+A_{E2}^{I}A_{E2}) & -A_{12}^{I} & -A_{22}^{T} & -A_{52}^{I} & & & & & \\
(A_{23}^{T}A_{23}+A_{33}^{I}A_{33}+A_{E3}^{I}A_{E3}+A_{63}^{T}A_{63}) & & -A_{23}^{I} & -A_{33}^{T} & A_{63}^{I} & & & & \\
(A_{34}^{T}A_{34}+A_{B4}^{I}A_{B4}+A_{64}^{I}A_{64}+A_{74}^{T}A_{74}) & & & -A_{34}^{I} & -A_{64}^{T} & -A_{74}^{I} & & & \\
(A_{45}^{I}A_{45}+A_{55}^{T}A_{55}+A_{C5}^{I}A_{C5}+A_{85}^{T}A_{85}) & & & & A_{45}^{I} & -A_{55}^{T} & -A_{85}^{I} & & \\
(A_{56}^{I}A_{56}+A_{E6}^{I}A_{E6}+A_{86}^{T}A_{86}+A_{96}^{I}A_{96}) & & & & & -A_{56}^{T} & -A_{86}^{I} & -A_{96}^{T} & \\
(A_{E7}^{T}A_{E7}+A_{67}^{T}A_{67}+A_{97}^{I}A_{97}+A_{107}^{I}A_{107}) & & & & & & -A_{67}^{I} & -A_{97}^{T} & -A_{107}^{T} \\
(A_{68}^{I}A_{68}+A_{78}^{I}A_{78}+A_{108}^{I}A_{108}+A_{D8}^{T}A_{D8}) & & & & & & -A_{68}^{T} & -A_{78}^{I} & A_{108}^{I} \\
2E & & & & & & & & \\
 & 2E & & & & & & & \\
 & & 2E & & & & & & \\
 & & & 2E & & & & & \\
 & & & & 1E & & & & \\
 & & & & & 4E & & & \\
 & & & & & & 2E & & \\
 & & & & & & & 2E & \\
 & & & & & & & & 2E \\
 & & & & & & & & 2E
\end{bmatrix}
$$

对称转置项

$$
\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ \cdots \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{41}^T L_{41} + A_{11}^T L_{11} + A_{41}^T L_{41} + A_{51}^T L_{51} \\ A_{12}^T L_{12} + A_{22}^T L_{22} + A_{52}^T L_{52} + A_{E2}^T L_{E2} \\ A_{23}^T L_{23} + A_{33}^T L_{23} + A_{E3}^T L_{E3} + A_{63}^T L_{63} \\ A_{34}^T L_{34} + A_{B4}^T L_{B4} + A_{64}^T L_{64} + A_{74}^T L_{74} \\ A_{45}^T L_{45} + A_{55}^T L_{55} + A_{C5}^T L_{C5} + A_{85}^T L_{85} \\ A_{56}^T L_{56} + A_{E6}^T L_{E6} + A_{86}^T L_{86} + A_{96}^T L_{56} \\ A_{E7}^T L_{E7} + A_{67}^T L_{67} + A_{97}^T L_{97} + A_{107}^T L_{107} \\ A_{68}^T L_{68} + A_{78}^T L_{58} + A_{108}^T L_{108} + A_{D8}^T L_{D8} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -L_{11} - L_{12} \\ -L_{22} - L_{23} \\ -L_{63} - L_{34} \\ -L_{41} - L_{45} \\ -L_{51} - L_{52} - L_{55} - L_{56} \\ -L_{63} - L_{64} - L_{67} - L_{68} \\ -L_{74} - L_{78} \\ -L_{25} - L_{66} \\ -L_{56} - L_{67} \\ -L_{107} - L_{108} \end{bmatrix} \tag{6-27}
$$

按（6-11）式可进而得到消去地面坐标未知数的改化法方程式：

$$
\begin{bmatrix}
A_{A1}^T A_{A1} + \frac{1}{2}A_{11}^T A_{11} & -\frac{1}{2}A_{11}^T A_{12} & 0 & 0 \\
+\frac{1}{2}A_{A1}^T A_{A1} + \frac{3}{4}A_{51}^T A_{51} & \frac{1}{4}A_{51}^T A_{52} & & \\
 & A_{E2}^T A_{E2} + \frac{1}{2}A_{A12}^T A_{12} & -\frac{1}{2}A_{22}^T A_{20} & 0 \\
 & +\frac{1}{2}A_{22}^T A_{22} + \frac{3}{4}A_{52}^T A_{52} & & \\
 & & A_{E3}^T A_{E3} + \frac{1}{2}A_{23}^T A_{23} & -\frac{1}{2}A_{33}^T A_{34} \\
 & & +\frac{1}{2}A_{33}^T A_{33} + \frac{3}{4}A_{63}^T A_{63} & -\frac{1}{4}A_{63}^T A_{64} \\
 & & & A_{B4}^T A_{B4} + \frac{1}{2}A_{34}^T A_{34} \\
 & & & +\frac{1}{2}A_{74}^T A_{74} + \frac{3}{4}A_{64}^T A_{64}
\end{bmatrix}
$$

对称转置项

$-\frac{1}{2}A_{41}^T A_{45}$ $-\frac{1}{4}A_{51}^T A_{55}$	$-\frac{1}{4}A_{51}^T A_{56}$	0	0	t_1
$-\frac{1}{4}A_{42}^T A_{55}$	$-\frac{1}{4}A_{52}^T A_{56}$	0	0	t_2
0	0	$-\frac{1}{4}A_{63}^T A_{67}$	$-\frac{1}{4}A_{63}^T A_{68}$	t_3
0	0	$-\frac{1}{4}A_{64}^T A_{67}$	$-\frac{1}{2}A_{74}^T A_{78}$ $-\frac{1}{4}A_{64}^T A_{68}$	t_4
$A_{C5}^T A_{C5} + \frac{1}{2}A_{45}^T A_{45}$ $-\frac{1}{2}A_{85}^T A_{85} + \frac{3}{4}A_{55}^T A_{55}$	$-\frac{1}{2}A_{85}^T A_{86}$ $-\frac{1}{4}A_{55}^T A_{56}$	0	0	t_5
	$A_{E6}^T A_{E6} + \frac{1}{2}A_{86}^T A_{86}$ $+\frac{1}{2}A_{96}^T A_{96} + \frac{3}{4}A_{56}^T A_{56}$	$-\frac{1}{2}A_{96}^T A_{97}$	0	t_6
		$A_{E7}^T A_{E7} + \frac{1}{2}A_{97}^T A_{97}$ $+\frac{1}{2}A_{107}^T A_{107} + \frac{3}{4}A_{67}^T A_{67}$	$-\frac{1}{2}A_{107}^T A_{108}$ $-\frac{1}{4}A_{67}^T A_{68}$	t_7
			$A_{D8}^T A_{D8} + \frac{1}{2}A_{78}^T A_{78}$ $+\frac{1}{2}A_{108}^T A_{108} + \frac{3}{4}A_{68}^T A_{68}$	t_8

$$
=\begin{bmatrix}
A_{A1}^T L_{A1} + \frac{1}{2}A_{11}^T L_{11} + \frac{1}{2}A_{41}^T L_{41} + \frac{3}{4}A_{51}^T L_{51} - \\
- \frac{1}{2}A_{11}^T L_{12} - \frac{1}{2}A_{41}^T L_{45} - \frac{1}{4}A_{51}^T (L_{52} + L_{55} + L_{56}) \\
\hline
A_{E2}^T L_{E2} + \frac{1}{2}A_{12}^T L_{12} + \frac{1}{2}A_{22}^T L_{22} + \frac{3}{4}A_{52}^T L_{52} - \\
- \frac{1}{2}A_{12}^T L_{11} - \frac{1}{2}A_{22}^T L_{23} - \frac{1}{4}A_{52}^T (L_{51} + L_{55} + L_{56}) \\
\hline
A_{E3}^T L_{E3} + \frac{1}{2}A_{23}^T L_{23} - \frac{1}{2}A_{33}^T L_{33} + \frac{3}{4}A_{63}^T L_{63} - \\
- \frac{1}{2}A_{23}^T L_{22} - \frac{1}{2}A_{33}^T L_{36} - \frac{1}{4}A_{63}^T (L_{64} + L_{67} + L_{68}) \\
\hline
A_{E4}^T L_{E4} + \frac{1}{2}A_{34}^T L_{34} + \frac{1}{2}A_{74}^T L_{74} + \frac{3}{4}A_{64}^T L_{64} - \\
- \frac{1}{2}A_{34}^T L_{33} - \frac{1}{2}A_{74}^T L_{78} - \frac{1}{4}A_{64}^T (L_{63} + L_{67} + L_{68}) \\
\hline
A_{C5}^T L_{C5} + \frac{1}{2}A_{45}^T L_{45} + \frac{1}{2}A_{85}^T L_{85} + \frac{3}{4}A_{55}^T L_{55} - \\
- \frac{1}{2}A_{45}^T L_{42} - \frac{1}{2}A_{85}^T L_{86} - \frac{1}{4}A_{55}^T (L_{51} + L_{52} + L_{56}) \\
\hline
A_{E6}^T L_{E6} + \frac{1}{2}A_{86}^T L_{86} + \frac{1}{2}A_{96}^T L_{96} + \frac{3}{4}A_{56}^T L_{56} - \\
- \frac{1}{2}A_{86}^T L_{85} - \frac{1}{2}A_{96}^T L_{97} - \frac{1}{4}A_{56}^T (L_{51} + L_{52} + L_{55}) \\
\hline
A_{E7}^T L_{E7} + \frac{1}{2}A_{97}^T L_{97} + \frac{1}{2}A_{107}^T L_{107} + \frac{3}{4}A_{67}^T L_{67} - \\
- \frac{1}{2}A_{97}^T L_{96} - \frac{1}{2}A_{107}^T L_{107} - \frac{1}{4}A_{67}^T (L_{63} + L_{64} + L_{706}) \\
\hline
A_{D8}^T L_{D8} + \frac{1}{2}A_{78}^T L_{78} + \frac{1}{2}A_{108}^T L_{108} + \frac{3}{4}A_{68}^T L_{68} - \\
- \frac{1}{2}A_{78}^T L_{74} - \frac{1}{2}A_{108}^T L_{107} - \frac{1}{4}A_{68}^T (L_{63} + L_{64} + L_{67})
\end{bmatrix} \tag{6-28}
$$

法方程式系数矩阵如图6-3-3所示改化法方程式系数矩阵结构如图6-3-4所示。

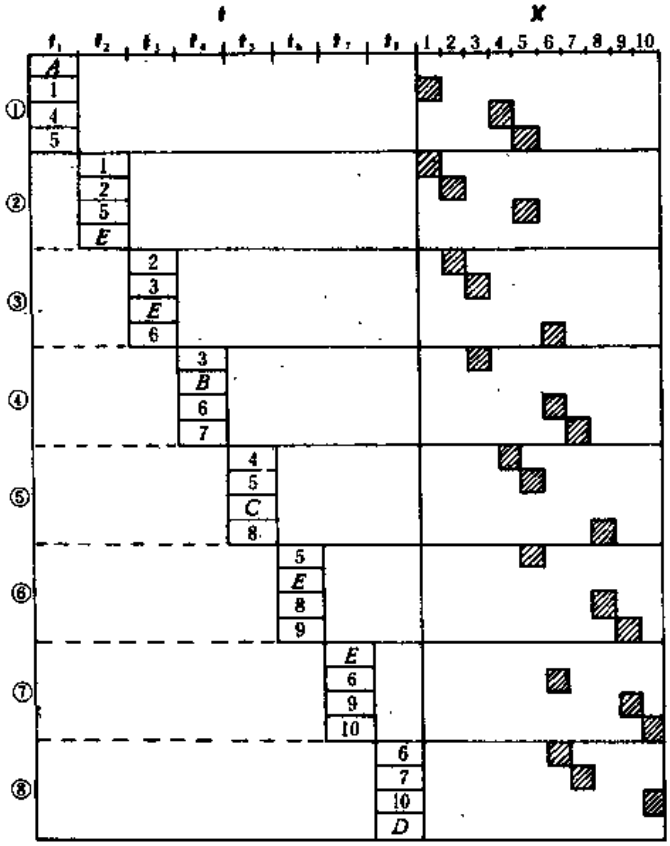


图 6-3-2

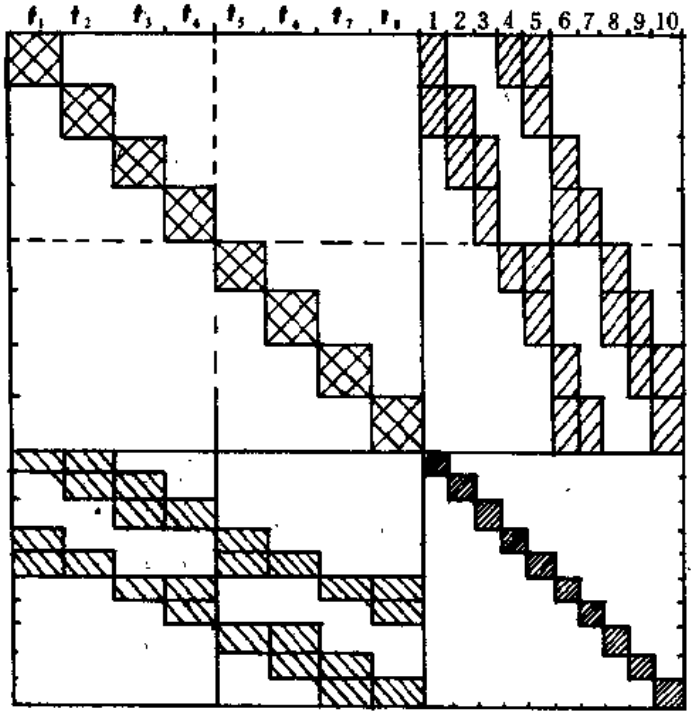


图 6-3-3

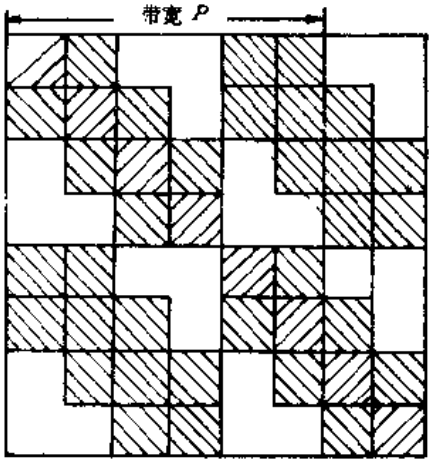


图 6-3-4　($P=4(n+2)=24$)

从改化法方程式（6-28）中可以看出改化法方程式的系数矩阵及常数项矩阵具有一定的规律，掌握住这种规律，就可以由误差方程式直接列出改化法方程式，因此掌握这种规律是很重要的。现将改化法方程式的规律综述如下：

（1）系数矩阵主对角线上子块N_{ii}的内容为该模型内所有参加平差点自身法化的带权总和。对控制点的自身法化项前面的系数P_c为1，模型公共点自身法化项前的系数P_{ii}为$\left(1-\frac{1}{m}\right)$，$m$为该公共点所跨模型的个数。如图6-3-2中点5的$m=4$，点4的$m=2$。

（2）系数矩阵非主对角线上子块N_{ij}，表示模型i与模型j之间所有连接点（不包括控制点）相互法化的带权总和，它前面的系数P_i应为$-\frac{1}{m}$。若模型i与模型j之间没有公共点，则该相互法化子块N_{ij}为零矩阵。

（3）常数项矩阵中每一子块是模型公共点及控制点自身法化和相互法化的带权总和。控制点自身法化项前面的系数P_c为1，公共点自身法化项前面的系数P_{ii}为$\left(1-\frac{1}{m}\right)$，公共点相互法化项前的系数$P_{ii}$为$-\frac{1}{m}$。

掌握以上三点规律，由全区域的点位分布图就可以直接列出改化法方程式的内容。实际编程序时，总是直接逐模型、逐点地填入改化法方程式的内容。

改化法方程式结构是对称带状稀疏矩阵，带状矩阵带宽的大小与改化法方程式所需占用计算机的存贮量有密切的关系。因此组成最小带宽的改化法方程系数阵，是节省计算机存贮量的途径之一。

六、模型编号顺序与带宽的关系

改化法方程式系数矩阵的带宽是这样定义：主对角线到任一行最远处的非零元素间所包含的未知数个数。带宽越窄，解算改化法方程式所需计算机内存和计算量越小。带宽的大小与模型的编号顺序有关，现举例说明这个问题。

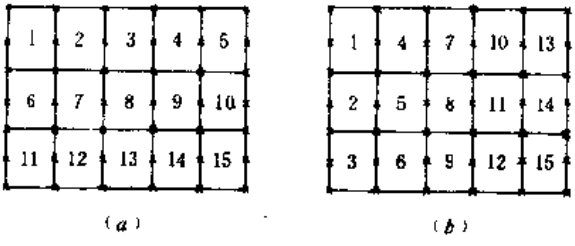


图 6-3-5

设有三条航带的一个区域，每航带有5个模型，如果模型编号沿航带方向编排，如图6-3-5(*a*)所示。模型编号亦可以沿垂直于航带的方向编排，如图6-3-4(*b*)所示。这两种不同的模型编号的排列方式所构成改化法方程式的带宽是不相同的。如图6-3-6(*a*)、(*b*)所示，

按图6-3-5(*a*)方式（沿航带方向排列）编排模型号m'为7（模型数），按图6-3-4(*b*)方式（垂直于航带方向）编排模型号m'为5个（模型数），而每个模型对平面平差含四个未知数。若以m表示带宽，则

$$m=(r+2)\times 4=4m' \tag{6-29}$$

式中，r为按航向排列或旁向排列的模型数。

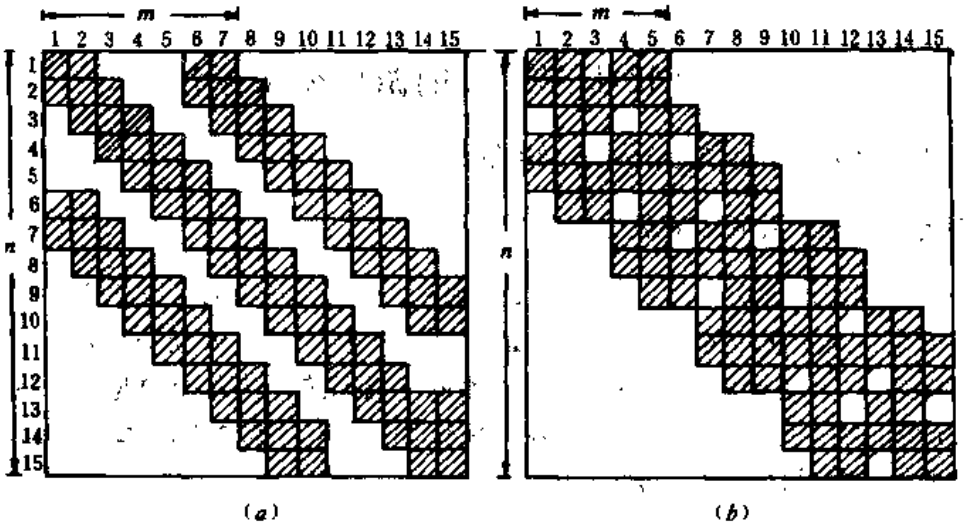


图 6-3-6

显然，要取得最小带宽，就要选择最小的r值，即当沿航向排列的模型数小于旁向排列的模型数时，模型编号应当沿航带方向编排；反之，当旁向排列的模型数小于沿航向排列的模型数时，模型编号应当沿旁向编号，这样总能取得最佳带宽。对于方形区域网，旁向排列的模型数总是小于沿航向排列的模型数，所以生产中大多采用沿旁向进行模型编号。

改化法方程式系数矩阵为对称的带状矩阵，在带范围以外全是零元素，它们不应占用内存，又因为是对称矩阵，只要存放对角线以上的内容。在这样的情况下，假定全区有n个模型，带宽占有的模型数为m'，则需占用计算机的存贮量为（参见图(6-3-7)）：

$$C=[m'\cdot n-\frac{1}{2}m'(m'-1)]\text{子块} \tag{6-30}$$

平高联求时，每个子块需占7×7单元，平高分求时，每子块占4×4单元。

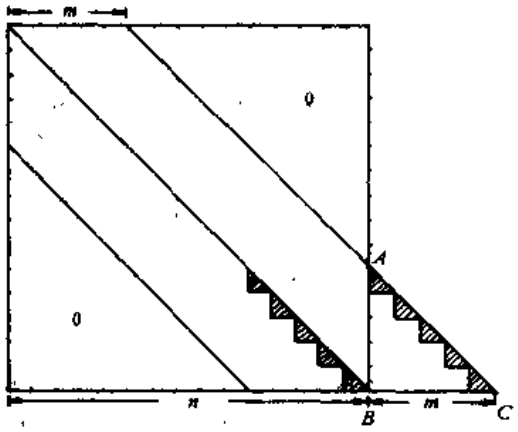


图 6-3-7

若以一个四条航带，每航带10个模型的区域为例，$n=40$，$m'=4+2=6$，则：

$$C=6\times 40-\frac{1}{2}\cdot 6(6-1)=255\text{块}$$

平高联求：$255\times7\times7=12495$字

平高分求：$255\times4\times4=4080$字

从以上数字可以看出，采取以上一些措施以后，对计算机的存贮量要求，从78400字减4080字。

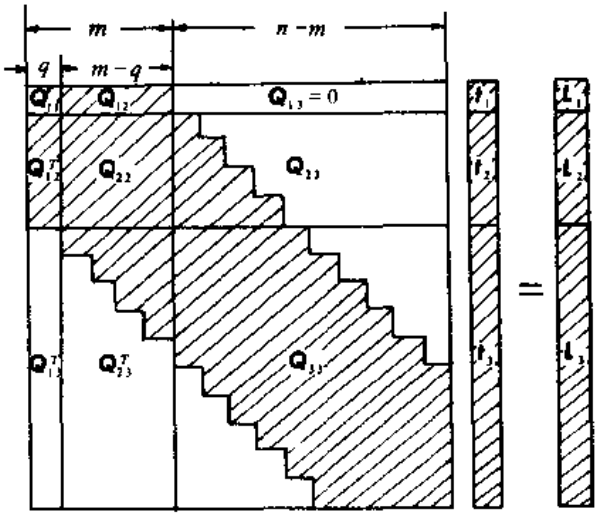
除了以上措施之外，在解法上采用循环分块法，可使存贮量进一步减少，使这种区域网平差方法在一般的计算机上都可以完成全部的计算工作。

§6.4 带状法方程式的循环分块解法

本节主要介绍边法化边消元的循环分块解法。

一、例常的先法化后消元的解法

假若已经得到的改化法方程式的方块图如图6-4-1所示，我们将改化法方程式的系数矩阵划分成九块，其中Q_{11}为$q\times q$阶方阵，Q_{22}为$(m-q)\times(m-q)$阶方阵，Q_{33}为$(n-m)\times(n-m)$阶方阵。这里要求$(n-m)$能被q整除。通常选q为每个模型包含的未知数个数，Q_{11}则为第一个模型的自身法化的内容，相应的t_1为第一个模型的七个（或四个）未知参数。这样的划分将使$Q_{13}=0$，$Q_{13}^T=0$。



n为改化法方程未知数个数，m为带宽，q为逐次消元的阶数。

图 6-4-1

例常的消元法是将图6-4-1中第一列主对角线以下的非零元素全变为零，这表明已经将t_1消去，将余下的$n-1$阶方阵中选取新的Q_{11}，这时它表示第二个模型自身法化项经第一次消元后的新内容，相应t_1变为第二模型的七个（或四个）未知参数。再消去t_1，表明第二模型的未知参数消去了，如此的消元进行$(n-m)$次，余下的为最后m个模型的改化法方程式，可以用一般求逆矩阵的办法，求出最后m个模型的未知参数。然后再依次回代，求出全区每个模型的未知参数，并进而求待定点的地面坐标。

消去未知数t_1的过程为：

$$\begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{23}^T & Q_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} L_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} & Q_{23} \\ Q_{23}^T & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} L_1 \\ L_3 \end{bmatrix} \tag{6-31}$$

从图6-4-1和式（6-31）可看出：消去未知参数t_1后，改化法方程式的结构不变。发生变化的部分仅为Q_{22}和L_2两处。

如果顾及到这个特点，没有必要先列出全区域所有模型的改化法方程，然后再循环消元。如果这样做，势必导致系数矩阵占用过多的内存空间。

二、边法化边消元的循环分块解法

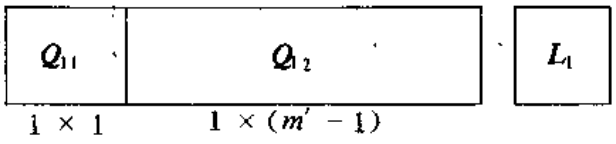
如果利用式（6-31）的特点，可以直接采用边法化边消元的循环分块解法。现作简要介绍。

这个解法的特点是，只占用$m' \times m'$个子块存贮单元，并借助于外围设备就可以完成改化法方程式的求解。下面叙述这种解法的具体过程：

（1）消去未知数t_1，使Q_{12}^T为零。

由例常方法知道，第一个模型的自身法化Q_{11}和相互法化Q_{12}，及常数项L_1求得以后，立即可以算出

$-Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12}$和$-Q_{12}^T Q_{11}^{-1} L_1$，



后两项是消元的必要计算内容，这时只要将Q_{22}，L_2项与之相加，即得消元后的新内容，即

$$Q'_{22} = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12}$$

$$L'_2 = L_2 - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} L_1$$

从上面可知，计算Q'_{22}，L'_2并不一定需要先算出Q_{22}，L_2，然后再计算$Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12}$和$Q_{12}^T Q_{11}^{-1} L_1$。明确了这一点，就可以这样来理解这种算法：

Q_{11}、Q_{12}及L_1的计算可以理解为第一个模型的法化（边法化）；

$-Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12}$与$-Q_{12}^T Q_{11}^{-1} L_1$的计算可以理解成第一个模型未知参数的消元（边消元）。

以上两步的计算与第二个模型的法化毫无关系，由此可见，消去t_1的运算无需在以后模型的法化完成以后进行，而是在第一模型的法化同时就完成消元的计算，边法化边消元的涵义就体现在这里。用下面的方块图表示上述计算，因$Q_{13} = 0$，所以无需列出。

（2）将图6-4-2(a)中第一行的Q_{11}求道，然后将Q_{11}^{-1}，Q_{12}，L_1送至外存贮器，并使第一行和第一列各子块的内容清零。然后将$-Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12}$的内容沿对角线方向上移，$-Q_{12}^T Q_{11}^{-1} L_1$则沿竖直方向上移成图6-4-2($b$)的情况。其中移位后空出的各块需清零。

（3）第二个模型的法化。设自身法化项为q_{22}，相互法化项为q_{23}以及l_2，将它们与图6-4-2(b)中第一行的内容相加，其代数和用Q'_{22}、Q'_{23}以及L'_2表示，并计算第二个模型消元

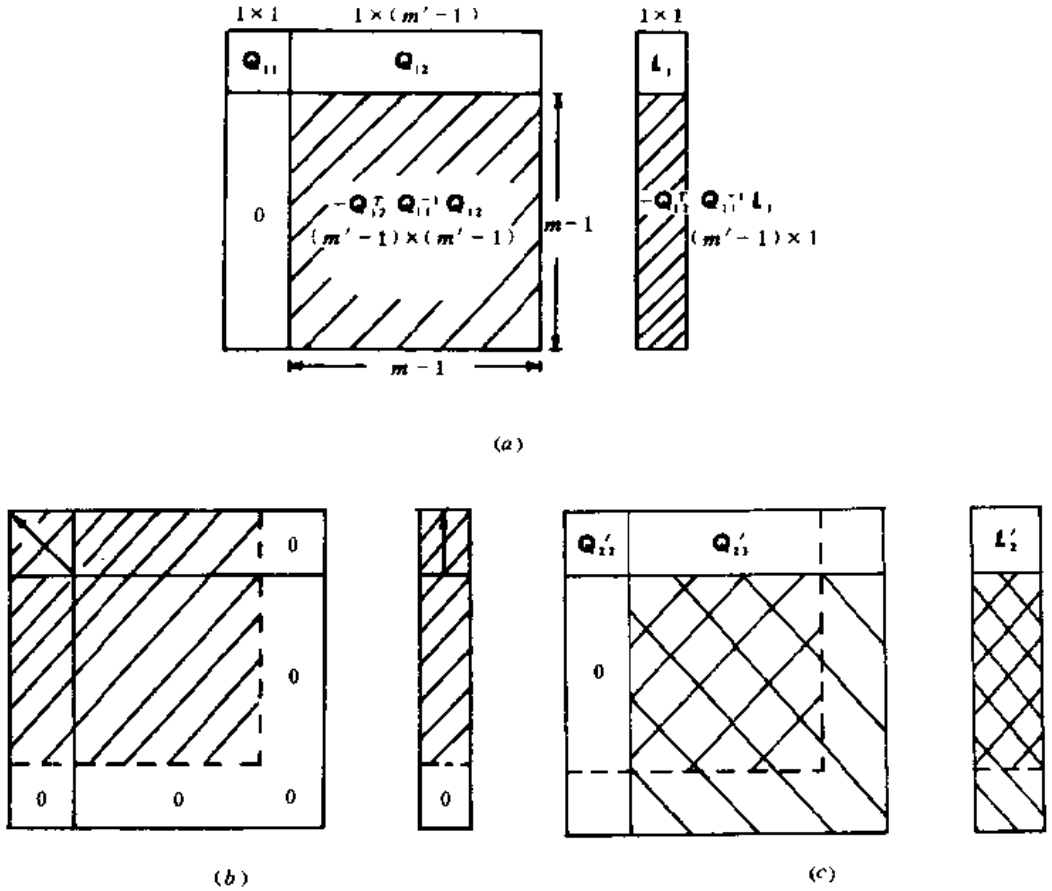


图 6-4-2

项 $-Q_{23}'^T Q_{22}'^{-1} Q_{23}'$ 和 $-Q_{23}'^T Q_{22}'^{-1} L_2'$，如图6-4-2(c)中范围内容。同时与先前已存入的内容相累加，在⊞中的内容表示累加和。

（4）将图6-4-2(c)中第一行的Q_{22}'求逆，再将$Q_{22}'^{-1}$，Q_{23}'，L_2'送入外存贮器，并将第一行和第一列内容清零。重复2、3过程，直至最后剩下$(m'\times m')$块为止。即

$$\left.\begin{array}{l} Q^{(n'-m')}{}_{t}{}^{(n'-m')} = L^{(n'-m')} \\ (m\times m)\quad (m\times 1)\quad (m\times 1) \\ t^{(n'-m')} = (Q^{(n'-m')})^{-1} L^{(n'-m')} \end{array}\right\} \qquad (6\text{-}32)$$

（5）回代求解

$$t_i = Q_{ii}'^{-1}(L_i' - Q_{i,j+1}' t_{i+1}) \qquad (6\text{-}33)$$

式中，i 表示模型编号。

Q_{ii}'，$Q_{i,i+1}'$均可从外存贮器调入内存进行运算。

§6.5 投影中心坐标的测定

在前面曾经提过独立模型法区域网平差中，每个模型的投影中心的坐标可以用解析的

方法亦可以直接从立体测图仪上得到。这一节主要介绍后一种确定方法。

一、空间导杆可安置垂直位置的立体测图仪

有些立体测图仪（如联邦德国欧波同厂的立体测图仪Planimat D2、D3/Planicart E2型和瑞士Kam厂的PG2/PG3型）内设有安置空间导杆在垂直位置的设备（水准器，自动准直），并可把导杆的空间交会点N安置在距其投影中心点的检定距离R处。在测求其投影中心的空间坐标时，把仪器的空间导杆安置在垂直位置，读取其N点的空间坐标X_N、Y_N、Z_N，即可得出投影中心点的坐标X_S、Y_S、Z_S为：

$$X_S = X_N, Y_S = Y_N, Z_S = Z_N + k$$

二、立体测图仪不具备使空间导杆作垂直安置的设备

在这类仪器上，可利用下列两种方法：

（1）在一个立体像对的模型坐标量测完毕后，取下像片，投影器外方位不动。然后，把方格网板放在立体测图仪的投影器内，对三个方格网点用单眼测定出其模型坐标X、Y、Z。再用单像后方交会的运算求得投影中心点空间坐标。观测可在同一个Z值的安置中进行。

（2）不用方格网板，而直接利用安放在投影器上的底片，单眼读出任意一些像点在相距较远的两个或两个以上的Z安置数时的X、Y坐标。由空间直线的两点式（如图6-5-1所示）：

$$\frac{X_S - X_{A_1}}{X_{A_2} - X_{A_1}} = \frac{Y_S - Y_{A_1}}{Y_{A_2} - Y_{A_1}} = \frac{Z_S - Z_{A_1}}{Z_{A_2} - Z_{A_1}},$$

$$\frac{X_S - X_{C_1}}{X_{C_2} - X_{C_1}} = \frac{Y_S - Y_{C_1}}{Y_{C_2} - Y_{C_1}} = \frac{Z_S - Z_{C_1}}{Z_{C_2} - Z_{C_1}}$$

或写成线性方程式形式如

A点：

$$\begin{cases} X_S(Z_{A_2} - Z_{A_1}) - Z_S(X_{A_2} - X_{A_1}) \\ = -(X_{A_2}Z_{A_1} - X_{A_1}Z_{A_2}) \\ Y_S(Z_{A_2} - Z_{A_1}) - Z_S(Y_{A_2} - Y_{A_1}) \\ = -(Y_{A_2}Z_{A_1} - Y_{A_1}Z_{A_2}) \end{cases} \quad (6\text{-}34)$$

C点：

$$\begin{cases} X_S(Z_{C_2} - Z_{C_1}) - Z_S(X_{C_2} - X_{C_1}) \\ = -(X_{C_2}Z_{C_1} - X_{C_1}Z_{C_2}) \\ Y_S(Z_{C_2} - Z_{C_1}) - Z_S(Y_{C_2} - Y_{C_1}) \\ = -(Y_{C_2}Z_{C_1} - Y_{C_1}Z_{C_2}) \end{cases} \quad (6\text{-}34a)$$

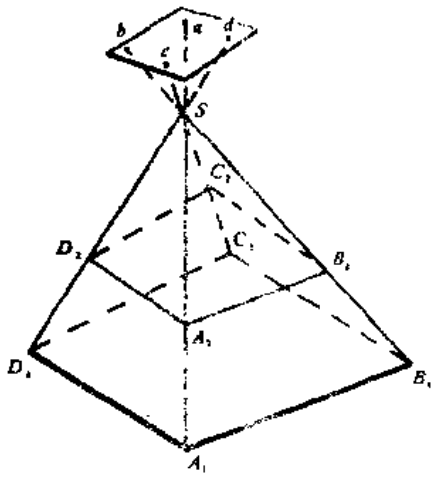


图 6-5-1

图6-5-1中$A_1B_1C_1D_1$和$A_2B_2C_2D_2$为在两个不同Z位置上测得的模型。由式（6-34）、(6-34a)按最小二乘法原理求得投影中心坐标X_S、Y_S、Z_S。

本章习题与思考题

1 试说明独立模型法区域网平差的基本思想。

2. 试说明独立模型法区域网平差平面与高程分求的基本思想。

3. 试详述独立模型法区域网平差平面与高程分求的解算过程。

4. 叙述独立模型法区域网平差中改化法方程式系数矩阵和常数项矩阵的规律。

5. 叙述稀疏带状矩阵的边法化边消元循环分块算法的基本思想。

6. 今有四个模型组成的区域其点位分布和模型编号如图 6-习-1 示，试以 A_{ij} ，l_{ij} 等符号列出该区域在独立模型法区域网平差中全部误差方程式（用矩阵形式表示）。i 表示点号，j 表示模型编号。

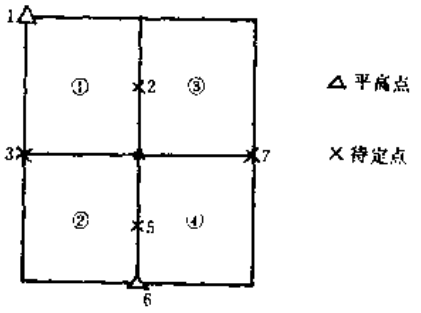
7. 今有带宽为 3 的改化法方程式如下：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & & & & \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} & A_{24} & & & \\ A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33} & A_{34} & A_{35} & & \\ & A_{24}^T & A_{34}^T & A_{44}^I & A_{45} & A_{46} & \\ & & A_{35}^T & A_{45}^T & A_{55} & A_{56} & \\ & & & A_{46}^T & A_{56}^T & A_{66} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix}$$

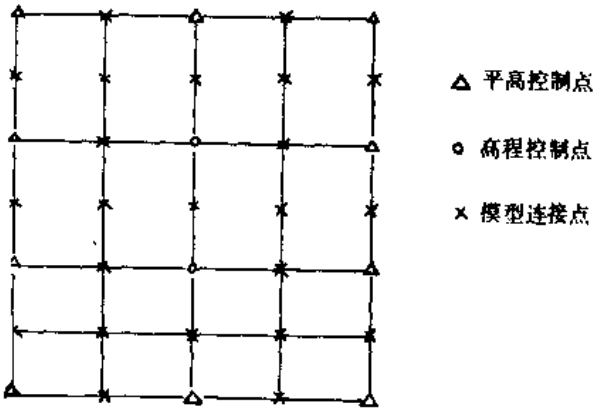
试用循环分块法列出上式的消元过程。并用方块图示意出来。

8. 独立模型法平差与航带法平差有什么区别？试比较其优缺点。

9. 绘图示意 6-习-2 中独立模型法平面区域网平差的误差方程式、法方程式和改化法方程式系数矩阵结构，有多少个观测值？多少个未知数？多余观测数多少？要不要利用投影中心的模型坐标参加平差？



6-习-1



6-习-2

10. 七题中采用什么方法排队可以获得最小带宽？解算中改化法方程式系数矩阵最少必须占多大内存？

11. 为什么平高分求独立模型法平差时，投影中心的模型坐标不参加平差？而在高程平差时却必须参加平差？

12. 在模拟测图仪器上如何求投影中心的模型坐标？

13. 如果您自己用课余时间编写独立模型法区域网平差程序，您打算如何进行？试先绘出程序粗、细框图。

14. 独立模型法区域网平差中采用平高分求比平高联解有哪些好处？

第七章　光束法区域网空中三角测量

§7.1　概　　述

光束法区域网平差是以一张像片组成的一束光线作为平差的基本单元，以中心投影的共线方程作为平差的基础方程。通过各个光线束在空间的旋转和平移，使模型之间公共点的光线实现最佳地交会，并使整个区域最佳地纳入到已知的控制点坐标上去。这里的旋转相当于光线束的外方位角元素，而平移相当于摄站点的空间坐标。在具有多余观测的情况下，由于存在着量测误差，所谓的相邻模型公共点坐标相等和控制点的加密坐标与地面测量的已知坐标一致，均是在保证［pvv］=最小的意义下的一致。这便是光束法区域网空中三角测量的基本思想（见图7-1-1）。

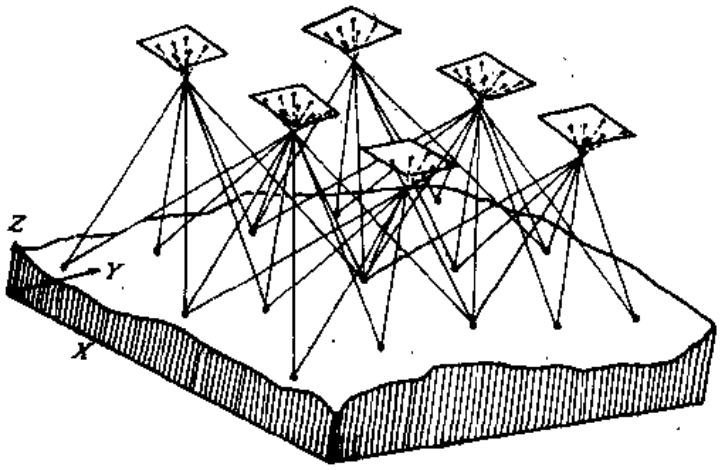


图 7-1-1

这种平差方法主要包括以下几个过程：

（1）像片外方位元素和地面点坐标近似值的确定；

（2）逐点法化，建立改化法方程式；

（3）利用边法化边消元循环分块法解求改化法方程式；

（4）求出每片的外方位元素；

（5）空间前方交会求得待定点的地面坐标，对于模型公共点应取其均值作为最后结果。

当然，也可以利用改化法方程式和法方程式的内容，直接求待定点的地面坐标。

在某些特定情况下，也可以消去每片的外方位元素而建立坐标未知数的改化法方程式。

如果我们分析各种空中三角测量平差方法的平差基本单元就会发现：航带法区域网平差以逐条航带为平差单元，单航带的摄影测量坐标为“观测值”。独立模型法区域网平差则以单元模型为单元，点的模型坐标为观测值。而光束法区域网平差则以单张像片为单元，

像片坐标量测值为观测值。

显然，只有像片坐标才是真正原始的、独立的观测值，而其它两种方法下的观测值，往往是相关而不独立的。从这个意义上光束法平差是最严格的。

此外，在基础摄影测量中，我们曾讲到像点存在由于物理因素、底片变形、仪器误差等引起的像点系统误差。这诸项误差均是像片坐标的函数。因此，只有在光束法平差中才能最佳地顾及和改正像片系统误差的影响。

§7.2 确定像片外方位元素和地面点坐标的近似值

光线束法区域网平差是以共线方程式作基本数学模型，像片坐标观测值是未知数的非线性函数，因此需经过线性化处理后，才能用最小二乘法原理进行计算。这里的最小二乘问题，实际上是属于非线性的最小二乘法解算，需要在提供一个近似解的基础上，逐渐趋近地求出最佳解（即使得pvv = min)。提供的初始解愈接近最佳解，收敛速度愈快。不合理的初始解不仅会影响收敛速度，甚至可能造成不收敛。本节介绍的像片外方位元素和地面点坐标的近似值确定方法，就是为了给光束法区域网平差提供一组合理的初始解。

下面介绍几种确定像片外方位元素和地面点坐标近似值的方法。

一、航带法区域网平差

利用航带法区域网空中三角测量方法提供像片外方位元素和地面点坐标的近似值。最简单的方法是将每张像片相对定向角元素（连续像对相对定向）与航带置平中绝对定向角元素取代数和。也可以直接用航带法求出的各点坐标由空间后方交会逐片求出。

二、平面区域网方法

这种方法的思想是：视地面平坦，每张像片的$\varphi = 0$，$\omega = 0$，利用全区域控制点和像片之间公共点对每张像片进行二维平面坐标的转换

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{Y} & \overline{X} & 1 & 0 \\ \overline{X} & \overline{Y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ X_{ig} \\ Y_{ig} \end{bmatrix} \tag{7-1}$$

式中：$\overline{X}$、$\overline{Y}$为各片重心化坐标；

X_i、Y_i为公共点的坐标均值，对控制点，应为它的地面摄测坐标。

经按上式（7-1）平差后求得每张像片的X_{ig}、Y_{ig}、λ、κ。

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2},\quad \kappa = \mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{b} \tag{7-2}$$

任一点的地面坐标近似值按下式求得：

$$\left.\begin{array}{l} X_i \\ Y_i \end{array}\right\}\text{由式（7-1）求得} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ Z_i \approx \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i \end{array}\right\} \tag{7-3}$$

式中：n 为高程控制点个数，Z_i^c 为第 i 个高程控制点的高程。

任一摄站点的地面坐标近似值按下式计算：

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} X_S \\ Y_S \end{matrix}\right\} \text{由式 (7-1)计算} \\ &Z_S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^c + \lambda f \end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

任一片的外方位角元素为：

$$\varphi = \omega = 0 \quad \text{(假定值)}$$
$$\kappa = \mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{b} \quad \text{(计算值)}$$

§7.3 误差方程式与法方程式建立

一、误差方程式与法方程式结构

光线束法区域网平差的数学模型仍然是共线方程：

$$x = -f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}$$

$$y = -f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}$$

对上式进行线性化，与单像空间后方交会不同的是，这里对 X、Y、Z 也要进行偏微分。在内方位元素视为已知值情况下，其误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial c}dc + \frac{\partial x}{\partial X_S}dX_S + \frac{\partial x}{\partial Y_S}dY_S + \frac{\partial x}{\partial Z_S}dZ_S \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial X}dX + \frac{\partial x}{\partial Y}dY + \frac{\partial x}{\partial Z}dZ - l_x \\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial c}dc + \frac{\partial y}{\partial X_S}dX_S + \frac{\partial y}{\partial Y_S}dY_S + \frac{\partial y}{\partial Z_S}dZ_c \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial X}dX + \frac{\partial y}{\partial Y}dY + \frac{\partial y}{\partial Z}dZ - l_y \end{aligned}\right\} \tag{7-5}$$

上式中各偏导数的值详见第二章（2-35）式。在竖直摄影情况下，仿照式（2-39），上式的偏导数用相应的数值代入，并考虑到 $Z - Z_S = -H$，以上误差方程式可以写成：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -f(1+\frac{x^2}{f^2})db - \frac{xy}{f}da + ydc + \frac{f}{Z-Z_S}dX_S + 0 \\ &\quad + \frac{x}{Z-Z_S}dZ_S - \frac{f}{Z-Z_S}dX + 0 - \frac{x}{Z-Z_S}dZ - l_x \\ v_y &= -\frac{xy}{f}db - f\left(1+\frac{y^2}{f^2}\right)da - xdc + 0 + \frac{f}{Z-Z_S}dY_S \\ &\quad + \frac{y}{Z-Z_S}dZ_S + 0 - \frac{f}{Z-Z_S}dY - \frac{y}{Z-Z_S}dZ - l_y \end{aligned}\right\} \tag{7-6}$$

$$\left.\begin{aligned} l_x &= x + f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ l_y &= y + f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}7)$$

l_x, l_y均用X_S、Y_S、Z_S、a、b、c以及X、Y、Z的近似值计算。当每片上每点的l_x，l_y小于某一限差时，即获得正确解。

若把误差方程式写成矩阵的形式：

$$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix} - \boldsymbol{L} \quad (7\text{-}8)$$

式中

$$\boldsymbol{V} = [v_x \quad v_y]^T, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -a_{14} & -a_{15} & -a_{16} \\ -a_{24} & -a_{25} & -a_{26} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{t} = [db \quad da \quad dc \quad dX_S \quad dY_S \quad dZ_S]^T$$

$$\boldsymbol{X} = [dX \quad dY \quad dZ]^T$$

$$\boldsymbol{L} = [l_x \quad l_y]^T$$

在式（7-8）这类误差方程式中含两类未知数t，X，相应的法方程式为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{L} \end{bmatrix} \quad (7\text{-}9)$$

或

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{12}^T & \boldsymbol{N}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 \\ \boldsymbol{L}_2 \end{bmatrix} \quad (7\text{-}9a)$$

消去未知数$\boldsymbol{X}$以后，可得改化法方程式：

$$(\boldsymbol{N}_{11} - \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{22}^{-1}\boldsymbol{N}_{12}^T)\boldsymbol{t} = \boldsymbol{L}_1 - \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{22}^{-1}\boldsymbol{L}_2 \quad (7\text{-}10)$$

以上我们列出误差方程式，法方程式及改化法方程式的公式。下面用一个实例来看看误差方程和法方程的结构特点。

现有一个由三条航带，每航带5张像片组成的区域，如图7-3-1所示。图中每个矩形的中间一排点的号码表示像片号，按图7-3-1中布点情况，列出的误差方程式未知数的系数矩阵结构图，如图7-3-2所示。点11是由像片21、22上的两条光线得到的，因此该点在每张像片上可以列出两个误差方程式，非零元素占有两条小黑块，一块与21片有关，另一块与22片有

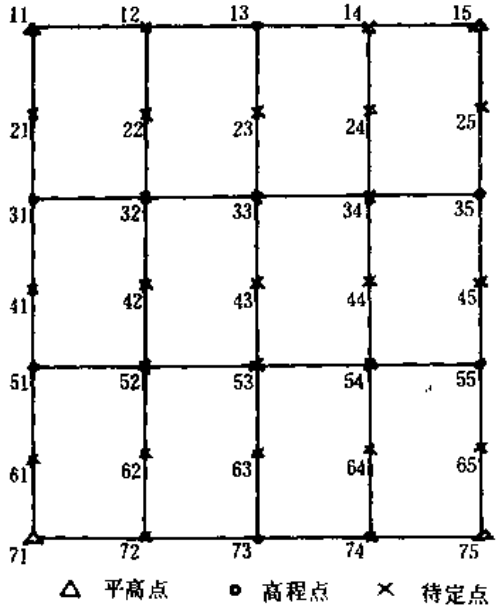


图 7-3-1

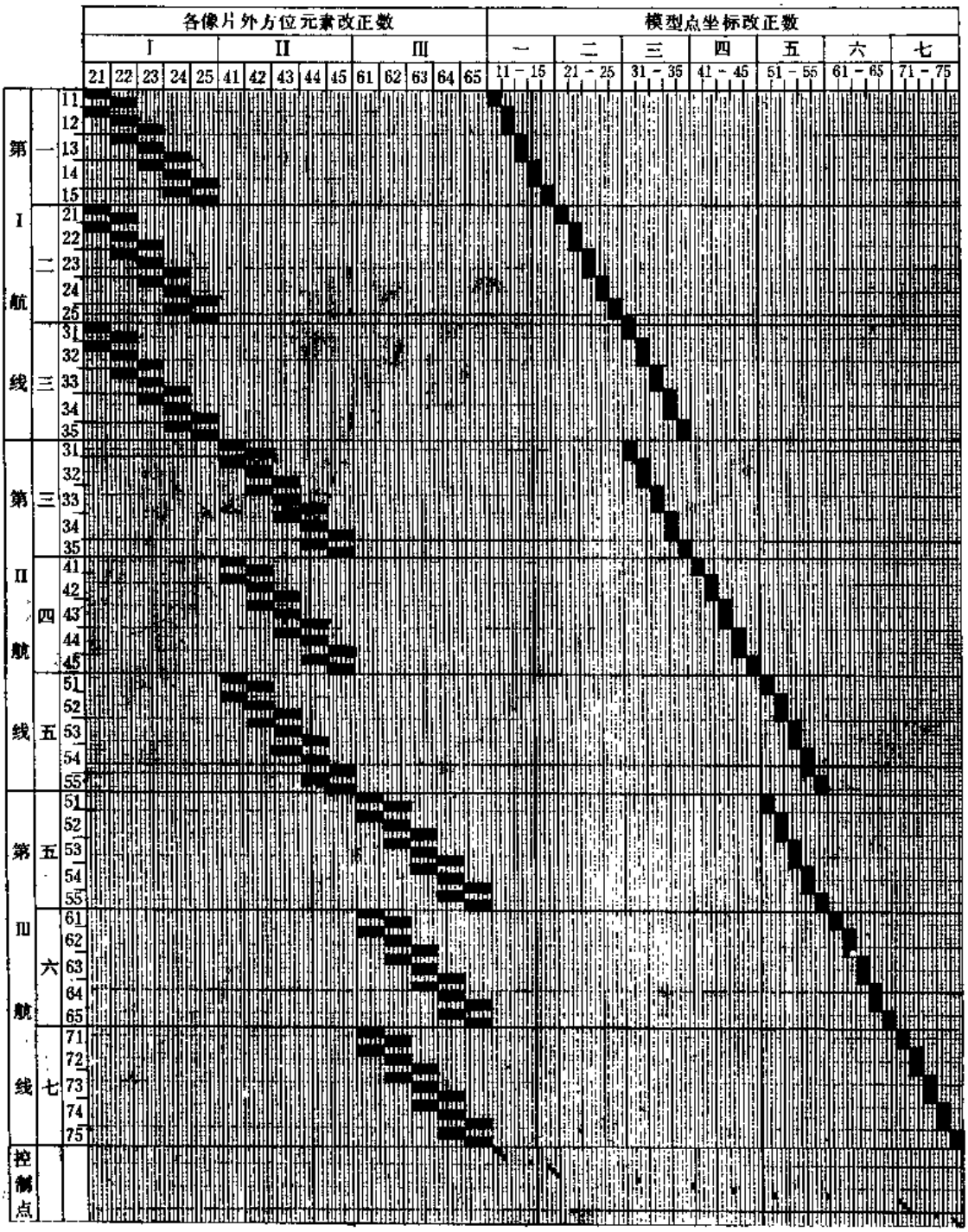
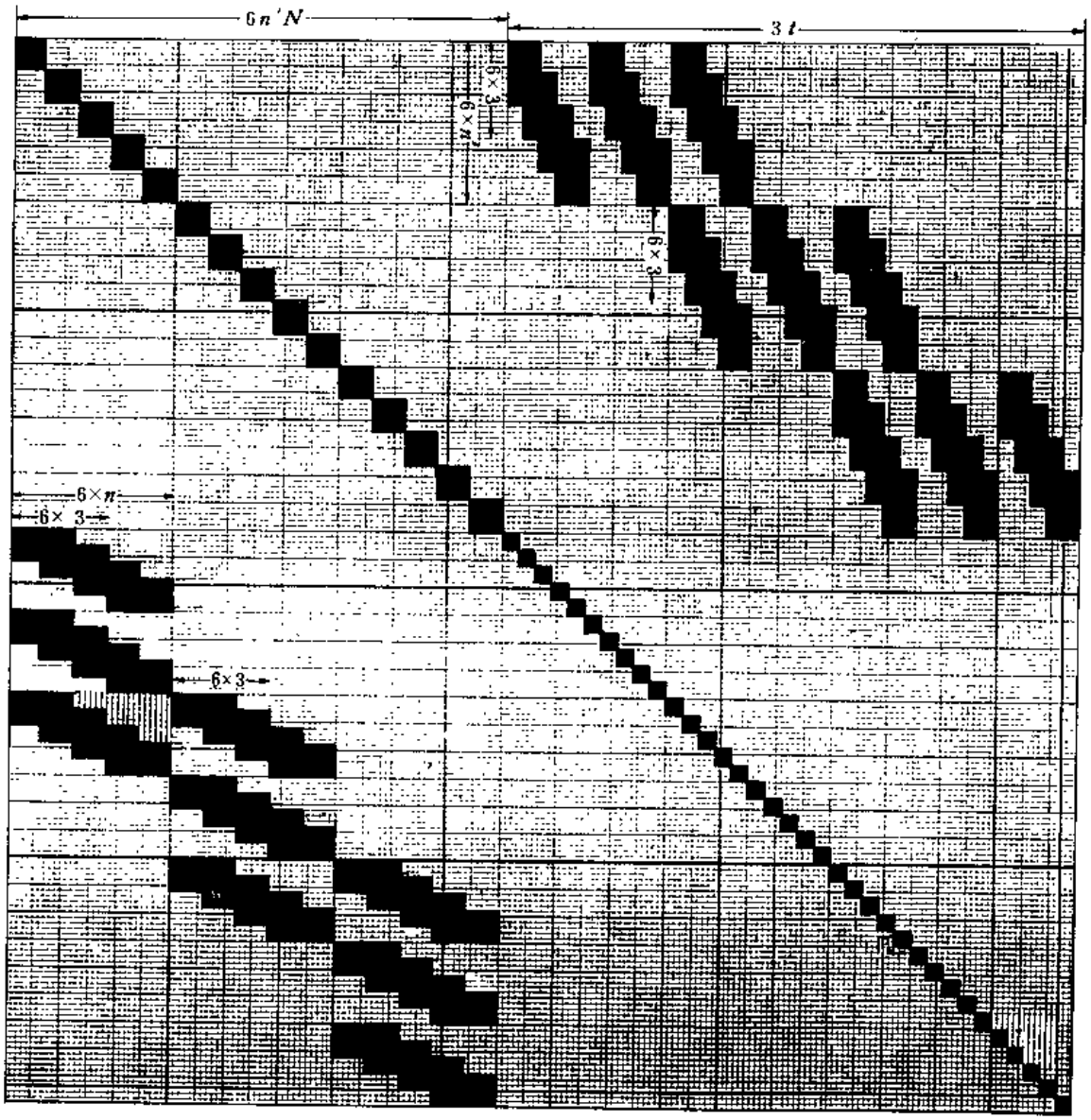


图 7-3-2 （如不考虑控制点本身误差时，则该点的坐标改正数系数为零）

关，对于坐标改正数来说则两个小黑块连成一个竖向的矩形。点32为六条光线的交点，在第一、二航带中各有六个误差方程式，图7-3-2中有六条黑块，它们分别与21、22、23和41、42、43六张像片有关。

按图7-3-1中布点，相应的法方程式未知数的系数矩阵结构图如图7-3-3所示。它是对称的带状的稀疏矩阵。对于每张像片来说A^TA的阶为6×6，对一个待定点来说，B^TB的阶为3×3，A^TB的阶为6×3。若有N条航带，每航带有n张像片，则全区的A^TA的阶数为$6nN\times 6nN$。全区待定点有n'个，则相应的B^TB的阶数为$3n'\times 3n'$。图中主对角线上大方黑块的阶数为6×6，小方黑块的阶数为3×3，非主对角线上反映出每张像片上有关待定点的内容，每条航带涉及到三排待定点，因此在图中出现三个阶梯状竖黑块，两条航带之间有一排公共点，在这排点上出现两个阶梯状竖黑块分别与相邻两条航带有关。



N为航线数　　n'为每航线中的像片数　　t为参加平差的模型点数

图 7-3-3

二、改化法方程式的结构

与独立模型法区域网空中三角测量的改化法方程式的带宽相类似，其带宽的大小与像

片编号的方式有关，当区域中航带数小于每航带的像片数时，像片应取旁向编号，否则像片沿航带方向编号，其带宽计算公式为：

像片沿航带方向编号：

$$m' = (n+3)\text{块}$$
$$m = (n+3)\times 6 \qquad (7\text{-}11)$$

像片沿垂直于航带方向编号：

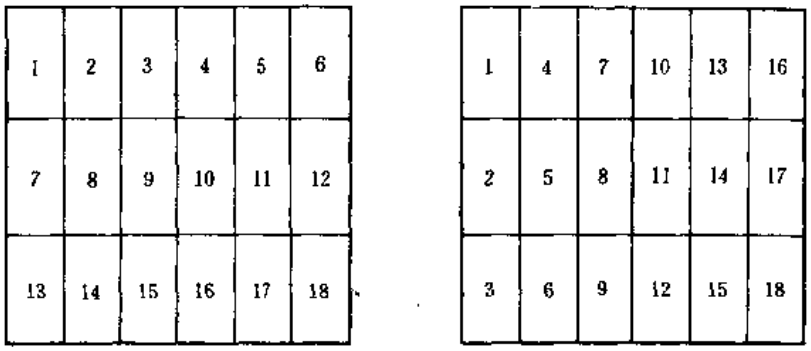
$$m' = (2N+2)\text{块}$$
$$m = (2N+2)\times 6 \qquad (7\text{-}12)$$

式中：m表示带宽，m'表示带宽的子块数；

N表示全区航带数；

n表示航带中像片数。

例如三条航带，每航带六张像片的一个区域，若按两种方式进行像片编号，如图7-3-4。



沿航带编号 (a)　　垂直于航带方向编号 (b)

图 7-3-4

由式（7-11）可得像片沿航带方向编号的带宽：

$$m' = (n+3) = 9\text{块}, \quad m = 54$$

由式（7-12）可得像片沿垂直于航带方向编号的带宽：

$$m' = (2N+2) = 8\text{块}, \quad m = 48$$

在光束法区域网空中三角测量中也有与独立模型法相似的情况，根据全区域的航带数和每航带中像片数，来决定像片编号应沿哪个方向递增。显然，当$n>2N-1$时，垂直于航线方向编排像片次序有利。

像片编号确定以后，我们就可以根据改化法方程式结构的规律：主对角线上是各片自身法化项，非主对角线上是相互法化项，这时这些法化项前面的系数k表示该点所跨像片的张数。其构成规律与第六章§6.3所叙相同。

就图7-3-1所示的情况，像片沿航带方向编号，这时带宽为$6(n+3)$，改化法方程式的结构如图7-3-5所示。

这种结构的改化法方程式仍然采用循环分块法求出全区每片的六个方位参数，然后可

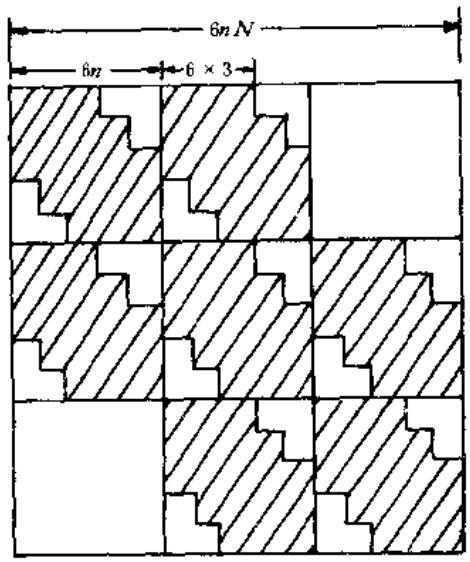


图 7-3-5

以采用前方交会法求出待定点的地面坐标。或者用多片前方交会的方法求得待定点地面坐标。多片前方交会的误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -a_{14}dx - a_{15}dY \\ &\quad -a_{16}dZ - lx \\ v_y &= -a_{24}dX - a_{25}dY \\ &\quad -a_{26}dZ - l_y \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}13)$$

如果有一点跨M张像片，则可列出M个误差方程组式（7-13），共$2M$个误差方程式，然后解出该点的地面坐标。

§7.4 两类未知数交替趋近法

交替趋近法的基本思想源于后交—前交解法。

共线方程式经线性化以后的误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= a_{11}db_S + a_{12}da_S + a_{13}dc_S + a_{14}dX_S + a_{15}dY_S + a_{16}dZ_S \\ &\quad -a_{14}dX - a_{15}dY - a_{16}dZ - l_x \\ v_y &= a_{21}db + a_{22}da + a_{23}dc + a_{24}dX_S + a_{25}dY_S + a_{26}dZ_S \\ &\quad -a_{24}dX - a_{25}dY - a_{26}dZ - l_y \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}14)$$

如果已知地面点的坐标，上式就变成解算空间后方交会的误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= a_{11}db + a_{12}da + a_{13}dc + a_{14}dX_S + a_{15}dY_S + a_{16}dZ_S - l'_x \\ v_y &= a_{21}db + a_{22}da + a_{23}dc + a_{24}dX_S + a_{25}dY_S + a_{26}dZ_S - l_y \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}15)$$

反过来，如果每张像片的外方位元素为已知，则可得空间前方交会的误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -a_{14}dX - a_{15}dY - a_{16}dZ - l''_x \\ v_y &= -a_{24}dX - a_{25}dY - a_{26}dZ - l''_y \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}16)$$

实际上在光束法区域网平差中，地面点坐标和每张像片的外方位元素均为未知的，采用交替趋近法时，则依次认为它们均为已知。首先利用地面点的近似坐标作为已知值，则可按式（7-15）求出每片的外方位元素，然后，再用外方位元素的新值代入式（7-16）中计算每点的地面坐标，如此反复趋近，直至每片外方位元素的改正值和待定点坐标的改正值均小于某个限值时为止，趋近结束。这就是交替趋近法的基本思想。

这种解法的优点是无需很大容量的计算机。缺点是反复趋近的次数较多，计算时间长。此外，若未知数初始值不好，有时还会发生不收敛的情况。

除了这种交替趋近解法之外，还有利用光线束角锥体原理方法解决区域网平差的问题，角锥体法原理在前面第二章的§2.3中已经介绍过，这里不再重复。

*§ 7.5 区域网平差中像片和点的排列顺序

前面曾经讨论过光束法区域网平差中改化法方程式的带宽与像片编号的方式有密切的关系，当测区的航空摄影的飞行很规则时，用前面介绍的确定带宽的方法就可以解决了。如果是不太规则的航空摄影资料，如图7-5-1所示，用前面的公式来预计带宽的最小值，往往就不能反映出实际的带宽数值。本节说明在不规则摄影情况下，像片的合理排队方法和实际带宽的确定方法。

为了解决这个问题，需要一个摄站点的逻辑顺序和公共点的逻辑顺序，通过一个整理程序，计算公共点所在摄站序号的最大和最小的编号。这个程序的输入数据是全部摄站点的近似坐标和每张像片所包含的公共点号。

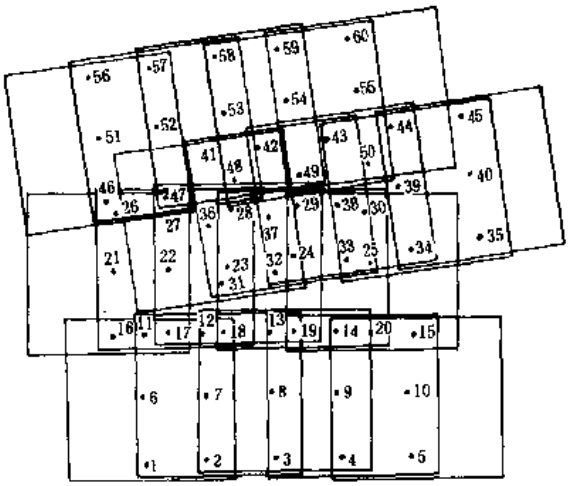


图 7-5-1

一、摄站点的逻辑顺序编号

先建立一系列垂直于第一条航带的平行线，其间隔约等于第一条航带的平均基线长度的一半。为此需要把每个摄站点的近似坐标变换到以第一条航带为 x 轴的坐标系中，把所有落在同一区间内的摄站点按自下面上的顺序编号，并按区间顺序自左向右开始。如图7-5-2所示。

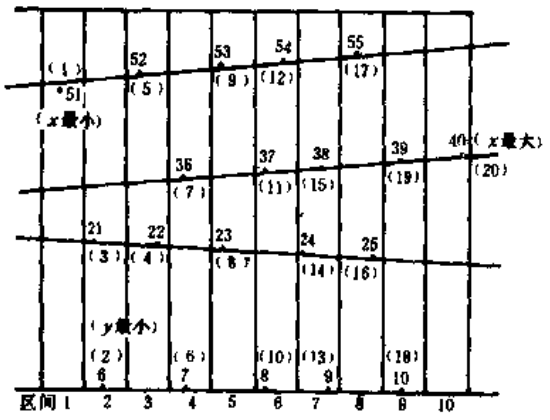


图 7-5-2

摄影测量区域网改化法方程式中，对应于主对角线外的某单元处是否有非零元素，决定于其相应两个摄站间是否有公共点。如果某待定点落在带有逻辑序号 i 和 j 的摄站中，则在改化法方程式的第 i 行第 j 列中就要加入一个 6×6 子矩阵。所有连接点中其所在摄影站序号的最大差数加 1，就是在这种摄站点逻辑编号下的最大带宽。表7-5-1中列出每点所属的摄站点，由表中找出各摄站点逻辑序号最大最小之差，其中最大的数值加 1 即为实际带宽的子块数。

二、公共点的逻辑顺序编号

按摄站点的逻辑序号来编排公共点的逻辑序号，其规则为：

（1）按其最小摄站点逻辑序号从 1 开始；

（2）在同一个最小摄站点逻辑序号中的点，则按其最大摄站点逻辑序号自小而大的排列。

最大、最小摄站点逻辑序号从表7-5-1中找到。

表 7-5-1

点号	摄站实际序号	摄站逻辑序号	最小	最大
1	6，7	2，6	2	6
2	6，7，8	2，6，10	2	10
3	7，8，9	6，10，13	6	13
4	8，9，10	10，13，18	10	18
5	9，10	13，18	13	18
6	6，7	2，6	2	6
7	6，7，8	2，6，10	2	10
8	7，8，9	6，10，13	6	13
9	8，9，10	10，13，18	10	18
10	9，10	13，18	13	18
11	6，7，21，22	2，6，3，4	2	6
12	6，7，8，22，23	2，6，10，4，8	2	10
13	7，8，9，23，24	10，13，6，8，14	6	14
14	8，9，10，24，25	10，13，18，14，16	10	18
15	9，10	13，18	13	18
16	21，22	3，4	3	4
17	21，22，23，6，7	3，4，8，2，6	2	8
18	22，23，24，7，8	4，8，14，6，10	4	14
19	23，24，25，8，9	8，14，16，10，13	8	16
20	24，25，9，10	14，16，13，18	13	18
21	21，22	3，4	3	4
22	21，22，23	3，4，8	3	8
23	22，23，24，36，37	4，8，14，7，11	4	14
24	23，24，25，37，38	8，14，16，11，15	8	16
25	24，25	14，16	14	16
26	21，22，51，52	3，4，1，5	1	5
27	21，22，23，51，52，53	3，4，8，1，5，9	1	9
28	22，23，24，36，37	4，8，14，7，11	4	14
29	23，24，25，37，38	8，14，16，11，15	8	16
30	24，25，38，39	14，16，15，19	14	19
31	22，23，36，37	4，8，7，11	4	11
32	23，24，36，37，38	8，14，7，11，15	7	15
33	24，25，37，38，39	14，16，11，15，19	11	19
34	38，39，40	15，19，20	15	20
35	39，40	19，20	19	20
36	36，37，22，23	7，11，4，8	4	11
37	23，24，36，37，38	8，14，7，11，15	7	15
38	37，38，39，24，25	11，15，19，14，16	11	19
39	38，39，40	15，19，20	15	20
40	39，40	19，20	19	20
41	36，37，52，53	7，11，5，9	5	11
42	36，37，38，53，54	11，15，7，9，12	7	15
43	37，38，39，54，55	11，15，19，12，17	11	19
44	38，39，40	15，19，20	15	20

续表 7-5-1

点号	摄站实际序号	摄站逻辑序号	最小	最 大
45	39，40	19，20	19	20
46	21，22，51，52	3，4，1，5	1	5
47	51，52，53，21，22，23	1，5，9，3，4，8	1	9
48	52，53，54，36，37	5，9，12，7，11	5	12
49	53，54，55，37，38	9，12，17，11，15	9	17
50	54，55，38，39	12，17，15，19	12	19
51	51，52	1，5	1	5
52	51，52，53	1，5，9	1	9
53	52，53，54	5，9，12	5	12
54	53，54，55	9，12，17	9	17
55	54，55	12，17	12	17
56	51，52	1，5	1	5
57	51，52，53	1，5，9，	1	9
58	52，53，54	5，9，12	5	12
59	53，54，55	9，12，17	9	17
60	54，55	12，17	12	17

* 表中最小、最大表示逻辑序号的最小、最大值。

在表7-5-2中按上述两个原则排列了公共点的逻辑顺序和最大、最小的序号差，从而可以求得实际的带宽。有了逻辑顺序表7-5-2，则在逐点法化时，可以按表中顺序进行，而内存中所需最大带宽即可从表中计算出来。

表 7-5-2

点的逻辑顺序	实际点号	最小摄站序号	最大摄站序号	最大、最小序号差	点的逻辑顺序	实际点号	最小摄站序号	最大摄站序号	最大、最小序号差
1	26	1	5	4	15	12	2	10	8
2	46	1	5	4	16	16	3	4	1
3	51	1	5	4	17	21	3	4	1
4	56	1	5	4	18	22	3	8	5
5	27	1	9	8	19	31	4	11	7
6	47	1	9	8	20	36	4	11	7
7	52	1	9	8	21	18	4	14	10*
8	57	1	9	8	22	23	4	14	10*
9	11	2	6	4	23	28	4	14	10*
10	1	2	6	4	24	41	5	11	6
11	6	2	6	4	25	48	5	12	7
12	17	2	8	6	26	53	5	12	7
13	2	2	10	8	27	58	5	12	7
14	7	2	10	8	28	3	6	13	7

续表 7-5-2

点的逻辑顺序	实际点号	最小摄站序号	最大摄站序号	最大、最小序号差	点的逻辑顺序	实际点号	最小摄站序号	最大摄站序号	最大、最小序号差
29	8	6	13	7	45	43	11	19	8
30	13	6	14	8	46	55	12	17	5
31	32	7	15	8	47	60	12	17	5
32	37	7	15	8	48	50	12	19	7
33	42	7	15	8	49	5	13	18	5
34	24	8	16	8	50	10	13	18	5
35	19	8	16	8	51	15	13	18	5
36	29	8	16	8	52	20	13	18	5
37	49	9	17	8	53	25	14	16	2
38	54	9	17	8	54	30	14	19	5
39	59	9	17	8	55	34	15	20	5
40	9	10	18	8	56	39	15	20	5
41	14	10	18	8	57	44	15	20	5
42	4	10	18	8	58	35	19	20	1
43	33	11	19	8	59	40	19	20	1
44	38	11	19	8	60	45	19	20	1

* 预期带宽 = 2 × 4 + 2 = 10块
实际带宽 = 10 + 1 = 11块

§7.6 三种区域网平差方法的比较

在第五、六、七三章中，我们已分别叙述了解析空中三角测量中常用的三种区域网平差方法，即航带法区域网平差、独立模型法区域网平差和光束法区域网平差。现在可以从数学模型和平差原理上来比较这三种方法各有什么特点，以及在实际作业中如何选择合适的区域网加密方法。

解析空中三角测量是通过对所欲加密的地区进行航空或航天摄影，量测像片（或模型）上若干点的坐标，利用电子计算机根据摄影时固有的几何关系和少量地面控制信息解算全区待求点的地面坐标。区域网平差方法是随着电子计算机技术的发展和用户的要求不断发展的。

航带法产生于电子计算机问世之初，它是从模拟仪器上的空中三角测量演变过来的，是一种分步的近似平差方法。首先通过单个像对的相对定向和模型连接构建自由航带，然后在进行每条航带多项式非线性改正时，顾及航带间公共点条件和区域内的控制点，使之得到最佳的符合。

从这个思想出发，航带法区域网平差的数学模型是航带坐标的非线性多项式改正公式，

“观测值”是自由航带中各点的摄影测量坐标，平差单元为航带，未知数是各航带的多项式改正系数。显然可见这种平差方法的特点是未知数少、解算方便和快速，但是精度不高，所谓的观测值——自由航带坐标并不是真正的原始观测值，故彼此并不独立，因此它不是严密的平差方法。目前主要用于为严密平差提供初始值和小比例尺低精度加密点位。

独立模型法平差源于单元模型空间相似变换的思想。利用由像片坐标解析相对定向求出的或用模拟测图仪量测的独立模型坐标，通过各单元立体模型在空间的旋转、平移和缩放，以使得模型公共点有尽可能相同的坐标，并通过地面控制点使整个空中三角测量网最佳地纳入规定的坐标系中。

从这个思想出发，独立模型法区域网平差的数学模型是单元模型的空间相似变换公式，观测值是计算或量测的模型坐标，平差单元为独立模型，未知数是各模型空间相似变换参数共7个，亦可按平面4个、高程3个参数分开解求，此外未知数还有加密点的地面坐标。因此整区的未知数要比航带法区域网多得多。但是如采用平高分求的办法，其解算所占有的内存和计算时间要比光束法区域网少得多。这种方法是一种相当严密的平差方法。其数据既可由立体坐标量测仪量测的像片坐标解析计算出来，也可以利用生产单位已有的模拟测图仪测出来。因此，独立模型法区域网平差是颇受生产单位欢迎的，以测图加密为目的的解析空中三角测量作业方法，在企业界使用极广。如果能顾及到模型坐标间的相关特性，独立模型法在理论上与光束法同样地严密。

光束法区域网平差是从实现整区摄影过程的几何反转出发，基于摄影成像时，像点、物点和投影中心点共线的特点面提出的。这种方法最初提出时，由于受当时计算机和计算技术的限制，未能广泛应用。但随着电子计算机的发展，这种最严密的平差方法日益得到广泛应用。

光束法区域网平差的数学模型是存在于每个光束中的共线方程式，平差单元是单个光束，每张像片的像点坐标为原始观测值，未知数是各片的外方位元素（在某些特定条件下也包含内方位元素）和所有待求点的地面坐标。通过各片光束在空间的旋转和平移(6个未知参数）使同名光线最佳地相交，并最佳地纳入到地面控制系统中去。它是最严密的一步解法，误差方程式直接对原始观测值列出；能最方便地顾及像片系统误差的影响（见第八章）；最便于引入非摄影测量附加观测值，如导航数据和地面测量观测值（见第九章）；它可以严密地处理非常规摄影以及非量测相机的像片数据（见本书第十六章以及《非地形摄影测量》）；而且便于计算模拟测图仪、纠正仪或解析测图仪上的安置元素和提供最精确的内、外方位元素。

当然，与前两种方法相比，光束法区域网平差也有其缺点。首先，由于共线方程所描述的像点坐标与各未知参数之关系是非线性的，必须建立线性化误差方程式和提供各未知数初始值。而这对于航带法区域网是不必要的，对于平面独立模型法平差也不需要。其次，光束法区域网平差未知数多、计算量大，程序设计也相当困难。第三，它不能直接利用在模拟测图仪上量测的模型坐标。此外，对于光束法平差，它不能像前两种方法那样，将平面高程分开处理，因而只能是三维网平差。

由于光束法区域网平差的上述特点，其应用范围是：低级大地测量三角网（Ⅲ、Ⅳ

等）的加密，高精度的数字地籍测量——坐标地籍中用来测定地界点坐标（需作标志）或加密测定地界点坐标的密集控制点，非地形摄影测量，变形测量，以及与非摄影测量观测值的联合平差。

三种摄影测量区域网加密方法的比较还可以参见图7-6-1。

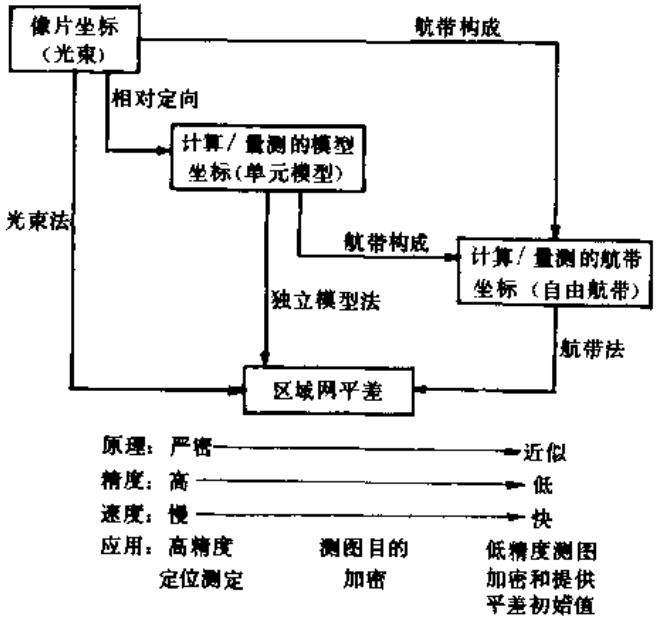


图 7-6-1

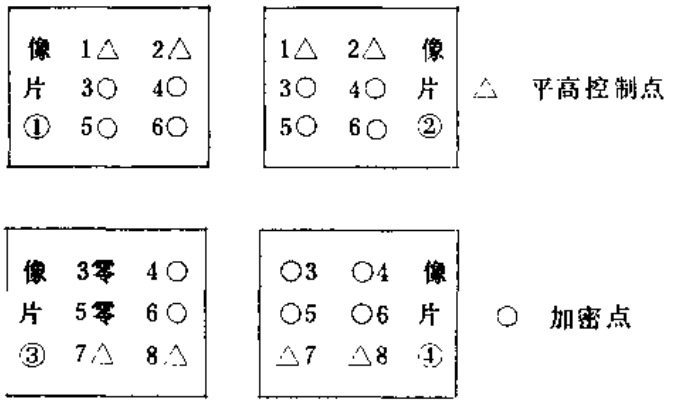
本章习题与思考题

1. 试说明光束法区域网平差方法的基本思想。为什么说它是最严密的摄影测量加密点位的方法？

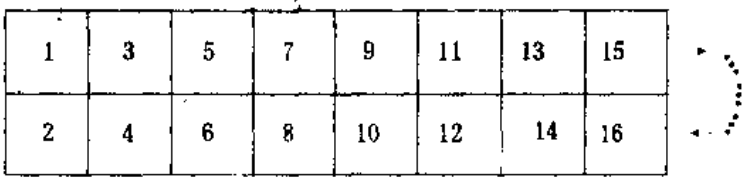
2. 光束法区域网平差中为什么要先确定未知数的初始值？有哪几种计算初始值的方法？各有什么优、缺点？

3. 列出控制点和加密点的像点坐标观测值方程式，并回答如何计算常数项。

4. 下图中由4片组成一个最简单的光束法区域网平差例子，试计算观测值个数、未知数以及多余观测个数。并绘出误差方程式、法方程式和改化法方程式的结构。



5. 对于航向重叠60%，旁向重叠20%的下列区域，试绘出最佳的改化法方程式结构图。



6. 带宽的定义，如何选择最佳带宽？

7. 求解带状法方程组时，计算工作量与（带宽）^{2} ×未知数个数成正比。试计算和比较上题中沿航向和垂直于航向排序时的工作量之比。

8. 什么是两类未知数交替趋近式？试叙述计算步骤和优缺点。

9. 试比较三种区域网平差方法的优缺点及各自的应用范围。

第八章　系统误差补偿与自检校光束法区域网平差

§8.1　概　述

一、问题的提出

对于解析摄影测量加密而言，从航空摄影开始，直至获得像片或模型坐标的整个数据获取过程中，都会带来许多系统误差。熟知的系统误差有摄影系统的畸变差、摄影材料的系统变形、软片的压平误差、地球曲率和大气折光、量测仪器的准系统误差以及观测员的系统误差等等。如果能获得它们的有关参数（如通过试验室检校等），人们一般认为，就可以在解析空中三角测量平差之前，预先消除这些系统误差的影响（见§3.4和§5.2）。

然而，区域网平差的实际结果表明，即使引入系统误差的预改正，平差后的结果仍然存在一定的系统误差，从而使最严密的平差方法，如光束法，不能获得最精确的结果，实际精度与理论预期精度之间仍存在明显的差异。

在70年代初，为了验证三种摄影测量区域网平差方法的精度，欧洲摄影测量试验研究组织（OEEPE）曾建立一个大型试验场，称为上施瓦本试验场，它位于联邦德国南部。利用该试验场上已知的地面控制点和检查点（均布设了人工标志），来研究平差的精度。光束法与独立模型法区域网平差结果列于表8-1-1。

上施瓦本试验场平差结果（μm）　　表 8-1-1

控制点间隔		独立模型法平差				光束法平差			两者精度比	
x、y	z	σ_{o_p}	σ_{o_h}	μ_{xy}	μ_z	σ_o	μ_{xy}	μ_z	μ_{xy}	μ_z
$i=2$	$i=4$	6.8	8.4	9.9	14.7	5.3	8.8	15.8	1.12	0.93
$i=4$	$i=8$	6.3	8.3	13.4	19.0	4.7	14.0	22.2	0.96	0.86
$i=8$	$i=12$	6.2	8.3	20.0	22.1	4.1	24.0	28.4	0.83	0.78
$i=11$	$i=25$	6.1	8.3	22.1	65.0	4.0	24.9	44.2	0.89	1.47

* $\mu_{xy}=\pm\sqrt{(\mu_x^2+\mu_y^2)/2}$；

精度比 $=\dfrac{\mu_{独立模型法}}{\mu_{光束法}}$

从表中看出：光束法平差与独立模型法平差的精度比达不到理论预期的1.6（平面）和1.3（高程），实际上许多情况下光束法平差还不如独立模型法的精度好。其次，随着控制点数目的变化（即控制点间隔的变化），同一组像片观测值的单位权中误差估值也跟着变化，而不是常数。

为什么最严密的平差方法得不到最精确的结果？为什么对同一组观测值估求的方差值会变化？这只能表明，所建立的数学模型并未真正反映客观实际，可能还存在某种未被考虑的模型误差。经过从1970到1980年十年的研究，人们找到了其根源，即存在着难以预先

估计和测定的像片系统误差。

二、像片坐标的系统误差特性

（一）摄影测量观测值中可能包含的系统误差源

所谓系统误差应当理解为由于某种物理原因造成的有一定作用规律而又不可避免的误差。摄影测量观测值的系统误差主要来自以下几个方面。

首先是摄影机的系统误差，如物镜畸变差、软片压平误差，滤光片或窗口保护玻璃不平引起的光学误差。不同的暗匣也可能带来不同的系统误差。其次是航摄飞机带来的系统误差，如在飞行中引起的大气振动，单引擎发动机排出的气流通过摄影窗口均可引起系统性的构像误差。另一个主要系统误差源是底片变形。不论是原始航摄负片，还是量测用的复制片，片基本身总有一定的系统变形，而且在航摄、摄影处理、拷贝和量测过程中可能会受到某种应变力的作用而造成动态的几何变形。大气折光这个误差源已在基础摄影测量中讨论过，在本书§5.2中也讲述了预改正的方法。这里要强调的是实际气象条件下的大气折光会与标准大气条件下的计算结果有出入，尤其是物镜附近的大气层条件将对折光误差产生影响。地球曲率问题如果按第四章严格处理方法，将不是系统误差源，但是，倘若用近似处理方法，它也构成为一种系统误差源。最后，还应考虑由于观测用的仪器及观测员本身的系统误差也将引起量测的像片坐标的某种系统误差。

（二）系统误差的随机特性

这里指的是随着外界条件的变化，像点坐标系统误差发生的随机变化。

许多类像片系统误差是在实验室中测定的，是在静止状态下进行的。而实际数据获取过程是一个动态过程。例如摄影飞行时，飞机加速度、气压差和温度差均作用于摄影机上，软片传输装置和压平吸附装置的马达引起的升温也将作用于摄影机壳体和物镜支撑点。更换滤光片、更换暗匣，物镜的成像性能并将直接改变。

联邦德国Ellenberg博士曾对一架欧波同厂的摄影机七年试验的结果进行了研究，其主要结果列于表8-1-2中。

一架RMK 15/23的误差特性　　表 8-1-2

偶然误差	±2.5～±3.0μm
系统误差	±3.6μm左右
两次航摄飞行系统误差之差别	±4.4μm左右
底片暗匣改变的影响	±3.5μm左右
更换滤光片的影响	±2.5μm左右

从中看出：

——现代的航空摄影相机可以达到很高的精度，偶然误差中误差可控制在±3.0μm之内（指对人工标志点的量测精度）；

——与偶然误差相比，系统误差是不容忽略的；

——实际航摄过程中各种因素的作用下，系统误差并不是恒一不变的，其变化量甚至不小于系统误差本身的大小。

上面类似的结果也由许多其它学者所证实。Ellenberg甚至认为，只有在同一天用同一软片暗匣和相同的滤光片摄得的航摄资料才具有相同的系统误差。

三、补偿系统误差的各种方法

除了通过实验室手段测定各种系统误差参数，在平差前进行预改正外，通常可采用下列各种方法来补偿像片系统误差。

一种直接补偿法称为试验场检校法，由联邦德国Kupfer教授提出。考虑到常规的实验室检校不能完全代表获取像片数据的实际过程，Kupfer提出利用真实摄影飞行条件下的试验场检校法，由大量地面控制点求得补偿系统误差的参数。在保证摄影测量条件（即摄影机、摄影期、大气条件、摄影材料，摄影处理条件，量测仪器及观测员等）基本不变的情况下，用这组参数来补偿和改正实际区域网平差中的系统误差。详见§8.2。

一种简单的补偿方法是自抵消法。它通过对同一测区进行相互垂直的两次航摄飞行，航向与旁向重叠均为60%，从而获得同一测区的四组摄影测量数据（即四次覆盖测区）。将这四组数据同时进行区域网平差，此时各组数据之间的系统变形将会相互抵消或减弱，使系统误差成了“偶然误差”，在四组数据整体平差结果中，也可能部分地顾及系统误差的影响。

在摄影测量中最常用的补偿系统误差方法是自检校法，或称利用附加参数的整体平差法。它选用若干附加参数组成系统误差模型，将这些附加参数作为未知数或带权观测值，与区域网的其它未知参数一起解求，从而在平差过程中自行检定和消除系统误差的影响。该方法将在§8.3中讨论。

还有一种补偿系统误差的方法称为验后补偿法，最先由法国学者Masson D'Autumi提出。这种方法不改变原来的平差程序，而是通过对平差后残差大小及方向的分析来推算像片系统误差的大小及特征。然后在观测值上引入系统误差改正。改正后的像片坐标重新再去计算一遍，从而使平差结果不断改善（见§8.4）。

广义的验后补偿法还包括根据控制点在平差后的坐标残差，进行最小二乘配置法的滤波和推估，从而消除和补偿地面控制网中产生的所谓应力，使摄影测量网更好地纳入大地坐标系统。

上述各种方法可以组合使用，如自检校平差加验后补偿法，试验场检校与自检校平差同时采用。通过这些组合可获得最佳效果。

四、顾及像片系统误差的前提

像点坐标中包含的系统误差通常总是与偶然误差混在一起的。在这种情况下，系统误差相当于某种信号，而偶然误差则是噪声。当偶然误差很大时，信噪比将很小。此时，系统误差很难测出和加以补偿，而且改正系统误差也不会对结果有明显的改善。因此，只有尽力减小像片坐标的偶然误差（见第三章），才有必要和可能来补偿像片系统误差。

此外，像点坐标或控制点坐标上的粗差也会干扰对系统误差的补偿，因此，只有利用适当的方法剔除数据中的粗差后（见下文第十一章），才能有效地补偿像片系统误差。

§8.2 试验场检校法

这里简要介绍Kupfer教授提出的试验场检校法。

一、试验场的设立与试验场摄影

建立试验场的目的是为了利用试验场上密集而精确的地面点来求解像片系统误差参数，并用这些参数去改正实际区域中的像片系统误差。为此目的，试验场不一定太大，但点位要作标志，并要精确地测定其地面坐标，而且可以长期地使用。

Kupfer在联邦德国波恩附近建立的赖特（Rheidt）试验场（见图8-2-1），面积只有2km×2km，布有41个均匀分布的点组。每个点组包含三个排在一行上的控制点，均作了人工标志。用三角测量和水准测量测定这些点的坐标和高程，精度在±10mm之内。

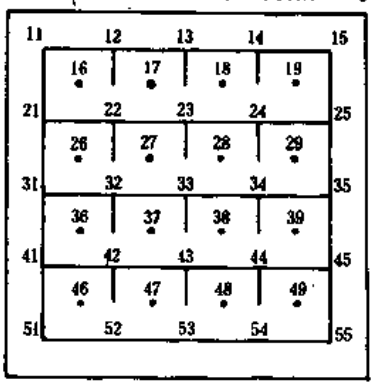


图 8-2-1

用宽角和特宽角摄影机对试验场进行航空摄影。第一次宽角摄影后相隔十周进行第二次宽角摄影。两次特宽角摄影则相隔仅6周。摄影比例尺为1:10500，一条航线重叠度为60%的连续三片即覆盖住试验场。按东西，西东，南北和北南交叉飞行得到四条航带，四次覆盖试验场。由这四条航带共12片组成了一个几何十分坚强的小型区域网。

二、试验场检校法测定系统误差参数

用上述方法得到的试验场区域网有坚强的摄影飞行几何条件和高密度的地面高精度控制，因而可毫无困难地求出像片系统误差参数。

Kupfer教授用带附加参数的自检校平差来测定系统误差参数，采用下列三次多项式：

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= a_3x^3 + a_4xy + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_8y^2 + a_9y^3\\ \Delta y &= b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4xy + b_5x^2y + b_6xy^2 + b_7y + b_9y^3\end{aligned}\right\} \tag{8-1}$$

利用地面上每个点组的中央点参加平差，求出附加参数。由于这种方法测定系统误差参数不是利用实验室而是利用了野外试验场，故而得名为试验场检校法。

平差后发现，前后两次航摄资料所求得的附加参数无显著差别，于是将两次数据一起整体平差，所求得的系统误差参数值用来改正实际测区航摄资料的系统误差。

为了检验这种方法的效果，利用第一次航摄资料求得的系统误差参数值来改正第二次航摄的结果或反之。与不加入试验场检校参数的平差结果相比较，精度可提高30%左右。

与§8.3的附加参数自检校法相比，本方法要增加一个高精度试验场和附加在实际航摄前后的两次飞行，尽管试验场很小，仍有相当的工作量。但是，利用它测出的系统误差参数来改正实际测区的像片系统误差是比较保险的，不会对平差及平差程序带来任何困难和问题。

三、对该方法的评价

用这种与正规航摄飞行并行的试验场飞行来测定系统误差改正参数，能基本上反映实际动态的系统误差。它既可免去难以进行的实验室检校，也避免自检校平差中解的稳定性问题，对我国航空摄影测量以及各种航天传感器影像的几何改正均具有实用价值。

目前国家测绘局已在太原附近建立了一个这样的试验场，它将提供给用户使用。

§8.3 利用附加参数的自检校法

这种方法是提出一个用若干附加参数描述的系统误差模型，在区域网平差的同时解求这些附加参数，同时就自动测定和消除了系统误差，故称为利用附加参数的自检校法。

由于系统误差可以方便地表示为像片坐标的函数，所以通常在以像片坐标为观测值的光束法区域网平差中进行附加参数的自检校平差。

一、基本解算过程

由于像片系统误差通常并不很大，因此描述系统误差的附加参数也不会很大。一般不宜将附加参数处理成自由未知数，而是把它们视为带权观测值。如果将外业控制点也处理成带权观测值的话，则平差的基本误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1 &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{L}_1 \quad \text{权矩阵}\ \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 &= \qquad \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{X}_2 \qquad - \boldsymbol{L}_2 \quad \text{权矩阵}\ \boldsymbol{P}_2 \\ \boldsymbol{V}_3 &= \qquad\qquad \boldsymbol{I}_3\boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{L}_3 \quad \text{权矩阵}\ \boldsymbol{P}_3 \end{aligned}\right\} \tag{8-2}$$

式中：$\boldsymbol{X}_1$为外方位元素和坐标未知数改正数向量；

$\boldsymbol{A}_1$为相应的误差方程式系数矩阵；

$\boldsymbol{L}_1$为像点（或模型点）坐标的观测值向量；

$\boldsymbol{P}_1$为像点（或模型点）坐标的权矩阵；

$\boldsymbol{X}_2$为控制点坐标的改正数向量；

$\boldsymbol{A}_2$为相应的误差方程式系数矩阵；

$\boldsymbol{L}_2$为控制点坐标改正数的观测值向量（取控制点坐标为初值时，$\boldsymbol{L}_2 = 0$）；

$\boldsymbol{P}_2$为控制点坐标的权矩阵；

$\boldsymbol{X}_3$为附加参数向量；

$\boldsymbol{A}_3$为相应的系数矩阵，由系统误差模型所决定；

$\boldsymbol{L}_3$为附加参数的观测值向量，只有当该参数已预先测出或已知时它才不为零；

$\boldsymbol{P}_3$为附加参数的权矩阵，取决于系统误差与偶然误差的信噪比。

令

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{V}_3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 \\ \boldsymbol{L}_2 \\ \boldsymbol{L}_3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & P_3 \end{bmatrix}$$

则式（8-2）可简写为：

$$V = AX - L,\ P \tag{8-3}$$

法方程式为：

$$(A^T PA)X = A^T PL \tag{8-4}$$

即：

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 & A_1^T P_1 A_2 & A_1^T P_1 A_3 \\ A_2^T P_1 A_1 & A_2^T P_1 A_2 + P_2 & A_2^T P_1 A_3 \\ A_3^T P_1 A_1 & A_3^T P_1 A_2 & A_3^T P_1 A_3 + P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T P_1 L_1 \\ A_2^T P_1 L_1 + P_2 L_2 \\ A_3^T P_1 L_1 + P_3 L_3 \end{bmatrix} \tag{8-5}$$

这种形式的法方程式导出的改化法方程式是镶边带状结构的形式（图8-3-1），可按布朗提出的逐次分块约化法求解。

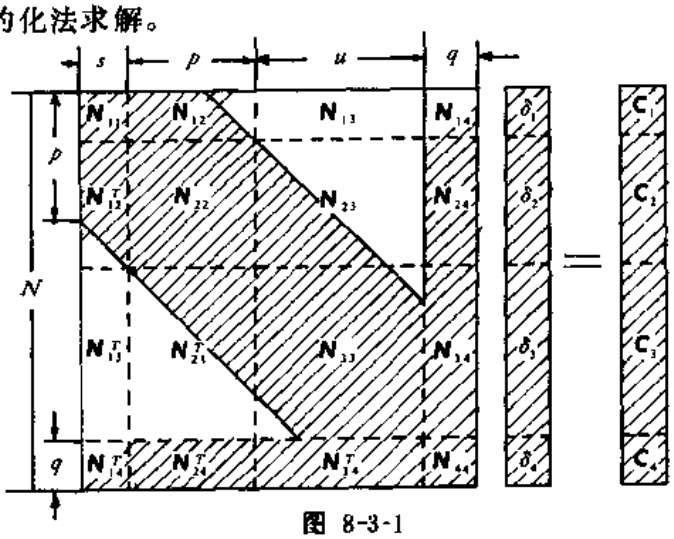


图 8-3-1

在图8-3-1中，带状结构反映了光束法或独立模型法平差的一般情况。当有 q 个附加参数时，便得到镶边宽度为 q 的结构。对于这种带宽为 P，镶边宽为 q 的 $N\times N$ 矩阵，采用以下的分块方法。

第一块包含 s 个元素，s 应小于 p 且为（$N-p-q$）所整除。第二块的元素为 p 个，第三块的元素 $u=N-(s+p+q)$ 个，最后一块则包含 q 个元素。

这样的分块将使 N_{13} 和 N_{31} 为零矩阵。若消去含 s 个未知数的子向量 δ_1，便得到

$$\left\{\begin{bmatrix} N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{23}^T & N_{33} & N_{34} \\ N_{24}^T & N_{34}^T & N_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{12}^T \\ N_{13}^T \\ N_{14}^T \end{bmatrix} N_{11}^{-1}[N_{12}\ N_{13}\ N_{14}]\right\}\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{12}^T \\ N_{13}^T \\ N_{14}^T \end{bmatrix} N_{11}^{-1} C_1 \tag{8-6}$$

由于 N_{13} 和 N_{13}^T 为零矩阵，故立得：

$$\begin{bmatrix} N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12} & N_{23} & N_{24} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{14} \\ N_{13}^T & N_{33} & N_{34} \\ N_{24} - N_{14}^T N_{11}^{-1} N_{12} & N_{34}^T & N_{44} - N_{14}^T N_{11}^{-1} N_{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} C_1 \\ C_3 \\ C_4 - N_{14}^T N_{11}^{-1} C_1 \end{bmatrix} \tag{8-7}$$

将该式与图8-3-1相比较，可以发现：原始法方程式系数矩阵的镶边带状结构仍然保持不变，带宽仍为 p，镶边宽仍为 q。原来带状部分发生的变化为 $\boldsymbol{N}_{11}$，$\boldsymbol{N}_{12}$，$\boldsymbol{N}_{12}^{T}$ 消去了，它们的影响并入 $\boldsymbol{N}_{22}$ 中，$\boldsymbol{N}_{22}$ 是带状矩阵中唯一发生变化的部分，而 $\boldsymbol{N}_{21}$，$\boldsymbol{N}_{33}$，$\boldsymbol{N}_{23}^{T}$ 不变。镶边部分的变化是 $\boldsymbol{N}_{14}$，$\boldsymbol{N}_{14}^{T}$ 消去了，它们的影响并入 $\boldsymbol{N}_{24}$，$\boldsymbol{N}_{24}^{T}$ 和 $\boldsymbol{N}_{44}$ 中。这样的约化使维数由 N 降为 $N-s$。当然每次约化时常数项 C_2 和 C_4 也发生相应变化。

显然可以用同一程序反复进行逐次分块约化，直至下一次再分块将使 $u=0$ 为止。最后求解一个维数为（$s+p+q$）的线性方程组。然后再逐块回代。从而使该方法可以在内存小的计算机上采用。

该命题也可用分解为 $\boldsymbol{LDL}^{T}$ 的改进平方根或从误差方程式出发的共轭斜量法求解。

二、系统误差模型的选择

从原则上讲，像片系统误差是像片坐标的函数，可以一般地表示为：

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= f_1(x, y)\\ \Delta y &= f_2(x, y)\end{aligned}\right\} \tag{8-8}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= g_1(r, a)\\ \Delta y &= g_2(r, a)\end{aligned}\right\} \tag{8-9}$$

式中：x，y 和 r，a 为像点在以像主点为坐标原点的直角坐标系或极坐标系中的坐标。

由于这种函数关系很难得知，在1972至1980年期间，各国学者曾研究过不同的选择方案。从引起系统误差的物理因素出发，美国的布朗博士提出了包含四类改正项共21个参数的模型：

$$\left.\begin{aligned}\Delta x = {} & a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 y^2 + a_5 x^2 y + a_6 xy^2 + a_7 x^2 y^2\\ & + \frac{x}{f}\left[a_{13}(x^2 - y^2) + a_{14} x^2 y^2 + a_{15}(x^4 - y^4)\right]\\ & + x\left[a_{16}(x^2 + y^2) + a_{17}(x^2 + y^2)^2 + a_{18}(x^2 + y^2)^3\right]\\ & + a_{19} + a_{21}\left(\frac{x}{f}\right)\\ \Delta y = {} & a_8 xy + a_9 x^2 + a_{10} x^2 y + a_{11} xy^2 + a_{12} x^2 y^2\\ & + \frac{y}{f}\left[a_{13}(x^2 - y^2) + a_{14} x^2 y^2 + a_{15}(x^4 - y^4)\right]\\ & + y\left[a_{16}(x^2 + y^2) + a_{17}(x^2 + y^2)^2 + a_{18}(x^2 + y^2)^3\right]\\ & + a_{20} + a_{21}\left(\frac{y}{f}\right)\end{aligned}\right\} \tag{8-10}$$

其中，$a_1 \sim a_{12}$ 这一组参数主要反映不可补偿的软片变形和非径向畸变。它们几乎是正交的，而且与 $a_{13} \sim a_{18}$ 也近乎正交。$a_{13} \sim a_{15}$ 表示压平板不平引起的附加参数，它并不严格取决于径距，而且还包含了不规则畸变的径向分量。至于压片板不平的非对称影响可用 $a_5 x^2 y$ 和 $a_{11} xy^2$ 两项的组合作用来补偿。$a_{16} \sim a_{18}$ 这三个参数表示对称的径向畸变和对称的径向压平误差的影响。系数 $a_{19} \sim a_{21}$ 相当于内方位元素误差，通常不用，只有当地形起伏很大

时才有必要列入。

在这组附加参数中a_1 ~ a_{12}之间存在着一些强相关，而且它们还与地面坐标未知数可能也强相关，所以必须通过统计检验和附加参数可靠性分析来合适地选取参数。

也可以从纯数学角度建立系统误差模型，此时不强调附加参数的物理含义，只关心它们对系统误差的有效补偿。此时可采用一般多项式，包含傅里叶系数的多项式或由球谐函数导出的多项式，但人们更喜欢采用正交多项式的附加参数，因为它能保证附加参数之间相关很小而利于解算。

最典型的正交多项式附加参数组是联邦德国Ebner教授提出的，含12个附加参数，其形式如图8-3-2和式（8-11）。

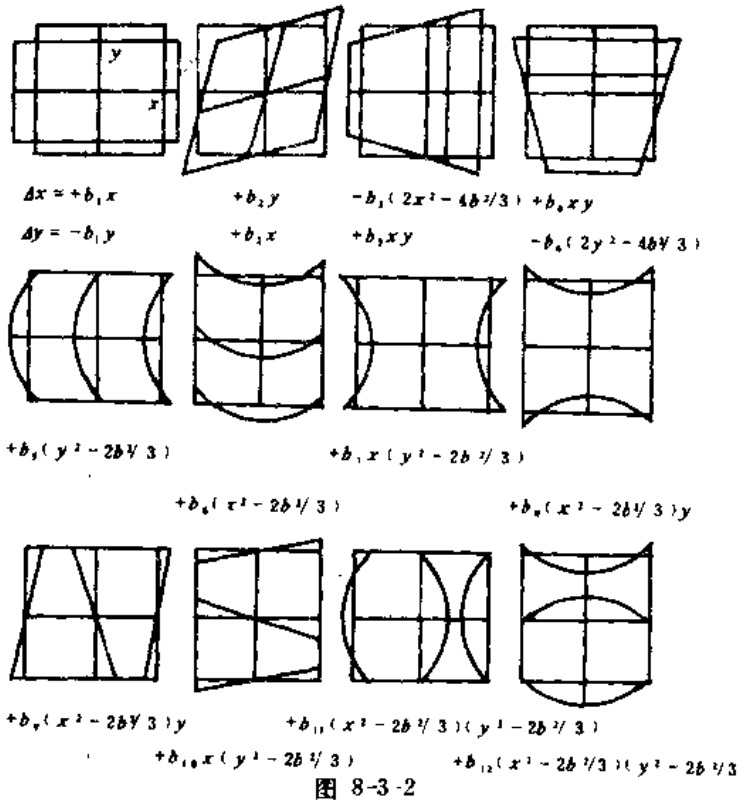


图 8-3-2

该误差模型是考虑到每片有九个标准配置点的情况，从图8-3-3出发，去掉与六个外方位元素相关的六个参数而得到的。

如果每片分布 5 × 5 个标准点，则还可得到包含44个附加参数的正交多项式，这主要用于高精度地籍加密中。

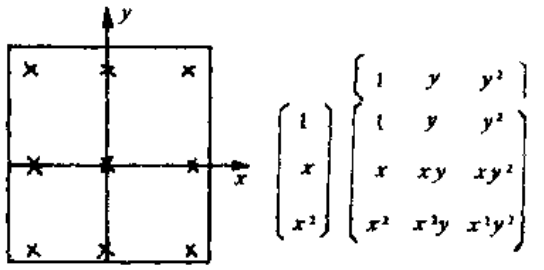


图 8-3-3

三、自检校平差的效果与信噪比

经过大量的研究试验，业已公认，自检校平差是补偿系统误差最有效的办法。但是，

实际试验研究结果表明，自检校平差的效果有很大的波动，很难判断哪一组附加参数最有效。

一般地分析，系统误差的补偿取决于多种因素，如：平差区域大小、重叠度大小、航摄方向、每片的像点数与像点的分布、平差的多余观测数、地面控制点分布及点数、区域内系统误差的变化情况、测区之地形起伏、附加参数的选择等。

深入地分析可知，自检校平差是从有噪声（偶然误差）的观测值中提取信号（系统误差）。因此自检校平差所能导致的精度改善根本上取决于观测值的信噪比。信噪比愈大，自检校平差的效果愈好。此时，由于偶然误差很小，系统误差能较好地被测定，改正了系统误差后必能使精度有明显的提高。反过来，当信噪比小时，系统误差将受到偶然误差严重的干扰。此时系统误差既难测准，而且改正后也不会引起精度有本质的改善。

更有甚者，如果在偶然误差大、系统误差小时，将附加参数处理成自由未知数，则很可能由于状态坏、噪音大而导致所谓的过度参数化，从而严重降低结果的精度。为此，需要对附加参数进行统计显著性检验、可靠性检验、相关性检验，以保证法方程有好的状态；或者通过附加参数带适当的权或岭估计等措施来改善方程组的病态问题。这里不作更深入的讨论，读者可参考李德仁著《误差处理和可靠性理论》一书。

四、对该方法的评价

自检校区域网平差是在解析摄影测量平差中补偿系统误差的最有效方法，其原理也可以用来处理大地测量、重力测量，卫星大地测量以及工程测量控制网中的系统误差。在许多国家中已作为正规方法用于高精度摄影测量加密中。在武汉测绘科技大学的WuCAPS联合平差软件包中也采用了自检校平差，在高精度地界点坐标测定中取得了成效。

根据研究，只要信噪比大于0.8，即系统误差与偶然误差相比不是太小，均可用带附加参数的自检校平差。对于一般加密可引入少量几个可测定的附加参数。对于在大型计算机上进行高精度加密时，可引入较多的附加参数。而且，可以将它们处理成带权观测值，或采用程序控制下的自动检验和选择附加参数的方法。

在自检校平差中顾及系统误差随机特性的问题也有人进行过研究。

§8.4 验后补偿法

这种方法是建立在分析平差后像点（或模型点）坐标观测值残差的基础上，现简介如下。

一、验后补偿法的基本步骤

下面以光束法区域网平差为例进行讨论。

（一）结点系统误差改正数的获得

光束法平差经过若干次迭代收敛后，逐片取出九个标准点上的像点坐标残差。一般均假定x，y坐标互不相关，则可将它们分别讨论。

首先将区域划分为一个或几个系统误差不变的区，将同一区所有像片叠合起来，则在九个标准位置附近得到一系列像点（图8-4-1）。

取这九个标准位置中心作为结点，由它周围一系列像点坐标残差可求出结点处的像片系统误差改正数。

Massond′ Autume系直接取以结点为中心的4cm×4cm子块内诸像点坐标残差之均值，反号后即作为该结点的系统误差改正数。其理由是偶然误差的均值应为零，所以均值的大小代表了该处系统误差的大小。

如果用航带法区域网加密，则必须先通过逐片后方交会求出像点坐标残差。

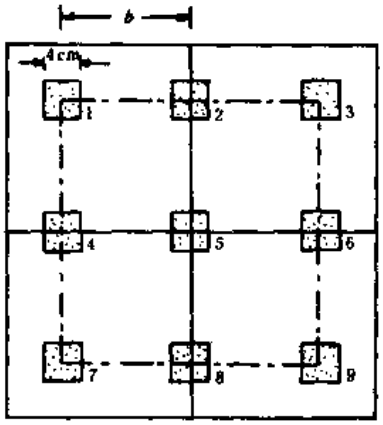


图 8-4-1

（二）像点加入系统误差改正（验后补偿值）并进行下次迭代平差

根据求出的结点处系统误差改正值，用各种二维内插方法求出各像点坐标的系统误差改正值。此时可以用自检校平差中的系统误差模型求解附加参数，然后逐点引入由于附加参数引起的改正数。也可以用二元二次多项式内插，或用二维三次样条插值法。

用改正后的像点坐标重新进行下一轮区域网平差。此时系数矩阵无需重算，只要重新计算常数项向量即可。求解后则又得到各点观测值坐标的改正数。用上述同样的方法进行下一次验后补偿。

（三）中止验后补偿过程的判据

采用下列检验值来判断是否仍然存在系统误差：

$$T=\frac{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{|A_i|\sqrt{n_i}}{RMSE}\right)}{K} \tag{8-12}$$

式中：K为子块数；

n_i为第 i 个子块中的像点数；

$|A_i|$为第 i 个子块残差均值的绝对值；

$RMSE$为残差的均方根差；

该检验值相当于K个 t 变量的平均值，当$T<1$时，可信$E(A_i)=0$，即已不存在明显的系统误差，于是验后补偿过程可中止。

二、对该方法的评价

验后补偿法具有下列优点：

（1）验后补偿法可以使精度有稳定的提高，不论提高幅度有大有小，它不会产生“过度参数化”所造成的精度恶化。

（2）这种方法不改变已有的程序系统，仅需要引入验后补偿的子程序。因此它便于加入到现有的程序中，而且对计算机速度、容量均无特殊要求。

平差程序中已采用多项式内插法进行验后补偿，并取得了成效。

这种方法的缺点是补偿效果不足。这是因为：

（1）像点坐标残差只是真误差向量的“可见”部分；

（2）由于在平差中没有处理系统误差，所以最小二乘法平差模型是有偏差的。

但是，这种方法可以与其它的补偿系统误差的方法联合使用，从而可获得更好的效果。

本章习题与思考题

1.像片坐标观测值中可能包含哪些类型的系统误差？为什么不可能用预改正方法完全消除之？

2.在解析空中三角测量中有哪些补偿像片系统误差的方法？

3.何谓试验场检校法？简述其原理、步骤和应用可能性。

4.何谓自检校光束法平差？列出仅考虑像片仿射变形时的自检校光束法平差的误差方程式。

5.绘图叙述镶边带状结构矩阵的循环分块法及其特点。

6.何谓验后补偿法？简述其原理、步骤和应用可能性。

7.试比较三种补偿系统误差方法的优缺点。

第九章　摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差

§9.1　概　述

一、什么叫做联合平差

用摄影测量方法加密点的坐标时，总需要某些非摄影测量信息。为了进行摄影测量网在空间的定位、至少需要七个独立的大地测量观测值或条件方程来解决空间网的平移、旋转与缩放。通常的摄影测量平差总是利用若干地面控制点将摄影测量坐标变换到规定的大地坐标系中去。有些程序中还可将大地测量坐标处理成带权观测值。但是，人们不认为这种处理方法是联合平差。

所谓的摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差，指的是在摄影测量平差中使用了更一般的原始的非摄影测量观测值或条件。

在联合平差中可供利用的非摄影测量信息分以下几类：

——物方空间的大地测量观测值。如物方坐标或坐标差，水平距离、空间距离或距离差，方位角、天顶距和水平角，以及天文经纬度或重力测量观测值。点在某个局部坐标系中的坐标也可以用于联合平差，此时要通过引入若干自由参数将局部坐标系在总体坐标系中进行定位。这些自由参数将与其它平差未知数一起求解。

——像片外方位元素观测值或条件。如高差仪记录、断面记录仪记录，地平摄影仪、陀螺仪、GPS全球定位系统和INS惯性导航系统提供的摄站坐标、坐标差或像片姿态角元素。这些参数可以在航空摄影时获得。对于地面摄影测量则有单固定摄站上的对中和方位条件，立体摄影机条件，及两个摄站间测出的坐标差或距离等。

——像片内方位元素观测值，即由摄影机检定求得的具有一定精度的主距值和像主点坐标。

——一组摄影测量点应满足的条件。如湖面上点应具有相同的高程，以及位于一条直线，一个平面、某种规则几何形状表面的点，应当满足相应的几何条件。

二、联合平差的发展过程

在空中三角测量中利用辅助数据由来已久。早在五、六十年代就提出在航测中利用测微高差仪，断面记录仪和雷达航测系统。当时是把这些辅助数据直接作为已知值使用，借以控制航带像片连续衔接时误差的传播。但是，由于这些辅助数据本身的误差不容忽略，且各种辅助数据之间又存在矛盾，在当时计算工具不先进的情况下，难以用严格方法来处理这些矛盾，所以其应用在那时是很有限的。

随着电子计算机和解析空中三角测量的发展，人们可以将各种非摄影测量观测值表示

为未知参数的函数，并顾及其包含的系统误差特性、列出误差方程式参与整体平差、因此，在70年代之后，这种联合平差就开始出现了。

美国的布朗博士在60年代开始研究联合平差问题。最早的联合平差系统是独立模型法区域网平差程序PAT—M43（1972年）。它对测微高差仪和断面测高仪数据列出严格的误差方程式，还引入湖面点等高的条件参与平差。该方法在加拿大应用获得了成功。类似功能的程序还有加拿大的SPACE—M独立模型法平差程序（1977）。

摄影测量像片数据和地面测量观测值的联合平差于1972年在美国的SAPGO程序中首先实现，它可利用距离、角度和方位角等大地测量观测值参加摄影测量平差。

时至今日，已有许多较成熟的联合平差程序并有相应的试验成果。利用导航数据的空中三角测量区域网平差已由斯图加特大学等单位进行了成功的试验。Anderson研究的摄影测量与多普勒数据的联合平差，是将所测定的多普勒站点的坐标及其全部协方差矩阵引入到摄影测量区域网平差中。直接利用大地测量观测值代替控制点坐标的联合平差，在近景摄影测量中用得比一般航空摄影测量多。这一方面是因为近景摄影测量中往往只可能或只需要相对控制，另一方面由于在近景摄影测量中采用联合平差较为方便，它不像航空摄影测量平差有那么多的未知数。这类联合平差程序有汉诺威大学的BINGO程序、MOR程序、加拿大的GEBAT程序、瑞典斯德哥尔摩大学的GENTRI程序等。

如何在卫星空中三角测量中利用卫星的轨道条件，这个问题早已提出。1960年美国的布朗最先对卫星摄影测量中如何应用轨道条件从理论上进行了阐述。1968年，他又提出了建立月球控制网的理论方案。后由美国DBA公司编制了带轨道条件的解析空中三角测量航带/区域网平差程序LOSA/LOBAT，并对月球轨道飞行器的图像进行了处理。之后，为了满足阿波罗图像的需要，该公司于1971年完成了带轨道条件的联合平差程序系统PLODS。利用该程序，美国国防制图局与单位协作，经过五年的努力于1977年用阿波罗15～17的观测数据完成了建立月球控制网的任务。此外，前苏联在1981年也编制了顾及人造地球卫星运动规律的一整套航带解析空中三角测量程序，并进行了试验生产。

目前，由于GPS全球定位系统和INS惯性导航系统的应用，使联合平差出现了前所未有的美好前景。GPS系统不仅可用来测定野外控制点坐标，而且用差分法动态定位方法可测定摄站坐标x_s、y_s、z_s，达到分米级或厘米级精度，用于空中三角测量可大量节省地面控制点。而惯性导航数据组合GPS数据，可同时测定像片角元素，从而有可能利用外方位元素直接测图，而免去空中三角测量。

因此，学习和了解联合平差是十分有价值的。目前，武汉测绘科技大学已于1989年研制了WuCAPS联合平差软件系统，可在VAX机和PC386机上运行。

§9.2 联合平差中各类观测值误差方程式的建立

差不多在所有的联合平差程序中都采用未知数的间接观测平差方法，即建立起各类观测值的误差方程式。对于自由网平差，必要时亦可建立未知数之间的条件方程式。

作为联合平差中的摄影测量观测值，最好按光束法的共线方程建立误差方程式。各类

非摄影测量观测值的建立，其原则是在一个统一的三维笛卡尔坐标系中找出观测值与求解未知数之间的关系。

作为光束法平差基础的共线方程式，其线性化的误差方程式为：

$$V = At + BX - l\ ,\ P_\phi \tag{9-1}$$

式中 t和X分别代表像片定向未知数和坐标未知数向量；

A和B为其相应的系数矩阵；

l和P_ϕ为像片坐标观测值向量及其权矩阵。

任何增加的非摄影测量观测值都可以按相应条件方程写出其误差方程式并与式（9-1）一起进行联合平差。下面列出的是常见的各类非摄影测量观测值的误差方程式。

一、物方空间的大地测量观测值

（一）物方坐标和坐标差

它具有极简单的误差方程式形式

$$V_r = B_r X - l_r\ ,\ P_r \tag{9-2}$$

式中，l_r为物方坐标或坐标差观测值，其权阵为P_r；B_r为相应系数矩阵，其各元素值取± 1或0。

（二）水平距离和空间距离

设观测了物点i和j的水平距离S_{ij}。两点的近似坐标为X_i^0、Y_i^0和X_j^0、Y_j^0，由此求得的水平距离为S_{ij}^0。于是该水平距离观测值的误差方程式为：

$$v_{s_{ij}} = -c_{ij}\Delta X_i + c_{ij}\Delta X_j - d_{ij}\Delta Y_i + d_{ij}\Delta Y_j - (S_{ij} - S_{ij}^0) \tag{9-3}$$

式中

$$\begin{cases} c_{ij} = \dfrac{X_j^0 - X_i^0}{S_{ij}^0} \\ d_{ij} = \dfrac{Y_j^0 - Y_i^0}{S_{ij}^0} \end{cases}$$

对于物点i和j之间的空间距离S_{ij}，相应的误差方程式为

$$\begin{aligned} v_{s_{ij}} = &-c_{ij}\Delta X_i + c_{ij}\Delta X_j - d_{ij}\Delta Y_i + d_{ij}\Delta Y_j - e_{ij}\Delta Z_i + e_{ij}\Delta Z_j \\ &-(S_{ij} - S_{ij}^0) \end{aligned} \tag{9-4}$$

式中

$$\begin{cases} c_{ij} = \dfrac{X_j^0 - X_i^0}{S_{ij}^0} \\ d_{ij} = \dfrac{Y_j^0 - Y_i^0}{S_{ij}^0} \\ e_{ij} = \dfrac{Z_j^0 - Z_i^0}{S_{ij}^0} \end{cases}$$

用矩阵形式表示物点间距离的误差方程式为

$$V_s = B_s X - l_s,\ P_s \tag{9-5}$$

（三）方位角、水平角和天顶距

对于点p_i到点p_j相对于零方向的一个水平方向观测值y_{ij}，有下列线性化的误差方程

式：

$$v_{ij} = -\Delta\omega_i - a_{ij}\Delta X_i + a_{ij}\Delta X_j - b_{ij}\Delta Y_i + b_{ij}\Delta Y_j + (\varphi_{ij}^0 - \omega_i^0 - y_{ij}) \tag{9-6}$$

其中：

$$\varphi_{ij}^0 = \operatorname{arctg}\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0};$$

$$S_{ij}^0 = \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2};$$

$$a_{ij} = -\frac{\sin\varphi_{ij}^0}{S_{ij}^0};$$

$$b_{ij} = \frac{\cos\varphi_{ij}^0}{S_{ij}^0};$$

ω_i^0为P_i点上方向观测值的定向未知数的初始值；

X_i^0、Y_i^0、X_j^0和Y_j^0为两点的近似坐标。

对于方位角观测值，(9-6) 式中的定向未知数Δw_i项应去掉，常数项中w_i^0亦为零。

在点 i 处由点 j 和 k 所夹的水平角观测值θ，其误差方程式可由 (9-6)式导出（见图9-2-1）。

$$v_Q = a_{ik}\Delta X_k + b_{ik}\Delta Y_k - a_{ij}\Delta X_j - b_{ij}\Delta Y_j - (a_{ik} - a_{ij})\Delta X_i - (b_{ik} - b_{ij})\Delta Y_i - (\theta - \theta^\circ) \tag{9-7}$$

式中 $a_{ij}, b_{ij}, a_{ik}, b_{ik}$含义同前。

$$\theta^\circ = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y_k^0 - Y_i^0}{X_k^0 - X_i^0}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0}\right)$$

对于在点 i 处由两点 j 和 k 间所夹的角度θ，根据余弦定律可列出下式

$$L_{jk}^2 - L_{ik}^2 - L_{ij}^2 + 2L_{ik}L_{ij}\cos\theta = 0 \tag{9-8}$$

其中

$$L_{ij}^2 = (X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2$$

$$L_{ik}^2 = (X_i - X_k)^2 + (Y_i - Y_k)^2 + (Z_i - Z_k)^2$$

$$L_{jk}^2 = (X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2 + (Z_j - Z_k)^2$$

对（9-8）式线性化可获得其误差方程式。

对于天顶距观测值Z_{ik}，在列其条件方程式时应顾及地球曲率和大气折光系数，得到（图9-2-2）：

$$Z_{ik} = \operatorname{arctg}\left(\frac{S_{ik}}{Z_k - Z_i}\right) + \frac{S_{ik}}{2R}(1 + k)\rho \tag{9-9}$$

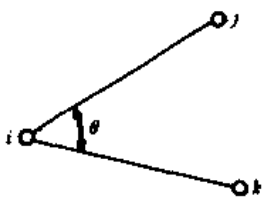


图 9-2-1

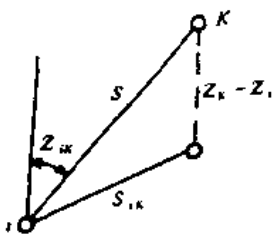


图 9-2-2

其中：k为折光系数；

R为地球曲率半径；

S_{ik}为水平距离，S为空间距离。

当S_{ik}不作为变量时，有下列天顶距观测值的误差方程式：

$$v_{Z_{ik}}=\frac{S_{ik}}{2R}\cdot\rho\Delta k+(\sin^2 Z_{ik}\rho/S_{ik})(\Delta Z_i-\Delta Z_k)-(Z_{ik}-Z_{ik}^0) \tag{9-10}$$

式中：Δk为折光系数初始值的改正数；

Z_{ik}^0是用初始值代入（9-9）式求出。

当S_{ik}不作为常量，即考虑到天顶距亦作为X、Y坐标的函数时，则有下列误差方程式：

$$\begin{aligned}v_{Z_{ik}}=&\frac{S_{ik}}{2R}\cdot\rho\Delta k+a\Delta X_k+b\Delta Y_k+c\Delta Z_k-a\Delta X_i-b\Delta Y_i\\&-c\Delta Z_i-(Z_{ik}-Z_{ik}^0)\end{aligned} \tag{9-10a}$$

式中：

$$a=\frac{(X_k-X_i)(Z_k-Z_i)}{S_{ik}\cdot S^2}\cdot\rho$$

$$b=\frac{(Y_k-Y_i)(Z_k-Z_i)}{S_{ik}\cdot S^2}\cdot\rho$$

$$c=-\frac{S_{ik}}{S^2}\cdot\rho$$

$$S_{ik}^2=(X_k-X_i)^2+(Y_k-Y_i)^2$$

$$S^2=S_{ik}^2+(Z_k-Z_i)^2$$

（四）天文经纬度和重力观测值

对于这些观测值，要根据其所在的坐标系与摄影测量平差所定义的切面直角坐标系之间的旋转矩阵来导出其线性化误差方程式，此处不作详细的讨论，读者可阅读有关文摘。

（五）局部坐标系中的坐标

根据空间坐标系中的坐标旋转变换公式有：

$$\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\end{bmatrix}=\lambda\cdot R\phi\omega\kappa\begin{bmatrix}X-X_0\\ Y-Y_0\\ Z-Z_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{X_0}\\ \overline{Y_0}\\ \overline{Z_0}\end{bmatrix},\quad \overline{P} \tag{9-11}$$

式中：$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$为点在局部坐标系中的坐标；

X，Y，Z为点在总体坐标系中的坐标；

X_0，Y_0，Z_0为坐标系XYZ系统的重心坐标；

$\overline{X_0}\,\overline{Y_0}\,\overline{Z_0}$为坐标系$XYZ$到$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$间变换的坐标平移量，$\lambda$为比例尺缩放因子；

R为旋转矩阵，由角元素ϕ、ω、κ求得。

将（9-11）式线性化，便得到类似独立模型法平差的误差方程式。

当平差区域较大或平差精度要求较高时，为了正确地列出大地测量观测值在摄影测量平差坐标系（局部切面直角坐标系）中的误差方程式，应当考虑利用地心坐标系进行严格变换后的相应公式。详见§9.3。

二、像片外方位元素观测值或条件

（一）高差仪、断面测高仪和导航系统求得的摄站坐标

这些在航摄时所获得的关于摄站位置的辅助数据，在参加平差时应顾及其自身的系统误差，其误差方程式分别为：

$$Z_i^{stat} + v_j^{stat} + (a_0 + a_1 X_j) = Z_j^{PC},\ P^{stat} \tag{9-12}$$

$$Z_i^{APR} + v_i^{APR} + (b_0 + b_1 X_i) = Z_i^{PC},\ P^{APR} \tag{9-13}$$

$$\left.\begin{aligned} X_j^{Nav} + v_{xj} + (a_0 + a_1 X_j + \cdots) &= X_j^{PC} \\ Y_j^{Nav} + v_{yi} + (b_0 + b_1 X_j + \cdots) &= Y_j^{PC} \end{aligned}\right\} \tag{9-14}$$

以上各式中的附加的自由未知参数$a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots$用来改正所得辅助数据的系统误差。上角中$stat$表示高差仪，$APR$表示断面测高仪，而$Nav$表示导航数据，此外$PC$表示投影中心。如果要加入非线性未知参数时，应考虑平差几何条件是否保证其可测定性。

（二）地平摄影仪或陀螺仪测定的像片倾角

在飞行摄影时带有地平摄影设备或陀螺仪记录时，可以直接测定像片倾斜角φ^k, ω^k，在联合平差中它们具有极简单的误差方程式：

$$\left.\begin{aligned} (\varphi^k + v^k) + \varphi_0 &= \varphi \quad P_\varphi^k \\ (\omega^k + v^k) + \omega_0 &= \omega \quad P_\varphi^k \end{aligned}\right\} \tag{9-15}$$

式中：φ_0, ω_0为待定常数；φ, ω为像片倾角未知数；P_φ^k和P_τ^k为量测值的权.

（三）两个摄站之间的坐标差或距离

其误差方程式与物方空间坐标差或距离有同样的误差方程式，但所涉及的未知数是摄站坐标未知数，故有下列一般形式的误差方程式：

$$V_{PC} = A_{PC}t - I_{PC},\ P_{PC} \tag{9-16}$$

（四）一个摄站点与一个物点的距离

用D_{ij}代表一个摄站点i和一个物点j间的距离，则其误差方程式仿（9-4）可获得，并有下列矩阵形式的误差方程式：

$$V_D = A_D t + B_D X - I_D,\ P_D \tag{9-17}$$

（五）单摄影站上的对中和方位条件

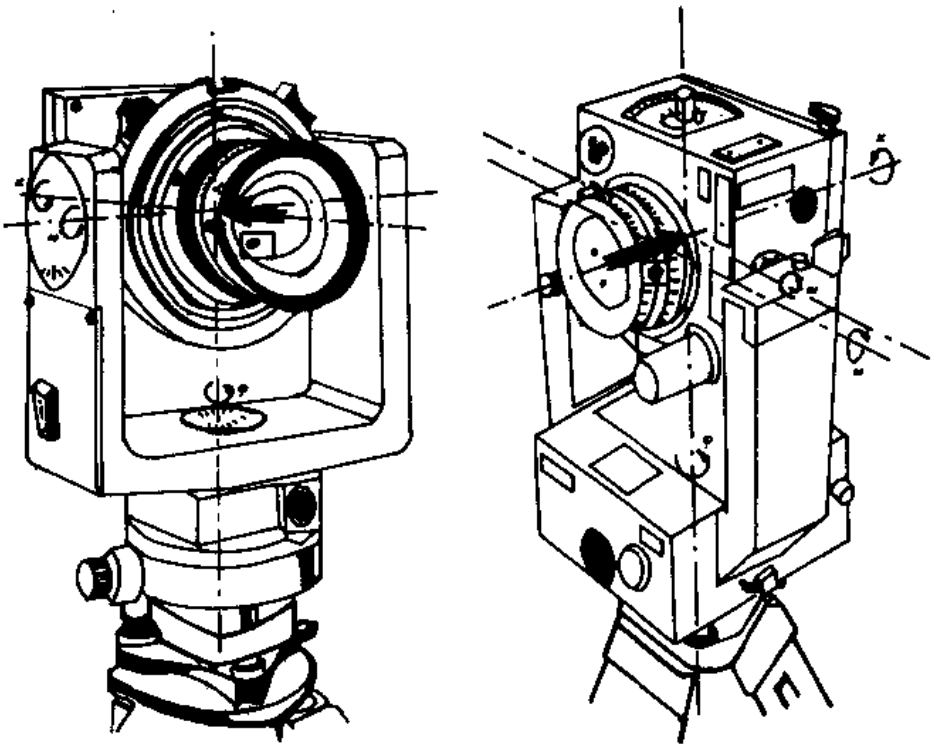
一架地面摄影机的旋转轴和摄影中心之间的机械结合总是使两者之间存在偏心值。因此，在构建数学模型时应当考虑到这种偏心。而且这种偏心又与具体的仪器结构有关。原则上可以区分以下两种情况：

——摄影机的机械旋转轴总是相交于一固定点上；

——摄影机的机械旋转轴不完全交于一固定点。

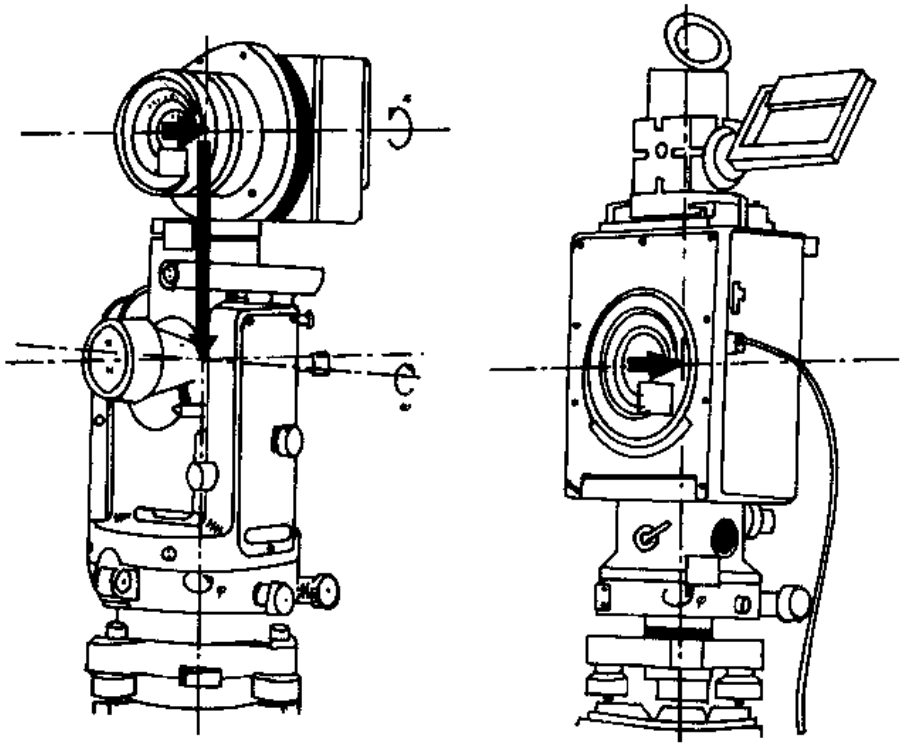
第一种类型仪器如威特厂P31（图9-2-3a），其摄影机的轴系相当于经纬仪的轴系。前民主德国蔡司厂的UMK10/1318（图9-2-3b），当使用硬片时，三轴亦交于一固定点，但当使用软片匣时，ω角的转轴不再通过竖轴。

第二种类型仪器如威特P32，由于摄影机是装在经纬仪的上方，其φ和ω的转轴交于一固定点，而κ旋转轴在其上方通过〔图9-2-4(a)〕。



(*a*)威特厂的P31　　(*b*)前民主德国蔡司厂的UMK13/18

图 9-2-3



(*a*)威特厂P32 (*b*)联邦德国欧波同厂的TMK6

图 9-2-4

而在象摄影经纬仪一类仪器上情况则完全是另一回事。在这类仪器上，没有 ω 和 κ 的旋转，仪器是专为水平摄影方向而设计的（如前民主德国蔡司厂摄影经纬仪19/1318，联邦德国欧波同厂的TMK6或TMK12）。图9-2-4(b)为TMK6的结构图。这一类仪器上实际只有一个 φ 角的旋转轴。

为了能简便地建立摄影中心和仪器站点坐标间的关系，其前提是必须保证角旋转的独立性，即三轴的正交性。在此前提下，对于不相交于一个固定点的转轴系统，若其转角顺序为 φ、ω、κ，则可得到摄影中心坐标和站点坐标间的一般关系式：

$$\boldsymbol{X}_{sr} = \boldsymbol{X}_0 + R_\varphi \cdot R_\omega \cdot R_\kappa \cdot e_1 + R_\varphi \cdot R_\omega \cdot e'_2 + R_\varphi \cdot e'_1 \tag{9-18}$$

式中 $\boldsymbol{X}_{sr}$ 为站点的位置向量；

$\boldsymbol{X}_0$ 为摄影中心的位置向量；

e'_1, e'_2, e'_3 为摄影中心到站点（旋转中心）的三个偏心向量值在像方坐标系中被定义。它们既可作为改正项，亦可作为未知数参加平差。由于偏心值总是很小，所以当 φ、ω、κ 角相差不悬殊时，往往不可能将它们精确求出。

若三轴交于一固定点时，则简化成下列关系式：

$$\boldsymbol{X}_{ST} = \boldsymbol{X}_O + R_\varphi \cdot R_\omega \cdot R_\kappa \cdot e' \tag{9-18a}$$

该式可用于P31、使用平板的UMK，摄影经纬仪及其它各种无ω、κ转角的摄影机。

（六）立体摄影机条件

对于三轴交于一固定点的仪器，可由（9-18a）得到下列关系

$$\boldsymbol{X}_{ST} = \boldsymbol{X}_{O,A} + R_A \cdot e'_A = \boldsymbol{X}_{O\ B} + R_B \cdot e'_B \tag{9-19}$$

式中的脚注 A 表示左片、脚注 B 表示右片，由（9-19）式立得立体摄影机条件：

$$\boldsymbol{X}_{O,A} - \boldsymbol{X}_{O,B} + R_A \cdot e'_A - R_B \cdot e'_B = 0 \tag{9-19a}$$

但要注意，当 e'_A 和 e'_B 作为未知数时，两者是不可区分的，最好由实验室测出后作为带权观测值。

三、像片内方位元素测定值

当所摄目标有起伏（或远近）时，或进行交向摄影时，像片内方位元素可列为未知数，可将摄影机检定时测得的像片内方位元素作为带权观测值参加整体平差，其误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} v_f + f_0 &= f_0, P_{f_0} \\ v_{x_0} + \hat{x}_0 &= x_0, P_{x_0} \\ v_{y_0} + \hat{y}_0 &= y_0, P_{y_0} \end{aligned}\right\} \tag{9-20}$$

四、一组摄影测量点应满足的条件

（一）平面

1. 已知的竖直平面

一个竖直平面由不在一根铅垂线上的两个点唯一决定。因此，若给出位在一个竖直平面内的 n 个点时，则应有 $n-2$ 个条件。

通过 1、2 和 i 三个点所确定的一个竖直平面的一般方程式为

$$(Y_i - Y_1)(X_i - X_2) - (X_i - X_1)(Y_i - Y_2) = 0 \tag{9-21}$$

其线性化形式为

$$C_{vp}X = G_{vp} \tag{9-22}$$

向量X中包含n个点的坐标改正数ΔX，ΔY，若式（9-22）直接参加平差，则构成带条件的未知数间接观测平差。

2. 已知的水平平面

位于水平平面上的物点，其高程是相等的，例如湖面点高程或海岸线点的高程。所以如果有这样的点子n个，则可列出$n-1$个条件。

对于位于同一水平面上的点1和i，其一般条件式为

$$Z_i - Z_1 = 0 \tag{9-23}$$

将所有$n-1$个条件写成矩阵形式为：

$$C_{hp}X = G_{hp} \tag{9-24}$$

式中：X向量包含n个点的高程改正数ΔZ。

3. 已知的任意平面

因为一个平面由不在一直线上的三个点唯一决定，所以若再增加一个点子就要再产生一个条件。设点1、2、3为这初始三个点，则对该平面内任一点i有下列条件方程式：

$$\begin{vmatrix} (X_i - X_1)(Y_i - Y_1)(Z_i - Z_1) \\ (X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(Z_2 - Z_1) \\ (X_3 - X_1)(Y_3 - Y_1)(Z_3 - Z_1) \end{vmatrix} = 0 \tag{9-25}$$

对于位于该平面上的n点，可列出$n-3$个条件方程式，其矩阵形式为：

$$C_pX = G_p \tag{9-26}$$

式中，C_p和G_p由条件式（9-25）线性化求得，X向量中则包含n个的坐标改正数ΔX，ΔY，ΔZ。

（二）直线

1. 已知的铅垂线

假设已知铅垂线上一个点为点1，则任意另一个点i的条件方程式为：

$$\left.\begin{aligned} X_i - X_1 &= 0 \\ Y_i - Y_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9-27}$$

相应的矩阵形式为

$$C_{vl}X = G_{vl} \tag{9-28}$$

2. 已知的水平线

设有位于一个水平线上的起始两点1和2，则对该水平线上另一点i所列的条件有两个：

首先是等高条件，有$n-1$个：

$$Z_i - Z_1 = 0 \qquad i = 2, 3, \cdots n \tag{9-29}$$

其次是共线条件，有$n-2$个：

$$(Y_i - Y_1)(X_2 - X_1) - (Y_2 - Y_1)(X_i - X_1) = 0 \tag{9-30}$$

3. 已知的空间任意直线

由于每两个点（如点1和点2）可以确定一条直线，因此每增加一个点 i，则必须满足下列条件：

$$\frac{X_i - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y_i - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{Z_i - Z_1}{Z_2 - Z_1} \tag{9-31}$$

该条件代表了下列两个方程式：

$$\left.\begin{aligned}(X_i - X_1)(Y_2 - Y_1) - (X_2 - X_1)(Y_i - Y_1) = 0\\(X_i - X_1)(Z_2 - Z_1) - (X_2 - X_1)(Z_i - Z_1) = 0\end{aligned}\right\} \tag{9-32}$$

（三）几何图形

有规则的几何图形，可以用一系列已知的长度、直线、角度和平面条件来描述，长度和角度可以列出与上述物方空间大地测量观测值相同的误差方程式，直线和平面条件在上面也已介绍过。

另一种几何图形是不包含有任何明确的特征点，而是整体有一个确定的形状，如圆形或球形等等。其处理方法依其所用的解析方程不同而异。例如对于位在一个圆球形表面上的诸点，其一般方程式为：

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aX - 2bY - 2cZ - d = 0 \tag{9-33}$$

当给出不在一个平面上的四个点时，就可以唯一地确定出这个圆球。用1、2、3、4表示这四个起始点子，则每加入一个点 i，就可列出条件式为：

$$(X_i \ Y_i \ Z_i)\begin{bmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1 & 1\\X_2 & Y_2 & Z_2 & 1\\X_3 & Y_3 & Z_3 & 1\\X_4 & Y_4 & Z_4 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2\\X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2\\X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2\\X_4^2 + Y_4^2 + Z_4^2\end{bmatrix} = (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) \tag{9-34}$$

原则上（9-34）式可线性化为 $CX = G$ 的形式，但是，为了方便解算，可直接对 n 个位于同一球面上的点子写出 n 个（9-33）式，此时仅增加了四个待定参数 a，b，c，和 d，用向量 Δ 表示。于是，其线性化形式为

$$C_1 X + C_2 \Delta = G \tag{9-35}$$

其中：X 向量代表有关点的坐标未知数；Δ 为新增的球面参数向量。

圆形是圆球的一个特例，此时可引用一般方程式

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 - R^2 = 0 \tag{9-36}$$

其中：X_0, Y_0, Z_0 为圆心的坐标，它们与半径 R 为四个待定参数。

若已知位于圆周上任意三点1，2，3，则可列出三个式（9-36），同时还存在下列条件：

$$\begin{vmatrix}(X_1 - X_0)(Y_1 - Y_0)(Z_1 - Z_0)\\(X_2 - X_0)(Y_2 - Y_0)(Z_2 - Z_0)\\(X_3 - X_0)(Y_3 - Y_0)(Z_3 - Z_0)\end{vmatrix} = 0 \tag{9-37}$$

对于另外一个点，可增加式（9-36）一个，和相应的位在同一平面上的条件。

*§ 9.3 联合平差中大地测量观测值的严格数学模型

在上一节中列出的大地测量观测值是相对于测站坐标系，而摄影测量平差则是在局部切面直角坐标系中进行的，这两个坐标系是不同的，它受地球曲率，大地水准面与椭球面偏差以及垂线偏差的影响。因此，对于高精度点位测定的联合平差问题，应当重视这种坐标系的差别，使用一种既精确而又实用的数学模型。

一、大地测量观测值的严密模型

如图9-3-1所示，当在测站i对j点进行观测时，得到天文方位角α、垂直角V和空间距离s，其中测站直角坐标系i——uvw的w轴为测站点之垂线，v轴在测量天文子午面内，显然

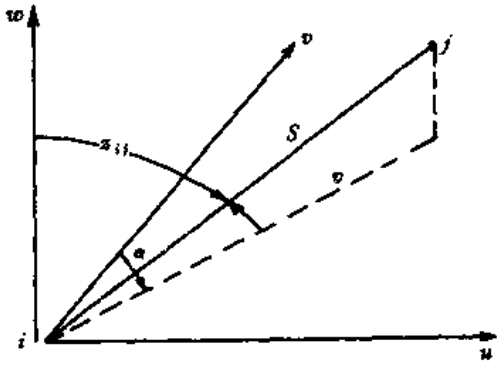


图 9-3-1

$$a = \mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{v}$$

$$V = \mathrm{tg}^{-1}\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}} = \sin^{-1}\frac{w}{s} \tag{9-38}$$

$$s = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

据测站直角坐标系i——uvw与地心直角坐标系$\overline{o}$——$\overline{xyz}$的转换关系有

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda_i & \cos\lambda_i & Q \\ -\cos\lambda_i\cdot\sin\phi_i & -\sin\lambda_i\cdot\sin\phi_i & \cos\phi_i \\ \cos\lambda_i\cdot\cos\phi_i & \sin\lambda_i\cdot\cos\phi_i & \sin\phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\overline{x_{ij}} \\ \Delta\overline{y_{ij}} \\ \Delta\overline{z_{ij}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^r(i) \begin{bmatrix} \Delta\overline{x_{ij}} \\ \Delta\overline{y_{ij}} \\ \Delta\overline{z_{ij}} \end{bmatrix} \tag{9-39}$$

其中：

$$(\Delta\overline{x_{ij}}\ \ \Delta\overline{y_{ij}}\ \ \Delta\overline{z_{ij}}) = (\overline{x_j}-\overline{x_i}\ \ \overline{y_j}-\overline{y_i}\ \ \overline{z_j}-\overline{z_i}),$$

λ_i、ϕ_i为测站i的天文经纬度；

$\boldsymbol{R}^r(i)$为直角坐标系到地心直角坐标系的旋转矩阵。

将(9-39)式代入(9-38)式，可得到用地心直角坐标表示的大地测量观测值的观测方程。

然而，摄影测量观测值的平差计算通常是在局部切平面直角坐标系中进行的。若用$\boldsymbol{R}(0)$表示地心直角坐标系至切平面直角坐标系o——xyz的旋转矩阵，则可得到：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^r(i)\cdot\boldsymbol{R}(o) \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} \end{bmatrix} \tag{9-40}$$

若将（9-40）式代入（9-38）式，便可得到局部切平面坐标系中大地测量观测值的严密模型，将其线性化后便可得相应的误差方程（当然，大气折光及其它系统误差的影响应予先改正或在平差计算中用自检校进行改正）。但是，按这种严密模型计算误差方程式的

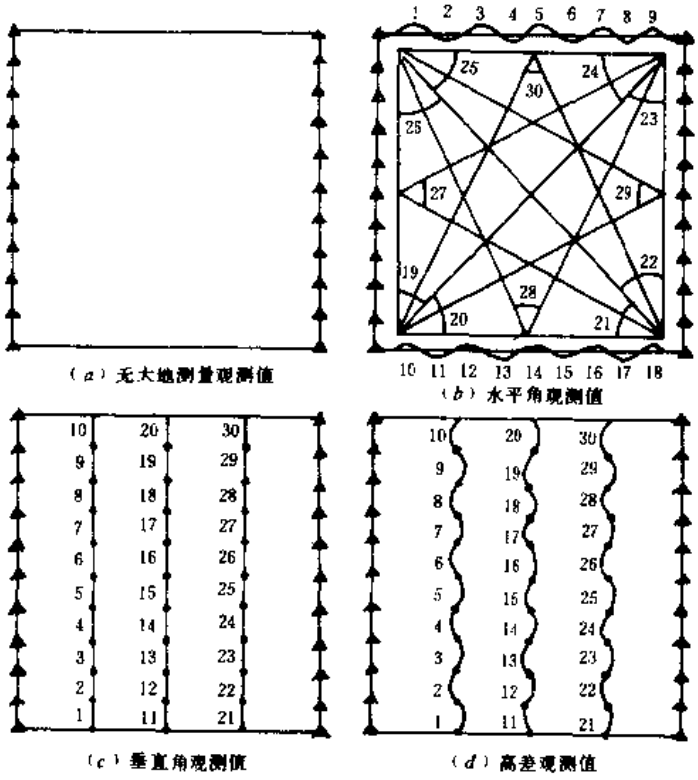
系数和常数项时，其过程十分复杂并且需要迭代计算，因此不便于在联合平差中实际使用。

二、大地测量观测值近似模型的近似性

严密模型不便于在联合平差中实际使用，那么是否就利用大地测量观测值的近似模型呢？例如，对于方位角、垂直角和高差观测值，采用以下的近似模型：

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\Delta x_{ij}}{\Delta y_{ij}}\right) \\ V &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\Delta z_{ij}}{\sqrt{\Delta x_{ij}^2+\Delta y_{ij}^2}}\right) \\ \Delta h_{ij} &= z_j - z_i \end{aligned} \tag{9-41}$$

显然，这些近似模型使用方便，但它们能否满足联合平差精密点位测定的精度要求呢？为此，可设计一个无任何误差的模拟数据来考察近似模型的误差及其对联合平差的影响。该试验区域为$7.4\times7.4\,\mathrm{km}^2$，摄影比例尺1∶4000，共有10×21张像片，每片25个像点，旁向重叠度20%，航向重叠度60%。其设计了四种地面控制和大地测量观测值布设方案（见图9-3-2），其中，（a）无大地测量观测值；（b）～（d）分别附加30个水平角、垂直角和高差观测值。试验中，各类观测值均无偶然误差，以便专门考察模型误差及其影响。



（a）无大地测量观测值　（b）水平角观测值

（c）垂直角观测值　（d）高差观测值

图 9-3-2

▲已知平高控制点

大地测量观测值近似模型的误差及其对联合平差的影响（$\frac{\text{实地mm}}{\text{像片}\mu\text{m}}$）　表 9-3-1

大地测量观测值	方案	模型中误差	模型误差对联合平差的影响		
			μ_x	μ_y	μ_z
/	a	0	$\frac{0.1\times10^{-6}}{2.5\times10^{-8}}$	$\frac{0.2\times10^{-6}}{5.0\times10^{-8}}$	$\frac{0.3\times10^{-6}}{7.5\times10^{-8}}$
水平角	b	4.0″	$\frac{3.3}{0.8}$	$\frac{3.8}{1.0}$	$\frac{42.0}{10.5}$
垂直角	c	74.1″	$\frac{44.8}{11.2}$	$\frac{42.7}{10.7}$	$\frac{346.0}{86.5}$
水准高差	d	276.9μm	$\frac{44.6}{11.2}$	$\frac{39.4}{9.9}$	$\frac{322.8}{80.7}$

从表（9-3-1）可见，对于水平角观测值，近似模型的误差已超出三、四等三角测量的测角中误差（±1.3″和2.5″）。对于垂直角和水准高差观测值，近似模型的误差及其对平差结果的影响均很大，即使采用了顾及地球曲率公式（9-9），由于公式的不严密性（见下文），其误差仍不能限制在允许的范围内，因此，在高精度的联合平差中，大地测量观测值的近似模型是不宜采用的。

三、一种大地测量观测值的实用模型

为了克服上述二类模型的局限性，以下介绍一种既能满足精度要求，又便于联合平差实际计算的大地测量观测值的实用模型。

建立实用模型的基本思想是：由于$\lambda_1-\lambda_0$、$\phi_1-\phi_0$为小角度（一般小于5′～10′），所以可以将（9-40）式中的旋转矩阵元素进行化简，然后用泰勒级数展开并取至一次项，从而可以直接得到切平面直角坐标系中，各大地测量观测值的观测方程。

按上述思想对（9-40）式化简得到

$$\left.\begin{aligned} u &\approx \Delta x_{ij} - \operatorname{tg}\phi \cdot \frac{x_i}{N_0}\Delta y_{ij} - \frac{x_i}{N_0}\Delta z_{ij} \\ V &\approx -\operatorname{tg}\phi \cdot \frac{x_i}{N_0}\Delta x_{ij} + \Delta y_{ij} - \frac{y_i}{M_0}\Delta z_{ij} \\ w &\approx \frac{x_i}{N_0}\Delta x_{ij} + \frac{y_i}{M_0}\Delta y_{ij} + \Delta z_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}42)$$

其中，N_0、M_0分别为区域中央切平面直角坐标系原点的卯酉圈和子午圈曲率半径，且

$$\operatorname{tg}\phi_0 \approx \frac{\overline{z_0}}{\sqrt{\overline{x_0}^2+\overline{y_0}^2}}/(1-e^2) \qquad (9\text{-}43)$$

这里$\overline{x_0}$、$\overline{y_0}$、$\overline{z_0}$为切平面直角坐标系原点的地心直角坐标。

作为（9-42）式的特例，可以直接给出将地球视为圆球时的公式。此时，$N_0 = M_0 = R$，为地球的平均曲率半径。

$$\left.\begin{aligned} u &\approx \Delta x_{ij} + \mathrm{tg}\phi_0 \frac{x_i}{R}\Delta y_{ij} - \frac{x_i}{R}\Delta z_{ij} \\ V &= -\mathrm{tg}\phi_0 \frac{x_i}{R}\Delta x_{ij} + \Delta y_{ij}\frac{y_i}{R}\Delta z_{ij} \\ w &\approx \frac{x_i}{R}\Delta x_{ij} + \frac{y_i}{R}\Delta y_{ij} + \Delta z_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{9-44}$$

将（9-42）式或（9-44）式代入（9-38）式，便可导出一种大地测量观测值实用模型。经推导，大地测量观测值在联合平差中的线性化误差方程式为

（1）天文方位角

$$V_{a_{ij}} = a'_1 dx_1 + a'_2 dy_1 + a'_3 dz_1 + a'_4 dx_j + a'_5 dy_j + a'_6 dz_j - (a_{ij} - (a_{ij})) \tag{9-45}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= m_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} - n_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i} \\ a'_2 &= m_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_i} - n_{ij}\frac{\partial v}{\partial y_i} \\ a'_3 &= m_{ij}\frac{\partial u}{\partial z_i} - n_{ij}\frac{\partial v}{\partial z_i} \\ a'_4 &= m_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - n_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j} \\ a'_5 &= m_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_j} - n_{ij}\frac{\partial v}{\partial y_j} \\ a'_6 &= m_{ij}\frac{\partial u}{\partial z_j} - n_{ij}\frac{\partial v}{\partial z_j} \end{aligned}\right\} \tag{9-46}$$

a_{ij}为观测值，(a_{ij})为用式（9-42）和（9-38）求得的计算值，下同。而

$$m_{ij} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \qquad n_{ij} = \frac{u}{u^2 + v^2} \tag{9-47}$$

各偏导数值可由（9-44）式求出：

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -1 + \mathrm{tg}\phi_0 \frac{\Delta y_{ij}}{R} - \frac{\Delta z_{ij}}{R}\frac{\partial u}{\partial x_j} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = -\mathrm{tg}\phi_0 \frac{x_i}{R} \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j} = \mathrm{tg}\phi_0 \frac{x_i}{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = \frac{x_i}{R} \qquad \frac{\partial u}{\partial z_j} = -\frac{x_i}{R}$$

$$\frac{\partial V}{\partial X_i}=-\operatorname{tg}\phi_0\frac{X_j-2X_i}{R}\qquad \frac{\partial V}{\partial X_j}=-\operatorname{tg}\phi_0\frac{X_j}{R}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_i}=-1-\frac{\Delta Z_{ij}}{R}\qquad \frac{\partial u}{\partial x_j}=1 \tag{9-48}$$

$$\frac{\partial v}{\partial Z_i}=\frac{y_i}{R}\qquad \frac{\partial V}{\partial Z_i}=-\frac{y_i}{R}$$

$$\frac{\partial w}{\partial X_i}=\frac{X_j-2X_i}{R}\qquad \frac{\partial w}{\partial X_j}=\frac{x_1}{R}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_i}=\frac{y_j-2y_i}{R}\qquad \frac{\partial W}{\partial y_i}=\frac{y_i}{R}$$

$$\frac{\partial W}{\partial Z_i}=-1\qquad \frac{\partial W}{\partial Z_j}=1$$

（2）水平方向y_{ij}

$$V_{yij}=a'_1dx_i+a'_2dy_i+a'_3dz_i+a'_4dx_j+a'_5dy_j+a'_6dz_j-d\Omega_i-(y_{ij}+\Omega_i^0-(a_{ij})) \tag{9-49}$$

式中各符号同上，Ω_i为仪器定向未知数。

（3）水平角β_{ijk}

$$V_{\beta ijk}=(a'_1(i,k)-a'_1(i,j))dx_i+(a'_2(i,k)-a'_2(i,j))dy_i-(a'_3(i,k)-a'_3(i,j))dz_i-a'_4(i,k)dx_j-a'_5(i,j)dy_j-a'_6(i,j)dz_j+a'_4(i,k)dx_k+a'_5(i,k)dy_k+a'_6(i,k)dz_k-(\beta_{ijk}-(\beta_{ijk})) \tag{9-50}$$

其中

$$(\beta_{ijk})=(a_{ik})-(a_{ij})$$

$a(i,j)$、$a(j,k)$表示用i,j和i,k点算得的a系数。

（4）垂直角V_{ij}

$$V_{vij}=b'_1dx_i+b'_2dy_i+b'_3dz_i+b'_4dx_i+b'_5dy_j-b'_6dz_j-(V_{ij}-(V_{ij})] \tag{9-51}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
b'_1&=e_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}+f_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}+g_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\\
b'_2&=e_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_i}+f_{ij}\frac{\partial v}{\partial y_i}+g_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_i}\\
b'_3&=e_{ij}\frac{\partial u}{\partial z_i}+f_{ij}\frac{\partial v}{\partial z_i}+g_{ij}\frac{\partial w}{\partial z_i}\\
b'_4&=e_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}+f_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}+g_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\\
b'_5&=e_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_j}+f_{ij}\frac{\partial v}{\partial y_j}+g_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_j}\\
b'_6&=e_{ij}\frac{\partial u}{\partial z_j}+f_{ij}\frac{\partial v}{\partial z_j}+g_{ij}\frac{\partial w}{\partial z_j}
\end{aligned}\right\} \tag{9-52}$$

且

$$\left.\begin{aligned} e_{ij} &= -\frac{\cos^2 V_{ij}\cdot \mathrm{tg}V_{ij}}{u^2+V^2}u \\ f_{ij} &= \frac{\cos^2 V_{ij}\cdot \mathrm{tg}V_{ij}}{u^2+v^2}v \\ g_{ij} &= -\frac{\cos^2 V_{ij}}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{aligned}\right\} \tag{9-53}$$

（5）空间距离S_{ij}

$$S_{ij} = \sqrt{u^2+v^2+w^2} = \sqrt{\Delta x_{ij}^2+\Delta y_{ij}^2+\Delta w_{ij}^2} \tag{9-54}$$

其误差方程为：

$$V_{S_{ij}} = \frac{\Delta x_{ij}}{S_{ij}}dx_i + \frac{\Delta y_{ij}}{S_{ij}}dy_i + \frac{\Delta z_{ij}}{S_{ij}}dz_i - \frac{\Delta x_{ij}}{S_{ij}}dx_i - \frac{\Delta y_{ij}}{S_{ij}}dy_i$$
$$-\frac{\Delta z_{ij}}{S_{ij}}dz_i - (S_{ij}-(S_{ij})) \tag{9-55}$$

（6）高差Δh_{ij}

经推算

$$h \approx z_i - \frac{x_i^2}{2N_0} - \frac{y_i^2}{2M_0} \tag{9-56}$$

当取$N_0 = M_0 = R$时便有

$$h_i \approx z_i - \frac{1}{2R}(x_i^2 + y_i^2) \tag{9-57}$$

按上式可导出：

$$V_{\Delta h_{ij}} = \frac{x_i}{R}dx_i - \frac{y_i}{R}dy_i - dz_i - \frac{x_j}{R}dx_j - \frac{y_j}{R}dy_j + dz_j$$
$$-(\Delta h_{ij} - (\Delta h_{ij})) \tag{9-58}$$

其中$(\Delta h_{ij}) = (h_j) - (h_i)$可按（9-56）式计算。

四、实用数学模型的精度和应用范围

为了考察上述实用大地测量观测值数学模型的模型误差及其对联合平差的影响，仍对图9-3-2所示的各种方案采用椭球模型（（9-42）式和（9-56）式）进行模拟计算，所得结果列于表2。

除了计算分析外，还可用严密模型与上述实用模型之差从理论上分析实用模型的误差。对于边长为$2L$的方形区域，其误差为

$$\left.\begin{aligned} da &\approx -\frac{L^3(1-\mathrm{tg}^2\phi_0)\cdot \mathrm{tg}\phi_0}{2R^3} \\ dV &\approx \frac{L^3 \mathrm{tg}\phi_0}{2\sqrt{2}R^2\cdot \cos V} \end{aligned}\right\} \tag{9-59}$$

从上式可见，实用模型的误差随纬度ϕ_0的正切成比例增大。对于$\phi_0=30°$、40°、55°，垂直角$V=15°$，$R=6370\text{km}$，据（9-59）式可将水平角观测值与垂直观测值之误差计算列于表9-3-3。

推荐的数学模型的误差及其对联合平差的影响（$\frac{\text{实地mm}}{\text{像片}\mu\text{m}}$）　表 9-3-2

大地测量观测值	方　案	模型中误差	模型误差对联合平差的影响		
			u_x	u_y	u_z
/	a	0	$\frac{0.1\times10^{-6}}{2.5\times10^{-8}}$	$\frac{0.2\times10^{-6}}{5.0\times10^{-8}}$	$\frac{0.3\times10^{-6}}{7.5\times10^{-8}}$
水平角	b	$9.7''\times10^{-3}$	$\frac{0.092}{0.02}$	$\frac{0.093}{1.02}$	$\frac{1.451}{0.4}$
垂直角	c	$3.7''\times10^{-5}$	$\frac{0.002}{5.3\times10^{-4}}$	$\frac{0.002}{5.3\times10^{-4}}$	$\frac{0.017}{4.3\times10^{-3}}$
水准高差	d	24.8μm	$\frac{0.003}{0.8\times10^{-4}}$	$\frac{0.008}{1.9\times10^{-3}}$	$\frac{0.054}{18.5\times10^{-3}}$

实用模型的理论误差（秒）（$V=15°$，$R=6370\text{km}$）　表 9-3-3

$2L$（km）	$\phi_0=30°$		$\phi_0=40°$		$\phi_0=55°$	
	$\lvert d\alpha\rvert$	$\lvert dV\rvert$	$\lvert d\alpha\rvert$	$\lvert dV\rvert$	$\lvert d\alpha\rvert$	$\lvert dV\rvert$
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
5	0.000	0.006	0.000	0.000	0.000	0.017
10	0.000	0.026	0.000	0.038	0.000	0.066
20	0.000	0.104	0.001	0.151	0.002	0.266

从表9-3-3可以看出，对于推荐的实用模型，水平角观测值的误差为R^{-1}的三次小项，而垂直角观测值的误差则为R^{-1}的二次小项。对于位于$\phi_0=55°$处的$20\times20\text{km}^2$的区域，垂直角观测值的模型误差也只有$0.3''$。因此，在大比例尺高精度的摄影测量区域网联合平差中，本文所介绍的大地测量观测值的实用模型是有效的。

需要说明的是，上面分析的仅是实用模型的几何误差，对于实用模型的物理误差，不在此讨论，其影响一般较小。

最后，我们从理论上给出通常采用的顾及地球曲率的天顶距或高差公式（9-9）与本节所介绍公式的差异。在（9-9）式中，地球曲率改正项为

$$\delta z_1 = \frac{D_{ij}^2}{2R} = \frac{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2}{2R} \tag{9-60}$$

而在本文的（9-57）式中，地球曲率改正项为

$$\delta z_2 = \frac{D_j^2}{2R} - \frac{D_i^2}{2R} = \frac{1}{2R}[(x_j^2 + y_j^2) - (x_i^2 + y_i^2)] \tag{9-61}$$

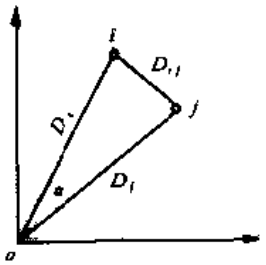


图 9-3-3

参见图9-3-3可以推得

$$\delta z_2 - \delta z_1 = \frac{D_i}{R}(D_j \cos\alpha - D_i) \tag{9-62}$$

由上式可知，二者的差异与 i、j 点在区域网中的位置有关。当 $\alpha = 180°$，差异最大为：

$$(\delta z_2 - \delta z_1) = \frac{D_i}{R}(D_i + D_j)$$

在上式中令 $D_i = D_j = 1$ km，则可得 $\delta z_2 - \delta z_1 \approx 31.4$cm，由此可见，即使对于不大的区域，用（9-60）式进行地球曲率改正也不是正确的，其误差是不能接受的，因此，建议用（9-61）式替代（9-60）式进行地球曲率改正。

§9.4 联合平差中法方程式的构建与求解

差不多在所有的联合平差程序中都采用间接观测平差法。各类观测值的误差方程式已在前两节中讨论过。

这里着重讨论的是，由于考虑到各种可能的非摄影测量信息，将使原来很有规则的纯摄影测量平差的法方程式系数矩阵变得很不规则，从而不利于计算机存贮和解求。应当采用什么手段才能使联合平差的法方程式有一个有利的结构呢？解决这个问题可以采用以下几种办法。

（1）将物点分成两组，其中所有与非摄影测量信息有关的物点放在第二组中。仍然采用消去全部物点坐标未知数，获得仅含定向未知数的改化法方程式的方法。对于第一组物点坐标的消元与常规区域网平差相同，十分简便。而对于第二组物点坐标，由于相互之间存在非摄影测量信息的联系，必须整体地求逆。如果非摄影测量观测值涉及到的物点太多，则求逆的工作量将明显增加。

（2）将与非摄影测量观测值有关的物点坐标保留，放在像片定向未知数之后不约去，从而得到一个镶边带状矩阵（与带附加参数的自检校平差的法方程式结构相同）。此时，镶边宽度等于非摄影测量观测值所涉及的物点坐标未知数的个数。比如增加一个水平角观测值，边宽将增加 6。该法适合于在少数物点间具有大量观测值或条件的情况。

（3）从带条件的间接观测平差出发，导出镶边带状结构的联合平差法方程式。

下列两类观测值方程分别代表摄影测量和非摄影测量观测值

$$V_1 = A\hat{X} - l_1, \quad P_{11} \tag{9-63}$$

$$V_2 = C\hat{X} - l_2, \quad P_{22} \tag{9-64}$$

作为一种策略或技巧，可将（9-64）式写成以下两个方程式：

$$V_2 = \hat{l}_2 - l_2, \quad P_{22} \tag{9-65}$$

和

$$C\hat{X} = \hat{l}_2 \tag{9-66}$$

于是，(9-65）式为观测值l_2相对于新参数$\hat{l}_2$的误差方程式，而（9-66）式则表示两组未知数之间必须满足的条件方程式。

联立求解（9-63）和（9-64）式联立求解（9-63）、(9-65）和（9-66）是等价的。后者是未知数之间带条件的间接观测平差。总误差方程式为：

$$V = B\hat{t} - L, \quad P \tag{9-67}$$

式中

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{t} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{l}_2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad 和 P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}$$

而未知数之间的条件为：

$$\left.\begin{aligned} H\hat{t} &= 0 \\ H &= [C \quad -I_2] \end{aligned}\right\} \tag{9-68}$$

由$\Phi = V^T PV + 2K^T(H\hat{t} - 0) \rightarrow MIN$出发，有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2V^T PB + 2K^T H = 0$$

即

$$\beta^T PV + H^T K = 0。$$

将该式分开，并与条件式（9-66）结合起来便得到法方程式：

$$\begin{bmatrix} A^T P_{11} A & C^T & 0 \\ C & 0 & -I_2 \\ 0 & -I^2 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ K \\ \hat{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P_{11} l_1 \\ 0 \\ P_{22} l_2 \end{bmatrix} \tag{9-69}$$

消去未知数$\hat{l}_2$后，得到

$$\begin{bmatrix} A^T P_{11} A + C^T \\ C \quad -Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P_{11} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \tag{9-70}$$

式中，Q_{22}为观测值l_2的权倒数矩阵，即$Q_{22} = P_{22}^{-1}$。

仔细地分析一下（9-70）式可以发现，采用这种处理方法的联合平差系统，可以保持原来的法方程式系数矩阵及常数向量保持不变。增加的非摄影测量观测值导致增加一个镶边矩阵，其元素可以直接由相应的误差方程式获得。此时镶边的宽度等于附加的观测值或条件数。因此它适合于附加观测值或条件不多，但涉及到的未知数较多的情况。

（4）打乱传统的未知数排列顺序，即不再将物方坐标和像片定向未知数严格分开，

而是逐片依次排列物点和像片定向未知数，这样一来，附加的观测值总是作用在比较临近的未知数上。这种方法最先由联邦德国Kruck博士提出。

以光束法平差的一条航带为例（图9-4-1），未知数排列顺序为：第一片的物点1，2，3，4，5，6的坐标未知数，接着为第一片（像片 A）的定向未知数。然后第二片的物点、7、8、9和像片定向元素，……依此类推，得到图9-4-2的法方程式矩阵结构。

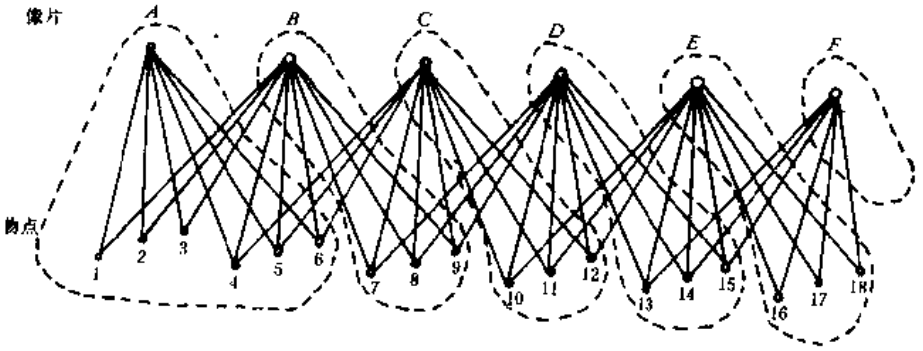


图 9-4-1

对于一个 3 × 7 片的光束法区域网平差（图9-4-3）可以得到图 9-4-4 的法方程式结构，其非零元素总是在主对角线附近，引入非摄影测量观测后，矩阵结构一般不会有大的变化。

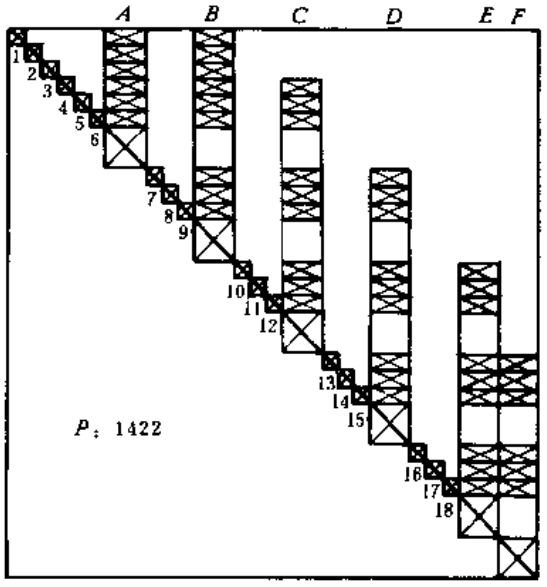


图 9-4-2

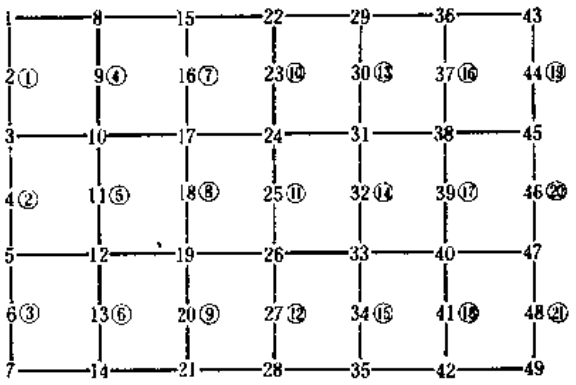


图 9-4-3

3 × 7 区域网

为了比较新、老方法排序进行联合平差的效果，在一个 3 ×21片区域中引入16条线段和一个方向观测组等大地测量观测值。表9-4-1列出了不同处理方法下法方程系数阵 N 和系数约化或分解后的矩阵 C 的非零元素量。

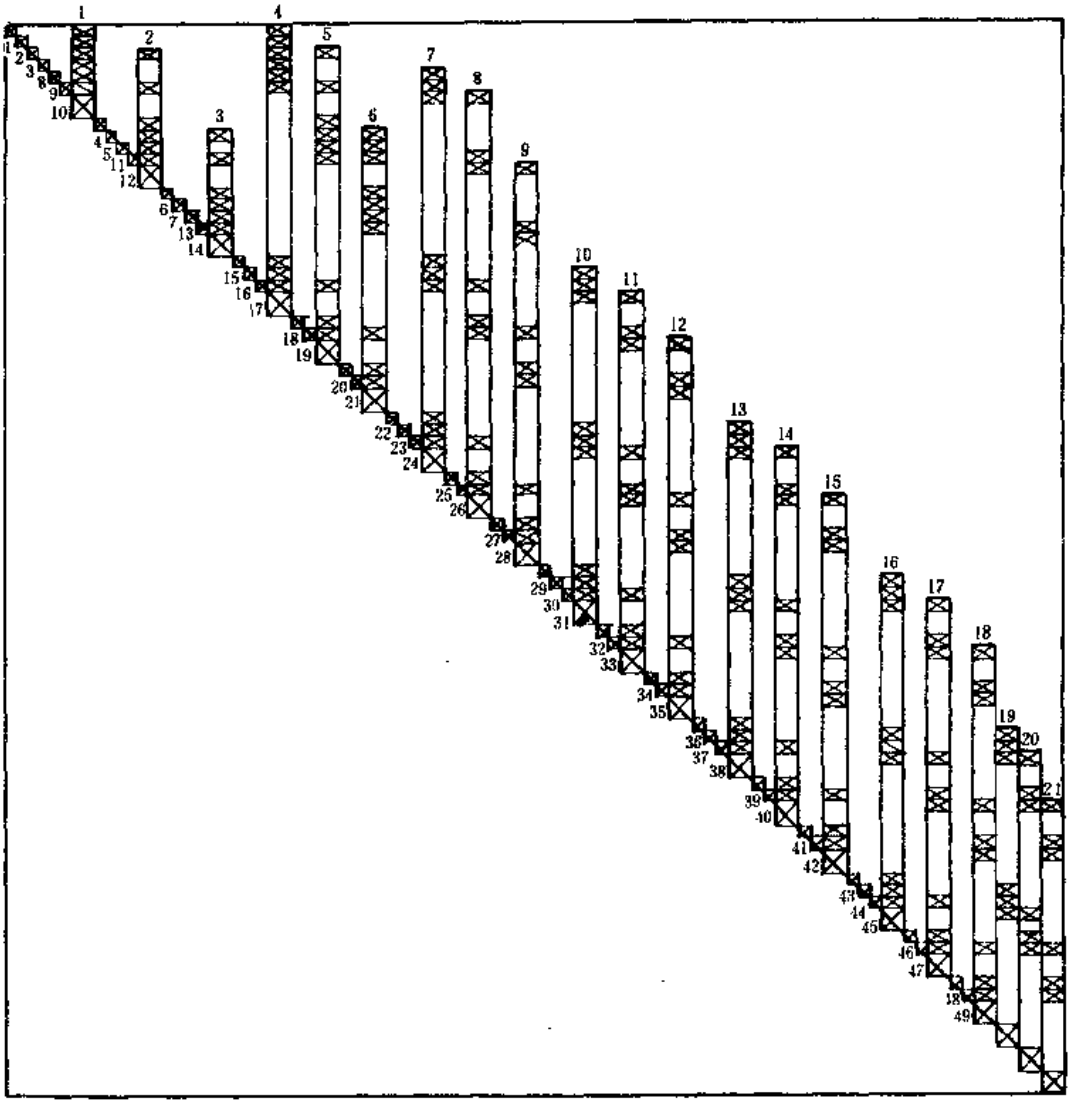


图 9-4-4

3 × 7 片光束法区域网平差的法方程式矩阵结构（$p=60\%$，$q=20\%$）

新、老未知数排序方法的比较　　表 9-4-1

比较项目	不带大地测量观测值（老方法）		联合平差			
			老方法		新方法	
	*N*矩阵	*C*矩阵	*N*	*C*	*N*	*C*
未知数个数	819	819	819	819	820	820
非零元素个数	12087	26235	12229	88451	12193	29617
内存要求					41782	41782
填充系数		2.17		7.23		2.43

显然，新的排序方法是很有利的。这种新排序方法的理论来自图论，在此不作更深入研究。

总之，联合平差法方程式的解求是相当费时的，人们期待用阵列处理机来加快求解速

度。特别是在联合平差中如何进行质量分析，即如何快速求解Q_{XX}和Q_{VV}矩阵，是需要加以解决的问题。

*§9.5 GPS全球定位系统在空中三角测量中的应用

一、全球定位系统（GPS）

GPS全球定位系统是英文Navigation Satellite Timing and Ranging/Global Positioning System的字头缩写词NAVSTAR/GPS的简称。它的含义是：导航卫星测时和测距/全球定位系统。该系统是美军自70年代初开始研制的新一代卫星导航和定位系统，由卫星部分、地面控制部分和用户接收机三部分组成。

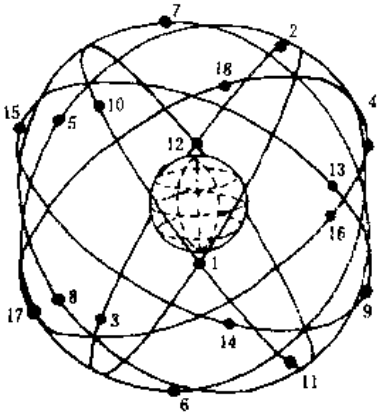


图 9-5-1

卫星部分由18颗工作卫星和3颗备用卫星组成。工作卫星均匀分布在六个相对于赤道的倾角为55°的近似于圆的轨道面上，而轨道面的夹角为60°，轨道平均高度约为20200km，12恒星时绕地球一周，这样的布局可以保证全球任一测站能在任何时刻同时收到四颗以上卫星的信号，见图9-5-1。卫星上安装有轻便的原子钟、微型计算机、电文存储和信号发射设备，由太阳能电池提供电源。卫星上备有少量燃料，用来调节卫星的轨道和姿态。如果某一工作卫星出现故障，备用卫星可随时根据地面控制站的命令飞往指定地点进入工作状态。

GPS卫星发射的是一对相干波，频率和波长分别为：

$$f_{L_1}=1575.42\,\mathrm{MHz},\quad \lambda_{L_1}=19\,\mathrm{cm}$$

$$f_{L_2}=1227.60\,\mathrm{MHz},\quad \lambda_{L_2}=24\,\mathrm{cm}$$

作为载波载有两类调制信号，一类为导航信号，另一类为电文信号。导航信号又分为两种，码率分别为1.023Mb/s和10.23Mb/s。前者信号编码1ms重复一次，用来快速捕获导航信号，故称捕获码，按设计仅用于粗略定位，故又称粗码（C/A码）；后者七天重复一次，且各颗卫星不同，码的变化结构十分复杂，不易捕获，但能用于精密定位，故称精码（P码）。两种码都是人为编制的一组类似噪声的信号码，通称为伪随机噪声码。电文信号同时以50bit/s的速率调制在L_1和L_2上。电文内容包括卫星星历表、各项改正数和卫星工作状态等，每帧电文播发30s，共1500bit，分为5个子帧，各300bit。借助电文信号，接收机可以选择图形最佳的一组卫星进行观测，以利于定位数据的处理。

地面控制部分是整个系统的中枢，它由一个主控站、若干个跟踪站和注入站所组成。地面控制部分的任务是保证整个系统的正常运转，包括管理和调整整个系统的工作状态，采集各类观测数据；计算卫星星历，卫星钟的钟差和漂移，各项改正数和定位信息，组成电文注入卫星存储器，以一组原子钟为基础，建立和维护一个高精度的GPS时间系统。

用户接收机部分由主机、电源和天线组成。主机的核心为微电脑、石英振荡器，还有相应的输入输出设备和接口。在专用软件控制下主机进行作业卫星选择、数据采集、加工、传输、处理和存储，对整个设备系统状态进行检查、报警和部分非致命故障的排除，承担整个接收系统的自动管理。天线通常采用全方位型的，以便采集来自各个方位任意非负高度角的卫星信号。由于卫星信号较微弱，在天线基座中有一个前置放大器，将信号放大后，再由同轴电缆馈入主机。电源部分为主机和天线供电，可使用经整流、稳压处理的市电，也可用蓄电池。

目前，GPS的观测方法大致分为四类：1.多普勒法，2.伪距法，3.干涉法，4.载波相位法。随着观测和处理方法的不同，各厂商生产的接收机类型存在一些明显的差别，功能、精度和价格也很悬殊。为了满足高精度定位要求和分析研究的需要，除实时定位外，还可以将观测值录入磁盘、磁带或盒带，利用研究部门提供的软件进行后处理，例如利用GPS数据进行空中三角测量时就需要利用相应的联合平差程序进行离线处理。

就原理而言，上述四种观测值处理方法中多普勒法与用子午卫星观测处理并无显著不同，但利用GPS卫星多普勒观测可以在较短的时间内取得较高的定位精度。由于它存在解的不定性问题，往往只用在多种观测功能的接收机中，作为一种辅助手段，以提高定位数据处理的速度。

伪距法的定位原理比较简单。用伪距法定位时，接收机本机振荡产生与卫星发射信号相同的一组P码（或C/A码），通过延迟器与接收机收到的信号进行比相，当两组信号彼此重合时，测出本机信号延迟量即为卫星信号的传输时间，加上一系列改正，乘以光速，得出卫星主测站天线相位中心的斜距。如果同时观测了四颗卫星，即可按距离交会法推算出测站位置和接收机时钟误差四个未知参数。伪距法定位精度较低，但可用于实时定位，如卫星、飞行器和船舶的实时导航。

干涉法的精度较高，不需要了解信号的结构，它把收到的信号看作是一组噪音，采用与甚长基线干涉测量相似的方法，通过相关处理，取得时延和时延率的观测值。

载波相位法是目前讨论最为广泛、深入的一种观测方法，它能提供出高精度定位的观测数据。所谓载波相位观测值实际上是卫星信号和接收机参考信息之间的相位差。由于载波相位法是利用卫星信号载波波长为单位进行量度的，如果测相精度达到百分之一周期，则可使仪器测量分辨率达到1.9mm和2.4mm。在精密大地测量地球动力学观测以及空中三角测量中，为了保证高精度，往往采用相对定位法，即把许多单测点瞬时载波相位观测量进行组合，形成单差方式、双差方式以及三差方式。这样做不仅处理方法简单实用，而且可以消除系统误差以提高精度。

当然，伪距法实质上也是一种相位测量法，只不过对波长较长的测距码进行相位量测（λ_p=29.3m，$\lambda_{C/A}$=293m）。在同样的测相精度下，其分辨率只能达到3m（C/A码）和0.3m（P码）。这就是在航测中喜爱采用载波相位法测量的原因。

二、GPS用于空中三角测量的可能性

由于GPS全球定位系统可用于动态定位，因此，我们可以利用设在地面固定点上和在

飞机上的GPS接收机来测定航摄飞行中摄站相对于该地面已知点的三维坐标。由GPS所确定的摄站位置，可作为辅助数据用于区域网联合平差，从而可大量节省、甚至免去地面的航测外业控制点测量工作。

在空中三角测量中利用GPS数据可达到什么样的预期精度和可靠性，已由作者和其它有关学者进行了研究。模拟计算结果非常吸引人，现总结如下：

（1）GPS摄站坐标在区域网联合平差中是极其有效的，只需要中等精度的GPS即可满足测图的要求，详见表9-5-1。

（2）外方位线元素的利用一般比角元素更有效。附加的姿态测量在其精度很高时可用来改善高程加密精度。

（3）利用GPS数据的光束法区域网平差将有较好的可靠性，这包括GPS数据自身的可靠性，像点坐标观测值和少量地面控制点的可靠性。关于可靠性的概念详见下文。

（4）原则上讲，GPS提供的摄站坐标用于平差可完全取代地面控制点，条件是GPS观测值在区域网中必须连续而没有间断。此时区域网可在GPS直角坐标系（世界大地基准WGS84）中平差。

（5）为了解决基准问题，即为了获得国家坐标系（如高斯—克吕格坐标系）的加密成果，要求有一定的地面控制点。若区域网四角各有一个平高控制点，即可达到目的。但是，如果GPS坐标必须逐条航带进行变换，则区域的两端还需要二排高程控制，或另加飞两条构架垂直航带并且带GPS数据。

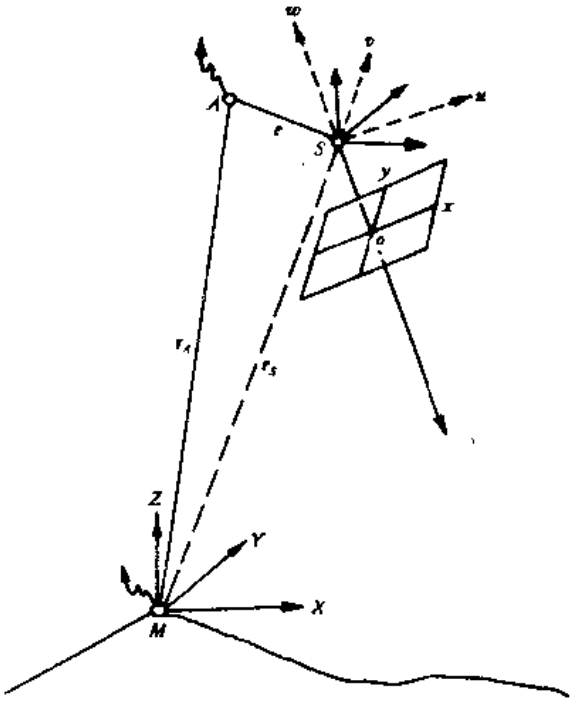


图 9-5-2

由于机载GPS接收机天线的相位中心不可能与航摄仪物镜后节点重合，所以产生了一个偏心矢量。如果将摄影机固定安装在飞机上，该偏心矢量为一常数，且在飞机坐标系（即像方坐标系）中的三个坐标分量可以测定出来（u_A，v_A，w_A）。

图9-5-2表示利用这种微分-组合导航系统获取空中控制的示意图。由在地面点M和在飞机上天线中心A的GPS观测值可得到A点在以M为原点的大地坐标$\vec{r}_A$（X_A，Y_A，Z_A）。由于偏心向量e亦已知，所以摄站点S在同一坐标系坐标亦可得知（X_s，Y_s，Z_s）。这时需要利用像片角元素，因为偏心e的三个分量是在像方系统中检定的。

由条件式：

联合平差对GPS摄站坐标的精度要求　　表 9-5-1

测图比例尺	摄影比例尺	对空三的精度要求		等高距	对GPS的精度要求	
		$\mu_{x,y}$	μ_z		$\sigma_{x,y}$	σ_z③
1:100000	1:100000	5 m	＜4 m	20m	30m	16m
1:50000	1:70000	2.5m	2 m	10m	15m	8 m
1:25000	1:50000	1.2m	1.2m	5 m	5 m	4 m
1:10000	1:30000	0.5m	0.4m	2 m	1.6m	0.7m
1:5000	1:15000	0.25m	0.2m	1 m	0.8m	0.35m
1:1000	1:8000	5cm	10cm	0.5m	0.4m①	0.15m
高精度点位测定	1:4000	1 ~2 cm	6cm	—	0.15m②	0.15m

* 设σ_0 = 15μm，①σ_0 = 6μm，②σ_0 = 3μm，③σ_{0_2} = 5 μm。

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} + \boldsymbol{R}_{\varphi,\omega,\kappa} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix} \tag{9-71}$$

可列出天线中心A点由GPS数据求得的大地坐标的线性化观测值方程式为：

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \Delta X_s \\ \Delta Y_s \\ \Delta Z_s \end{bmatrix} + \frac{\partial X_A Y_A Z_A}{\partial \varphi \omega \kappa} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \\ \Delta\kappa \end{bmatrix} + \boldsymbol{R}_{\varphi,\omega,\kappa} \begin{bmatrix} \Delta u_A \\ \Delta v_A \\ \Delta w_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_A - X_A^0 \\ Y_A - Y_A^0 \\ Z_A - Z_A^0 \end{bmatrix} \tag{9-72}$$

其中，X_A^0，Y_A^0，Z_A^0是用各待定未知数的近似值代入（9-71）式求得的计算坐标。而且偏心向量e的三个分量亦作为带权观测值处理。

三、试验结果

美国、联邦德国、荷兰、芬兰等国学者自1986年来进行了十分活跃的试验。这里主要介绍一次数据连续且具有良好控制的GPS动态试验，由荷兰Metkundige Dienst Van de Rijkswater—steat和联邦德国斯图加特大学摄影测量研究所合作完成。

试验区具有良好的控制，摄影比例尺为1:3800。区域已根据大量地面控制进行了空中三角测量，并以所得的摄站坐标作为“真值”(其标准差对于X_s，Y_s，Z_s分别为4.3cm，4.2cm和1.9cm），用来与GPS观测结果进行比较。试验区域有 7 条航带共130张像片。

定位使用了两台GPS接收机。一台在地面已知点上，一台在飞机上。采用了Serce 五通道接收机，能够对五颗卫星锁相，在飞行过程中同时接收五颗卫星的信号（其中一次只收到四颗卫星）。

记录速度为每0.6秒一个记录。观测值包括相位观测值和L_1 C/A码伪距观测值。定位计算采用单差法（图9-5-3）。

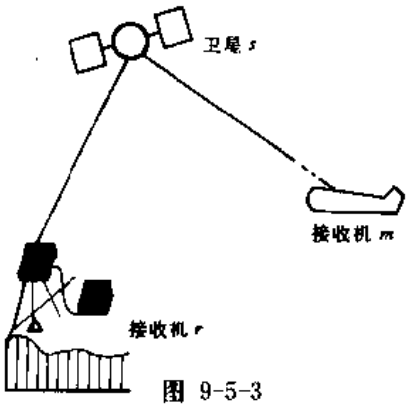


图 9-5-3

$$\Delta\Phi_{mr}^{s}(t) = \Phi_{m}^{s}(t) - \Phi_{r}^{s}(t)$$

（一）GPS坐标与摄站坐标“真值”的比较

如果直接用GPS定位方法求出的摄站坐标与其由空三求出的“真值”相比较，互差在几十米的数量级上，四颗卫星测定的航线则达到250m左右的误差.因此不能直接利用。

如果加入坐标平移的改正后，则均方根误差在X、Y、Z方向分别为7cm、9cm和6cm。但是对于四颗卫星的航带，均方根误差仍达到几米。

进一步采用线性回归对GPS坐标和摄站“真坐标”进行回归拟合，则所有航带的坐标差之均方根值减少为5.2cm（对所有航带）。若除去摄站坐标自身的摄影测量误差，仅为3.8cm（见表9-5-2）。

令人惊奇的是，如果不利用地面静止接收机而仅利用机载接收机数据进行线性回归，也能获得同样好的结果（表9-5-2）。

GPS坐标与摄站坐标“真值”的比较　　表 9 5-2

项　目	标准差（RMS）	ΔX（cm）	ΔY（cm）	ΔZ（cm）	坐标差（cm）
有地面接收机	线性回归后	5.5	6.1	3.9	5.2
	减去摄影测量误差	3.4	4.5	3.4	3.8
无地面接收机	线性回归后	5.5	7.6	4.6	6.0
	减去摄影测量误差	3.4	6.4	4.2	4.8

上述试验结果表明，在较短的时间内，GPS定位的系统误差实际上是线性变化的，在Flevoland试验时，每条航带飞行时间为60秒。消除线性系统误差后精度可达到几个厘米。

然而在较长时间段内GPS的系统偏差就不再是线性的了。静态GPS定位的漂移78分钟内在X、Y、Z方向上分别最大达到5.1m，8.4m和44.8m，这些漂移与实际卫星的几何构形有关。因此，摄影测量学界今后应当研究的是如何测定和消除偏差、漂移和系统误差。

（二）利用GPS数据的光束法区域网平差

在联合平差中，可以将GPS坐标看作为一组附加观测值（带有相应的权阵）参加平差计算，此时可利用（9-72）式，但应顾及GPS坐标存在的线性或非线性系统误差，引入如同式（9-13，14）中的附加参数（a_0，a_1，…，b_0，b_1，…，c_0，c_1…）。这些附加参数的引入需要同时引入相应的地面控制，构成的仍然是镶边带状结构的法方程式。如果每个航带的GPS记录是独立而互不连贯的，则应每条航带有自己的附加参数。

下面介绍Flevoland试验场利用GPS数据进行联合平差的试验结果。试验区域有七条航带，130片组成，面积为2km×4km，摄影比例尺1:3800，航向重叠约70%，旁向重叠约50%～60%。区域内共有877个物点，其中283个标志点、117个自然点，477个用PM-1转刺的点。平均每点出现在七张像片上。

该试验区域网用4种不同方案进行平差计算：

AT4V2H：控制点方案为4V2H的例常区域网平差；

AT6V3H：控制点方案为6V3H的例常区域网平差；

GPSNL：控制点方案为4V2H的GPS辅助空中三角测量，GPS天线坐标由导航数据解出；

GPSED：同上，但GPS天线坐标由简单差分法解出。

其中控制点方案为：

4V2H：四角平高点加区域两端两排高程点；

6V3H：在4V2H方案上再加中央一排高程点和两个平高点（约8条基线的间隔）。

像点坐标、控制点坐标和GPS天线坐标均作为带权观测值。除了通常的未知数（物点坐标、像片外方位元素，自检校附加参数）外，还引入每条航带GPS观测值的线性附加参数（对X_s，Y_s，Z_s GPS观测值各两个）。内方位元素和天线偏心参数则视为已知值。由于控制点坐标也是在GPS参考坐标系中，故无需考虑基准的变换问题。

平差计算后根据检查点计算出平均误差和均方根误差，同时求出理论精度，以资比较。结果列于表9-5-3。

Flevoland试验场区域网平差的精度　　表 9-5-3

平差方案	实际精度（cm）		理论精度（cm）
	平均精度	均方根误差	$\hat{\sigma}_0$ $\hat{\sigma}_x$ $\hat{\sigma}_y$ $\hat{\sigma}_z$
	v_x v_y v_z	μ_x μ_y μ_z	
AT4V2H①	−1.4 −1.4 10.6	2.6 2.2 11.9	1.03 1.3 1.3 4.7
AT6V3H②	−0.8 −0.5 0.3	1.9 1.4 3.1	1.03 1.1 1.1 2.2
GPSNL①	−0.4 −0.4 −0.9	2.1 1.8 4.7	1.03 1.1 1.1 1.9
GPSED①	−0.5 −0.9 0.2	2.3 1.9 4.1	1.04 1.1 1.1 1.8

*① 41个平面检查点，33个高程检查点。

② 39个平面检查点，29个高程检查点。

从表中看出，利用GPS数据的联合平差也能达到高精度摄影测量加密的要求精度。

当然，在这个例子中，航带间旁向重叠很大，像点在每个模型上平均45个，几何条件是相当好的。今后还要对常规飞行和极少或不用控制点的情况进行试验。

但是，无论如何，GPS数据用于航测空中三角测量是有美好前景的。

四、进一步的发展与展望

根据目前的试验结果，可以发现在航测中利用GPS数据仍有一些问题需要解决。这包括如何方便地确定相位观测值的整周期数，如何解决在测区飞行及拐弯中可能出现的失锁现象以及如何消除GPS观测值中的各种系统误差问题。此外，由于GPS记录时刻并不正好是曝光摄影时刻，故需解决记录同步或者由GPS记录内插摄站坐标的问题。

关于GPS系统误差问题，如果用摄影测量方法解决，则需要引入地面控制点。因此可以考虑用大地测量中用的双差法（图9-5-4）或三差法（图9-5-5）。

进一步的发展还可以在飞机上利用三个GPS天线，使用差分GPS干涉测量确定飞行中飞机的姿态参数（φ、ω、κ）于是对数据进行检校和基准变换后最终将直接提供摄影机的六个定向参数。这样一来，空中三角测量将变得非常简单或者干脆不必进行了。

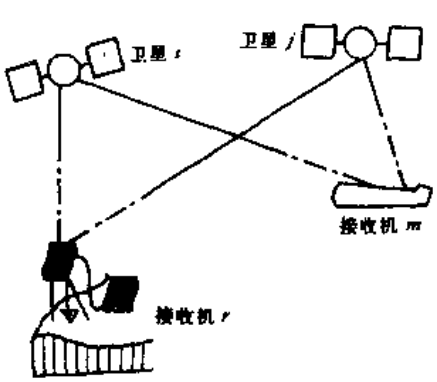


图 9-5-4

$$\delta\Delta\nabla\Phi_{rm}^{ij}=\Phi_m^i(t)-\Phi_r^i(t)-\Phi_m^j(t)+\Phi_r^j(t)$$

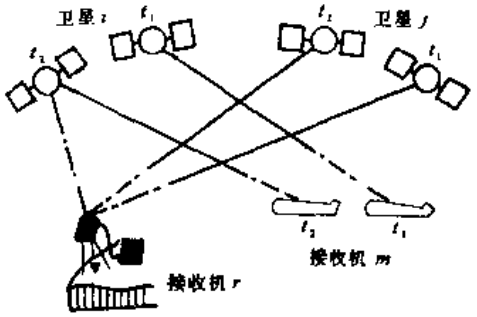


图 9-5-5

$$\delta\Delta\nabla\Phi_{rm}^{ij}(t_1)=\Phi_m^i(t_2)-\Phi_r^i(t_2)-\Phi_m^j(t_2)+\Phi_r^j(t_2)$$
$$-[\Phi_m^i(t_1)-\Phi_r^i(t_1)-\Phi_m^j(t_1)+\Phi_r^j(t_1)]$$

GPS定位与INS惯性导航系统组合起来也可以用来测定六个外方位元素，而且利于测定初始值。这也有一定应用前景。

因此，目前已使用了六十年之久的由空中三角测量和地面控制点解求像片定向元素的方法，将受到GPS技术等的冲击。

§9.6 高精度摄影测量加密在坐标地籍中的应用

一、概述

地籍测量是测定和调查土地及其附属物的权属、位置、质量、数量和利用现状等基本状况的测绘工作，它为土地和房屋管理、城乡规划、税收以及土地整治等方面提供重要的基础资料。

追溯地籍测量的发展历史，我们知道，近代地籍测量始于中欧的法、德、奥地利等国。它经历了图解地籍、数字地籍和坐标地籍三个发展阶段，最终必将成为土地管理信息系统。图解地籍以征税为主要目的，又称为税收地籍。数字地籍以确定产权为主要目的，故又称为地产地籍。只有坐标地籍，才能满足当前和未来的多用途地籍、地籍数据库和土地信息系统的要求。

19世纪的拿破仑时代是在一个局部或统一的系统中，采用同一地图投影，用平板仪测绘比例尺为1:2500到1:5000之间的地界地块图，地界点坐标从图中量取，这就是图解地籍。图解地籍的图解距离精度约为±0.5～1.0m。但当跨越大的距离时，由于不同的局部坐标系的变形，图解地籍的误差可能达到50m或更大。第一次世界大战之后，为提高地界设置和地籍测量的精度，改用经纬仪等对地界进行局部的数字测量，但并不与国家控制网相联系，它可以改善局部范围内的精度，但仍不能避免大范围内可能出现的矛盾。到了第二次世界大战之后，由于建立了国家控制网，人们可以采用高精度的点位测定方法确定每个地界点在国家统一坐标系中的坐标，并将之存入计算机中。在此基础上既可以用数字或图解的方法绘制多用途地籍图，也可以建立坐标地籍数据库和土地信息系统(LIS)。

坐标地籍对界址点测量精度的要求在西方一些国家，如联邦德国、奥地利、荷兰，是

很高的，一般为±3～5cm。在日本则分为六个等级（见表9-6-1），具体的施测精度等级由国土厅官房长官确定。表列的地界点位置误差指的是地界点与起始点之间的位置误差。

日本地籍测量规范中对地界点测量精度的规定　　表 9-6-1

精度等级	地界点位置限差	
	中误差	最大限差
甲1	2cm	6cm
甲2	7cm	20cm
甲3	15cm	45cm
乙1	25cm	75cm
乙2	50cm	150cm
乙3	100cm	300cm

我国地籍测量工作现已积极进行。考虑到地域之广大和经济发展之不平衡，对地界点的测量精度要求也应有不同的等级。在十分发达的地区，地界点测定精度达到±5～10cm，应当说是适宜的。

当代的摄影测量技术可以在地籍测量中发挥重要的作用。第一，可直接用高精度摄影测量联合平差方法加密地界点坐标，或建立供实地测量的密集控制点场；第二，可以用摄影测量方法（包括数字测图、制作正射像片和立体正射像片图等手段）测制多用途地籍图；第三，可以用数字摄影测量方法建立坐标地籍数据库和土地信息系统。

二、用高精度摄影测量方法加密地界点的坐标

（一）概述

用摄影测量方法测定地界点坐标始于50年代中期。当时在西方，摄影测量的像点量测中误差约为±12～15μm（在像片上），但由于量测仪器可以自动记录坐标，而那时的地面测量仪器尚无自动记录装置，因而摄影测量方法得到蓬勃发展。当时选择1:8000～1:12000的摄影比例尺加密精度可达到±10～15cm。

随着摄影质量的提高和采用地面标志点或高精度数字影像匹配技术，像点量测中误差可降到±3～5μm。采用带附加参数的自检校平差，利用GPS数据和地面测量辅助信息，可使加密的精度大大提高，作业也更加方便。所以自七十年代以来，航空摄影测量加密方法在测定界址点的任务中大显其身手。当选用1:5000～1:8000摄影比例尺时，加密点位在西方可达到±3～4cm的精度。例如70年代里，联邦德国就曾用摄影测量方法测定了19万3千个地界点。

目前，由于电子速测仪所能达到的成效使形势略有变化。利用全站式电子速测仪也可以经济、快速和灵活地测定地界点坐标。但是，摄影测量方法在下列场合仍然是经济合算的：

——点数很多、譬如大于10000个地界点；

——地面通视条件不好，而从空中能够看到界址点；

——地界点完整且便于在其上布设辅助标志；

——不仅要测量地界点，而且要同时制作多用途地籍图。

我国幅员广阔，地籍测量刚刚起步，经过建国四十年来的努力已具备了技术雄厚的摄影测量队伍，因此应当充分发挥摄影测量在地籍测量中的作用。

根据最近由武汉测绘科技大学和陕西省测绘局进行的试验表明，利用1:3000摄影比例尺的资料和我国的航测内外业作业条件，也能获得 ± 5 ～10cm的高精度加密结果。因此，用摄影测量方法加密地界点坐标、进行地籍测量是大有前途的。

（二）摄影测量方法加密地界点坐标中的具体问题

1.设置标志和控制检查

所有要测定的地界点应在摄影飞行之前设置标志。对于不同精度要求的坐标地籍，常用的摄影比例尺为1:3000～1:8000。标志大小在10～30cm间波动。如果标石直径已满足要求，则可直接在其顶部和上侧面漆以不同的颜色，并在周围布上辅助标志（见§3.2节）。如果新建界址点标石，建议用带色彩的塑料标。若需设置更大标志时，可直接用按钮将合乎要求尺寸的塑料圆盘对中地固定在塑料标上。

为了进行控制检查，在布设标志同时用钢卷尺或测距仪测量地界点之间的距离。在奥地利，每个地界点至少必须量两个距离。这些距离量测值既可简单地用来检查摄影测量加密的点位精度，也可以作为观测值在区域网中进行联合平差。

2.根据要求的精度选择摄影比例尺

首先可以用距离差作为误差限值来讨论。设两个地界点间距离用摄影测量加密方法求出为S_p，地面实测为S_t，则

$$\Delta S=|S_p-S_t|$$

当取最大误差为三倍中误差时，有：

$$\Delta S_{max}=3\sqrt{\sigma_{s_p}^2+\sigma_{s_t}^2}$$

又设像片坐标量测中误差为σ_p，像片比例尺分母为m_b，则σ_{s_p}由下式求出

$$\sigma_{s_p}[\mathrm{cm}]=\frac{m_b\cdot\sqrt{2}\cdot\sigma_p[\mu\mathrm{m}]}{10000}$$

式中分子的$\sqrt{2}$表示由坐标转换成距离。

假设地面两次独立的距离量测之最大误差亦取ΔS_{max}，则

$$\sigma_{s_t}=\frac{\Delta S_{max}}{3\sqrt{2}}$$

于是可求得在一定要求精度ΔS_{max}和已知像点量测精度σ_p时，允许的摄影比例尺分母：

$$m_b\leqslant\frac{10000\cdot\Delta S_{max}[\mathrm{cm}]}{6\cdot\sigma_p[\mu\mathrm{m}]}\qquad(9\text{-}73)$$

表9-6 2列出ΔS_{max}和σ_p为不同值时的m_b。所以可以根据地籍要求的精度和像片坐标量测中误差来选择摄影比例尺。此时是针对带自检校的光束法区域网平差和联合地面相对控制的联合平差。

如果用点位差作为误差限值，则ΔS_{max}为点位差限值的$\sqrt{2}$倍，然后查表9-6-2即可。

ΔS_{max}和σ_y不同取值时的m_b　　表 9-6-2

m_b \ σ_y / ΔS_{max}	4μm	8μm	12μm	16μm
10cm	4166	2083	1389	1042
20cm	8333	4166	2778	2083
30cm	12500	6250	4166	3125

除了比例尺外，还有一个主距问题。由于纯地籍测量是一个两维的问题，因此，可以不考虑高程精度的要求。故而人们往往优先采用长焦距摄影机，以使航高不致于过低，而且减小了地面高层建筑和树木的阴影。

3．对区域网平差中平面和高程控制点的要求

区域网平差采用带附加参数的光束法平差，并可与地面测量观测值进行联合平差。所有像点坐标应用精密的单像或双像坐标量测仪或解析测图仪量测，自动记录框标和像点坐标，最好能进行在线空中三角测量。

由于地界点数量在每片上很多，故平差程序不应对每片/模型的点数有所限制。

用摄影测量方法加密地界点坐标是高精度点位加密，平面控制取密周边布点($i=2b$)，即每跨两条基线布设一平面控制点（最好为平面控制点，但在区域内部则不需要布平面控制点，此时，区域网加密的平面精度理论上可达到：

$$\sigma_{X,Y} \approx (0.87 \sim 1.00)\sigma_0 \tag{9-74}$$

尽管地籍测量中不需要提供点的高程，区域网平差中仍需要布设适量的高程控制点，以保证高程测定误差所造成的模型变形（倾斜、弯曲等）对平面位置的影响远小于像片坐标量测误差的影响。此时高程控制点间隔可如下推导出来。

取Ebner教授研究结果，区域网加密的高程理论精度为（详见第十章）：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{Z_{最大}}/\sigma_{M_Z} &= 0.27 + 0.31i \text{（独立模型法）} \\ \sigma_{Z_{最大}}/\sigma_0 &= (0.93 + 0.19i) \times 1.5 \text{（光束法）} \end{aligned}\right\} \tag{9-75}$$

根据经验，上式中独立模型法与光束法平差的单位权中误差大致有以下关系：

$$\sigma_{M_Z} \approx 1.5\sigma_0$$

单模型中$\sigma_{Z_{max}}$对平面的影响可由图9-6-1中导出：

$$\Delta S = h_{max} \cdot \frac{\sigma_{Z_{max}}}{b} ,$$

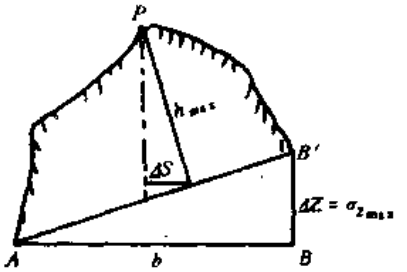


图 9-6-1

假设允许的$\Delta S = \frac{1}{2}\sigma_0 \cdot m_b$，则得到允许的高程控制跨距：

$$\left.\begin{aligned} i_{\text{独模法}} &= \frac{b\cdot m_b}{0.93\cdot h_{\max}} - 0.87 \\ i_{\text{光束法}} &= \frac{b\cdot m_b}{0.57\cdot h_{\max}} - 4.89 \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}76)$$

设$b=92\text{mm}$(60%航向重叠)，$m_b=8000$，当$h_{\max}=100\text{m}$时，$i_{\text{独模法}}=7$，$i_{\text{光束法}}=8$。

可见为保证高精度平面加密，也需要有适量的高程控制点。

如果利用GPS数据，则不仅高程控制点可以不要，而且平面控制也可以大量节省。

4. 地面控制点系统误差的处理

由于高精度摄影测量加密的精度不断提高，很可能出现控制点精度低于摄影测量平差坐标精度的情况。因此，从理论上讲，必须将控制点坐标作为具有相应权的观测值参加区域网平差。这样做的结果是在控制点坐标上获得相应的改正数。如果用平差坐标代替控制点坐标，将意味着在每次摄影测量加密后就要修改一次控制点坐标。但是，从实用上讲，每平差一次就改变一次控制点坐标，会导致控制点使用和管理上的麻烦，如果控制点在区域网平差后仍用原坐标，则它们与其周围的摄影测量加密点坐标会产生较大的矛盾。

目前在国外采用下列办法来解决这个矛盾。首先，作为控制点的坐标在一定时间内保持不变，而采用最小二乘配置法（见数字摄影测量教材）将所有摄影测量平差坐标稍加变动，以消除网中的内外业成果的矛盾，然后，经过一段较长周期，利用全部像片资料，进行全区的统一联合平差。用平差后的控制点坐标代替原来库存的控制点坐标，同时更新地界点坐标数据库。

5. 地面附加观测值的处理

上面已指出，在设置地界点标志时最好量测一些地界点间的距离，这些附加观测值可以按上文联合平差原理作为另一类观测值方程列出，通过严格的联合平差以提高解的精度和保证每个地块的相对精度。

也可以采用分步平差法。即，利用现有的带附加参数的自检校光束法区域网平差，以获得地界点的加密坐标。作为下一步平差，则列出距离观测值的条件平差方程。其公式同上文§9.2和§9.3节。平差后，有关地界点坐标获得相应的改正数。如果第二步条件平差中，坐标改正数的权按第一步平差的未知数协因素阵求出，则两步解法也是严密的。

三、用摄影测量平差方法为地界点测定提供密集控制网格

由于摄影测量区域网有利的平面精度分布，尤其当采用密集周边（$i=2b$）布点时，精度分布均匀，而且几乎与区域大小无关，可以达到与像片坐标量测相同的精度〔式(9-74)〕。所以可以用摄影测量方法为地界点坐标的测定提供一个十分均匀的控制网格。这些格网点的坐标测定精度应达到$\pm 1.5\sim 3\text{cm}$，而且点相当密集，点距为100～500m。它们将作为地籍更新测量，包括管线网地籍和界址点的变更测量的基础。在城市，当不可能直接从像片立体对上测定地界点（如房角等）时，也可以从这个控制网格出发，在实地测定地界点坐标。

在这种情况下，摄影测量加密必须从高级控制网出发，所提供的周边控制点精度应不

超过1cm，以±3～5mm为宜。例如在联邦德国的巴伐利亚和下萨克森，曾从高一级三角测量网出发，用摄影测量加密出点距约100m的控制网格，供坐标地籍测量等方面使用。在加拿大曾用摄影测量方法从二等网加密三等网。

本章习题与思考题

1. 为什么要引入非摄影测量观测值与摄影测量观测值一起进行平差？
2. 在光束法平差中可以利用哪些非摄影测量观测值？
3. 当引入导航数据时法方程系数矩阵有何变化？当引入地面控制测量观测值时法方程式系数阵又有何变化？
4. 在联合平差中如何才能获得有利的法方程式系数阵的结构？
5. 列出联合平差中地面距离、水平角和高度角的近似和严格的误差方程式。
6. 联合平差主要有哪些应用前景？
7. 什么叫GPS系统？它在航测中有哪些可能的应用？
8. 不同加密目的和不同成图比例尺下对GPS提供的摄站坐标有何种要求？
9. 什么叫坐标地籍？它与图解地籍有什么区别？
10. 叙述用高精度摄影测量方法加密地界点坐标的方法及注意事项。
11. 如何处理摄影测量平差后控制点上的残差？
12. 在我国如何才能推广高精度摄影测量加密方法？
13. 用摄影测量方法加密出密集的控制网格有什么用途？

第十章　解析空中三角测量的精度分析

§10.1　概述

解析空中三角测量的任务是解决目标点的空间定位问题，定位精度如何，这是在解决实际问题时，用户很关心的指标。明确了不同方法所能达到的精度，才能很据需要选择方法。

解析空中三角测量的精度一方面可从理论上进行分析，把待定点的坐标改正数视为随机变量，在最小二乘平差计算中，求出坐标改正数的方差——协方差矩阵。另一种方法则是利用大量野外实测控制点（这些点往往都是人工标志点）作为解析空中三角测量的多余检查点，将平差后所得该点的坐标与野外实测坐标比较，其差值视为真误差，由这些真误差计算出点位坐标。通常我们把前一种方法得到的精度称为理论精度，通过理论精度的研究告诉我们在单航带和区域网中平差后误差的分布规律，这些误差分布规律，告诉我们控制点应当如何合理的分布。后一种方法得到的精度估计称为实际精度，这是评定解析空中三角测量精度的比较可靠的方法。实际精度与理论精度的差异往往有助于我们发现数据或平差模型存在的误差，只是在实际工作中往往不可能提供那样多的多余控制点，因此这种方法往往是在科学研究中，通过解析空中三角测量试验场来实现的。

§10.2　解析空中三角测量的理论精度

一、单航带空中三角测量的最弱点精度

我们在§5.3中曾经讨论过航带网的误差传播规律，这里讨论单航带空中三角测量的精度时，我们只注意偶然误差的传播，误差按其对最后结果的影响可分为独立累积性的和非独立累积性的，这两种类型误差在第n个、第$2n$个、及第$\frac{n}{2}$个模型上累积误差可用以下公式表示：

独立累积性误差

$$\left.\begin{array}{ll} \text{第 } n \text{ 模型} & [\delta]_n = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n \\ \text{第 } 2n \text{ 模型} & [\delta]_{2n} + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n + \cdots + \delta_{2n} \\ \text{第 } \frac{n}{2} \text{ 模型} & [\delta]_{\frac{n}{2}} = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{\frac{n}{2}} \end{array}\right\} \qquad (10\text{-}1)$$

非独立累积性误差

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{第 } n \text{ 模型} \quad [\delta]_n = n\delta_1 + (n-1)\delta_2 + \cdots + \delta_n \\
&\text{第 } 2n \text{ 模型} \quad [\delta]_{2n} = 2n\delta_1 - (2n-1)\delta_2 + \cdots + \delta_{2n} \\
&\text{第 } \frac{n}{2} \text{ 模型} \quad [\delta]_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}\delta_1 + \left(\frac{n}{2}-1\right)\delta_2 + \cdots + \delta_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{10-2}
$$

（一）经非线性改正后航带中任一点上残余误差的一般规律

经非线性改正后航带中残余误差的规律与采用非线性改正公式和控制点的布设有关。现假定采用二次多项式，其控制点的分布如图10-2-1所示。

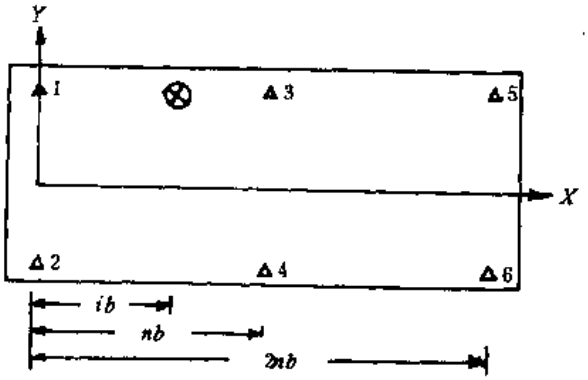


图 10-2-1

设每个模型的基线长度等于 b，n 为控制点 1、3 之间的模型个数，那么在 X 轴上点 nb、$2nb$、及 ib 处的累积误差分别为 $[\delta]_n$、$[\delta]_{2n}$、$[\delta]_i$，而所采用的非线性变形改正公式为：

$$
\delta_i = C_1 X_i + C_2 X_i^2 = C_1(ib) + C_2(ib)^2 \tag{10-3}
$$

已知 nb 和 $2nb$ 处的 $[\delta]_n$、$[\delta]_{2n}$，按上式改正时，可以求得 C_1 和 C_2，即

$$
C_1(nb) + C_2(nb)^2 = -[\delta]_n
$$

$$
C_1(2nb) + C_2(2nb)^2 = -[\delta]_{2n}
$$

联立解之，得

$$
\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{-4[\delta]_n + [\delta]_{2n}}{2nb} \\
C_2 &= \frac{2[\delta]_n - [\delta]_{2n}}{2n^2 b^2}
\end{aligned}\right\} \tag{10-4}
$$

将 C_1、C_2 代入式（10-3）中，可以得到任一点 ib 处的改正数为：

$$
\delta_i = \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{2i}{n}\right)[\delta]_n + \left(\frac{i}{2n} - \frac{i^2}{2n^2}\right)[\delta]_{2n}
$$

任一点 ib 处的残余误差 Δ_i 为：

$$
\Delta_i = [\delta]_i + \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{2i}{n}\right)[\delta]_n + \left(\frac{i}{2n} - \frac{i^2}{2n^2}\right)[\delta]_{2n} \tag{10-5}
$$

将上式对 i 求导数，取极值，可以得到两个极值点，即 $i_1 = \frac{n}{2}$ 和 $i_2 = \frac{3}{2}n$，在这两点处的残余误差最大，精度最低，通常称为最弱点。这里以 $\frac{n}{2}$ 处的残余误差来衡量构网的精度。

以 $i = \frac{n}{2}$ 代入式（10-5）中，得到 $\frac{n}{2}b$ 处的残余误差：

$$\Delta_{\frac{n}{2}}=[\delta]_{\frac{n}{2}}-\frac{3}{4}[\delta]_n+\frac{1}{8}[\delta]_{2n} \tag{10-6}$$

式(10-6)是$\frac{n}{2}b$处残余误差的一般形式，式中$[\delta]_{\frac{n}{2}}$、$[\delta]_n$、$[\delta]_{2n}$分别用式（10-1）、(10-2)代入，则可以得到：

独立累积性误差对最弱点影响

$$\Delta_{\frac{n}{2}}=\frac{3}{8}(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\frac{n}{2}})-\frac{5}{8}(\delta_{\frac{n}{2}+1}+\delta_{\frac{n}{2}+2}+\cdots+\delta_n)+\frac{1}{8}(\delta_{n+1}+\delta_{n+2}+\cdots+\delta_{2n})$$

设$m_{\delta_1}=m_{\delta_2}=\cdots=m_{\delta_{2n}}=m$，则上式转换成中误差，则

$$m_{\frac{n}{2}}=\pm\frac{\sqrt{18n}}{8}m \tag{10-7}$$

式中：m为一个模型中产生的单元误差的中误差；

n为控制点间的基线数。

非独立累积性误差对最弱点的影响

$$\begin{aligned}\Delta_{\frac{n}{2}}=&-\frac{3}{8}\left(\delta_2+2\delta_3+3\delta_4+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\delta_{\frac{n}{2}}+\frac{n}{2}\delta_{\frac{n}{2}+1}\right)\\&+\left[\left(-\frac{3n}{16}+\frac{5}{8}\right)\delta_{\frac{n}{2}+2}+\left(-\frac{3n}{16}+2\times\frac{5}{8}\right)\delta_{\frac{n}{3}+3}+\cdots+\right.\\&\left.+\left(-\frac{3n}{16}+\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{5}{8}\right)\delta_n\right]+\frac{1}{8}[n\delta_{n+1}+(n-1)\delta_{n+2}+\cdots+\delta_{2n}]\end{aligned}$$

设$m_{\delta_2}=m_{\delta_3}=\cdots=m_{\delta_{2n}}=m$，则将上式转换成中误差，则有：

$$m_{\frac{n}{2}}=\pm\frac{\sqrt{n^3+3n}}{8}m \tag{10-8}$$

推导中引用了级数求和公式：

$$1^2+2^2+\cdots+i^2=\frac{1}{6}i(i+1)(2i+1)$$

$$\begin{aligned}&(a+b)^2+(a+2b)^2+(a+3b)^2+\cdots+(a+ib)^2\\=&\frac{b^2}{3}i^3+\left(ab+\frac{b^2}{2}\right)i^2+\left(a^2+ab+\frac{b^2}{6}\right)i\end{aligned}$$

（二）航带网最弱点处点位精度估算

航带网中点位坐标的误差，主要有两种因素形成的：

第一，空中导线误差的影响；

第二，量测误差的影响。

1.空中导线误差的影响

（1）平面部分

空中摄站点X方向的误差传播主要是由于每个像对内右方像片的定向误差$d\varphi$及dB_z。两者传播的规律都是属于非独立累积性的。

$d\varphi$的影响：

图10-2-2表示一个立体模型，其摄影站点 S_1、S_2 和地面点 A_1、A_2 的正确位置如图中的实线。当右方光束有一个偏角误差 $d\varphi$，则在地面上所产生的投影误差分别为 $\overline{A_1A_1'}$ 和 $\overline{A_2A_2'}$，

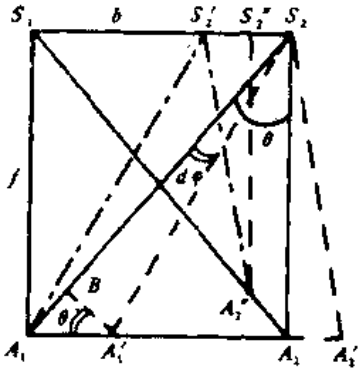


图 10-2-2

$$\overline{A_2A_2'} = f \cdot d\varphi$$

$$\overline{A_1A_1'} = A_1'B/\cos\theta = \frac{\overline{S_2A_1'}\,d\varphi}{\cos\theta} = \frac{f}{\cos^2\theta}d\varphi$$

$$= \frac{b^2+f^2}{f}d\varphi = \left(f+\frac{b^2}{f}\right)d\varphi$$

右方投影器 S_2 产生 $d\varphi$ 误差以后，经比例尺调整，使光线 S_2A_1' 仍然通过 A_1，则投影器 S_2 需移至 S_2' 处。因为产生 $d\varphi$ 误差以后，使铅垂光线 S_2A_2 产生偏斜，原来的铅垂光线 S_2A_2 改变为 $S_2'A_2''$，A_2'' 点与 A_2 点相比较在 X 方向引起的误差为 $\overline{S_2S_2''}$。

$$\overline{S_2S_2''} = \overline{A_1A_1'} - \overline{A_2A_2'} = \frac{b^2}{f}d\varphi$$

转化为中误差为

$$m_{X_\varphi} = \pm\frac{b^2}{f}m_\varphi \tag{10-9}$$

dB_z 的影响：

图10-2-3(a) 表示产生 dB_z 误差后的情况，图10-2-3(b)中 S_1、S_2''、A_1、A_2'' 表示经必须的比例尺准化后该模型中各点的相对位置。由图可知，经比例尺调整后，光线 $\overline{S_2'A_1'}$ 仍然

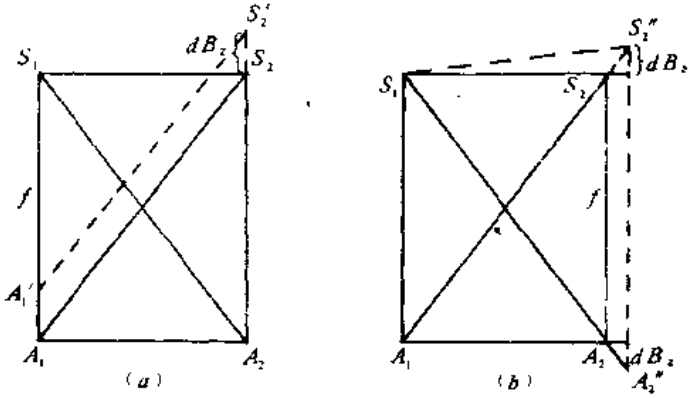


图 10-2-3

要通过 A_1 点，则投影器需移至 S_2'' 处，此处 A_2 移至 A_2'' 处，投影距离 f 产生了 $2dB_z$ 的变化，对下一个模型空中导线点 X 方向误差，将产生 $2dB_z$ 的影响，即

$$(2dB_z) = \frac{b}{f}$$

转化为中误差：

$$m_{X_{B_z}} = 2\frac{b}{f}m_{b_z} \tag{10-10}$$

因为dB_z和$d\varphi$对X的影响是非独立累积性的，由公式（10-8）可得对最弱点处的精度影响为：

$$m_{X\frac{n}{2}} = \pm\sqrt{\frac{n^3+3n}{64}}\cdot\sqrt{m_{X_{B_z}}^2 - m_{X_\varphi}^2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{n^3+3n}{64}}\cdot\sqrt{\frac{4b^2}{f^2}m_{b_z}^2+\frac{b^4}{f^2}m_\varphi^2}$$

由式（2-93）和表2-4可知

$$m_{B_z}^2=\frac{f^2}{2b^2}m_q^2,\qquad m_\varphi^2=\frac{f^2}{b^4}m_q^2$$

代入$m_{X\frac{n}{2}}$中，可得：

$$m_{X\frac{n}{2}}=\frac{1}{8}\sqrt{3n^3+9n}\,m_q \tag{10-11}$$

同样地，可以仿效对$d\varphi$、dB_z的分析，不难求得在一个单元模型中dB_y和$d\kappa$对Y坐标精度的影响：

$$m_{Y_{B_y}}=m_{B_y},\qquad m_{Y_\kappa}=b\cdot m_\kappa \tag{10-12}$$

因为dB_y对Y的影响是独立累积性的，而$d\kappa$对Y的影响是非独立累积性的，所以由公式（10-7）和（10-8）可得对最弱点处的精度影响为：

$$m_{Y\frac{n}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\sqrt{18n}\right)^2 m_{Y_{B_y}}^2+\left(\frac{1}{8}\sqrt{n^3+3n}\,m_{Y_\kappa}\right)^2}$$

同样地，将相应的m_{B_y}，和m_κ代入，可得到：

$$m_{Y\frac{n}{2}}=\sqrt{\left[\frac{1}{8}\sqrt{18n}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{f}{b}\right)^4+\frac{2}{3}+\left(\frac{f}{b}\right)^2}\right]^2 m_q^2+\left(\frac{1}{8}\sqrt{n^3+3n}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 m_q^2} \tag{10-13}$$

平面点位的中误差为：

$$m_{S\frac{n}{2}}=\pm\sqrt{m_{X\frac{n}{2}}^2+m_{Y\frac{n}{2}}^2}$$

$$=\pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{3}n^3+\left[23+18\frac{f^2}{b^2}+\frac{27}{2}\left(\frac{f}{b}\right)^4\right]nm_q} \tag{10-14}$$

（2）高程部分

在一个单元模型中dB_z和$d\varphi$对高程精度的影响

$$m_{Z_{B_z}}=m_{B_z},\qquad m_{Z_\varphi}=bm_\varphi \tag{10-15}$$

dB_z对高程的影响是独立累积性的，而$d\varphi$对高程的影响是非独立累积性的，由公式（10-7），（10-8）可得最弱点处高程的影响为：

$$m_{Z\frac{n}{2}}=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{8}\sqrt{n^3+3n}\cdot\frac{f}{b}m_q\right)^2+\left(\frac{1}{8}\sqrt{18n}\cdot\sqrt{\frac{f^2}{2b^2}}m_q\right)^2}$$

$$=\pm\frac{1}{8}\,\frac{f}{b}m_q\sqrt{n^3+12n} \tag{10-16}$$

2.量测误差的影响

设在每个模型点处立体量测的误差为d_i（对控制点而言 $i=1$、$2\cdots5$，对最弱点而言 $i=\frac{n}{2}$），那么，在$\frac{n}{2}b$、nb、$2nb$处的量测误差分别为

$$[d]_{\frac{n}{2}}=d_{\frac{n}{2}}$$

$$[d]_n=\frac{d_3+d_4}{2}-\frac{d_1+d_2}{2}$$

$$[d]_{2n}=\frac{d_5+d_6}{2}-\frac{d_1+d_2}{2}$$

将上式代入公式（10-6)就求得因量测误差引起的最弱点处的残余误差：

$$\Delta_{\frac{n}{2}}=d_{\frac{n}{2}}-\frac{3}{4}\left(\frac{d_3+d_4}{2}-\frac{d_1+d_2}{2}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{d_5+d_6}{2}-\frac{d_1+d_2}{2}\right)$$

$$=d_{\frac{n}{2}}+\frac{5}{16}(d_1+d_2)-\frac{3}{8}(d_3+d_4)+\frac{1}{16}(d_5+d_6)$$

转化为中误差

$$M_{\frac{n}{2}}=\pm\sqrt{\frac{95}{64}}m_d \tag{10-17}$$

对平面而言，假定

$$m_d=\sqrt{2}\,m_q$$

对高程而言，假定$m_p=m_q$

$$m_d=\frac{f}{b}m_q$$

将空中导线误差影响与量测误差影响综合起来，得到最后的精度估算公式（以地面的比例表示）：

$$M_S=\pm\frac{H}{8f}m_q\sqrt{\frac{11}{3}n^3+\left[23+18\left(\frac{f}{b}\right)^2+\frac{27}{2}\left(\frac{f}{b}\right)^4\right]n+190} \tag{10-18}$$

$$M_Z=\pm\frac{H}{8b}m_q\sqrt{n^3+12n+95} \tag{10-19}$$

对宽角摄影像片$\frac{f}{b}\approx1.4$，代入式（10-18）

$$M_S=\pm0.239\frac{H}{f}m_q\sqrt{n^3+30n+52} \tag{10-20}$$

对特宽角摄影像片$\frac{f}{b}\approx1$，代入式（10-18）

$$M_S=\pm0.239\frac{H}{f}m_q\sqrt{n^3+15n+52} \tag{10-21}$$

公式（10-18）、(10-19)便是单航带解析空中三角测量的平面和高程精度的估算公式。

如果待定点是取自相邻航带的平均值，则需将以上两式除以$\sqrt{2}$。

若H = 1400m，b = 65mm，m_q = ±0.025mm，f = 100mm平面控制点跨度$n_{平}$ = 10，高程控制点跨度$n_{高}$ = 5，由式（10-20）和式（10-19）计算结果为：

M_S = ±2.8m（规范要求丘陵地5m，1∶1万）

M_Z = ±1.1m（规范要求丘陵地1.0m，1∶1万）

二、航带法区域网平差的理论精度

最小二乘法平差时，除了计算出所求未知数而外，还可以求出其权倒数以及所推导出的某数值的权倒数。间接观测平差时的法方程式为：

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u} \tag{10-22}$$

其中 $$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}$$

法方程式的解为：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}$$

由广义误差传播定律，则得权倒数为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{xx} &= (\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P})^T = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1} \\ &= \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1}\end{aligned} \tag{10-23}$$

由此可知，区域网空中三角测量的理论精度，可以通过法方程式求逆的办法求得。

单位权的中误差为：

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{r}} \tag{10-24}$$

其中：r为多余观测的数目。

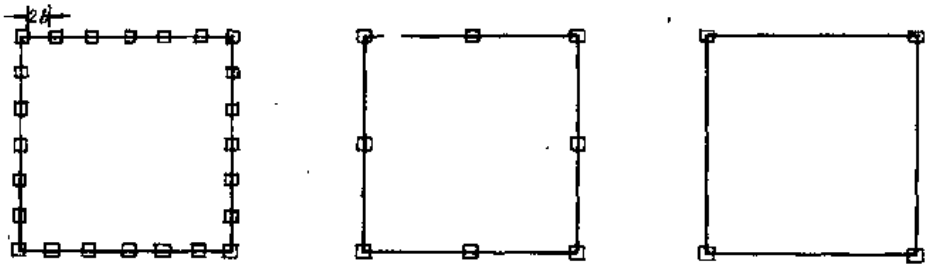
由式（10-23）和式（10-24），可以求得未知数的方差和协方差以及区域网中坐标理论精度的最大值σ_{max}和平均值$\sigma_{平}$，即：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ii}^2 &= Q_{ii}\cdot\sigma_0^2 \\ \sigma_{ij}^2 &= Q_{ij}\cdot\sigma_0^2 \\ \sigma_{max}^2 &= Q_{max}\cdot\sigma_0^2 \\ \sigma_{平}^2 &= \frac{Tr(Q)}{n}\cdot\sigma_0^2\end{aligned}\right\} \tag{10-25}$$

式中：$Tr(Q)$表示坐标未知数协因数矩阵Q的迹。

理论精度完全反映了偶然误差的影响，系统误差残余影响没有考虑，由式（10-23），（10-24）以及式（10-25）可以求得各种区域网平差的坐标的理论精度。这里要注意的一点是改化法方程式中未知参数应为待定点的坐标改正数，而不是航带或模型或像片的待定参数。

理论精度研究所采用的控制点布设，平面控制点的布设如图10-2-4所示，其中（a）情况属于密周边布点。航摄资料的航向重叠为60%，旁向重叠为20%。由图10-2-4所示的三种布点方案的航带法区域网的理论精度公式为：



（a）密周边布点　　（b）周边 8 个点　　（c）四角布点

图 10-2-4

方案（a）

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_S^2}=0.971-0.019S \tag{10-26a}$$

方案（b）

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_S^2}=1.235+0.037S \tag{10-26b}$$

方案（c）

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_S^2}=4.918+0.574S \tag{10-26c}$$

式中：S为全区的航带数；

σ_X^2为全区X坐标的平均方差；

σ_S^2为航带中模型点的点位方差。必须注意，它既不同于独立模型法平差的单位权方差$\sigma_{X_M}^2$、$\sigma_{Y_M}^2$、$\sigma_{Z_M}^2$，也不同于光束法平差之单位权方差σ_0^2。

从式（10-26a）可见，在密周边布点（方案（a））时，航带法区域网的理论精度比单航带的理论精度高。

高程的理论精度，按图10-2-5方案布点。

$$\frac{\sigma_Z^2}{\sigma_{Z_s}^2}=0.966+0.003i \tag{10-27}$$

式中：σ_Z^2为全区高程的平均方差；

$\sigma_{Z_s}^2$为航带中模型点高程方差；

i为高程控制点之间的跨度，以基线为单位。

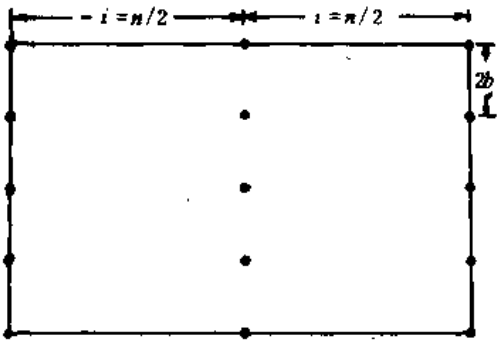


图 10-2-5

三、独立模型法和光束法区域网平差的理论精度

平面精度仍采用图10-2-4中三个布点方案：

方案（a）

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_{X_M}}=\frac{\sigma_Y}{\sigma_{Y_M}}=0.70+0.29\lg n_S \qquad \text{独立模型法} \qquad (10-28a)$$

$$\frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_0}=0.87 \qquad \text{光线束法} \qquad (10-28b)$$

方案（b）

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_{X_M}}=\frac{\sigma_Y}{\sigma_{Y_M}}=0.83+0.05n_S \qquad \text{独立模型法} \qquad (10-29a)$$

$$\frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_0}=0.28+0.15n_S \qquad \text{光线束法} \qquad (10-29b)$$

方案（c）

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_{X_M}}=\frac{\sigma_Y}{\sigma_{Y_M}}=0.47+0.25n_S \qquad \text{独立模型法} \qquad (10-30a)$$

$$\frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_0}=0.53n_S \qquad \text{光线束} \qquad (10-30b)$$

式中：σ_{X_M}为单个模型中点位中误差；

σ_0为象点坐标中误差；

n_S为航带数；

σ_X为独立模型法区域网平差的待定点的点位理论中误差；

σ_x为光束法区域网平差待定点点位理论中误差。

高程精度采用如图10-2-5的布点方案：

独立模型法区域网

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_Z}{\sigma_{Z_M}}&=0.34+0.22i\\ \frac{\sigma_{Z_{MAX}}}{\sigma_{Z_M}}&=0.27+0.31i\end{aligned}\right\} \qquad (10-31a)$$

光束法区域网

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_Z}{\sigma_0}&=0.93+0.19i\\ \frac{\sigma_{Z_{MAX}}}{\sigma_Z}&=1.4\sim1.5\end{aligned}\right\} \qquad (10-31b)$$

§10.3 理论精度分析导出的控制点分布规律

一、理论精度研究导出的主要结论

从理论精度的研究，可以得到区域网平差的精度分布规律，概括起来有以下几点：

（1）不论采用航带法、独立模型法，还是光束法平差，区域网空中三角测量的精度最弱点位于区域的四周，而不在区域的中央。图10-2-6中列出航带法区域。按正形二次多项式平差的方差比σ_X^2/σ_S^2值。从图中可见，区域四周的方差比值大，区域内部的方差比值较小，而且均匀，这就告诉我们，区域网空中三角测量的精度，区域内部精度较高，而且均匀，精度薄弱环节在区域的四周，根据这一点，平面控制点应当布设在区域的四周，这样才能起到控制精度的作用。

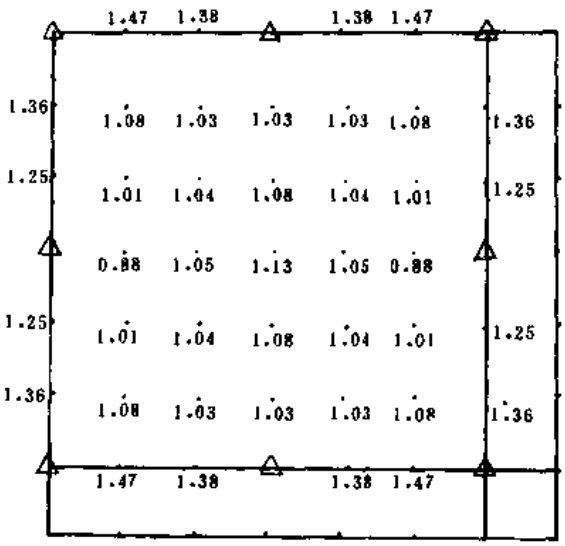


图 10-2-6

（2）密集周边布点时，区域网的理论精度，对航带法由式（10-26a）可知，小于一条航带的测点精度。对于独立模型法，由式（10-28a）可知，相当于一个单元模型的测点精度。由式（10-28b）可知，密集周边布点时，光束法区域网的理论精度不随区域大小而改变，它是个常数0.87。

（3）控制点稀疏布点时，区域网的理论精度随着区域的增大而降低。

由公式（10-26b）、（10-29a）、（10-29b）

航带法：

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_S^2}=1.24+0.037S$$

独立模型法：

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_{X_M}}=0.83+0.05n_S$$

光线束法：

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0}=0.28+0.15n_S$$

从以上公式可见，区域越大，相应的理论中误差亦越大。

（4）稀疏布点时，增大旁向重叠，可以提高区域网平面坐标的理论精度。

独立模型法：

$$\left.\begin{aligned} q_y\%=20\% \quad & \frac{\sigma_X}{\sigma_{X_M}}=0.83+0.05n_S \\ q_y\%=60\% \quad & \frac{\sigma_X}{\sigma_{X_M}}=0.58+0.03n_S \end{aligned}\right\} \tag{10-32}$$

光束法：

$$\left.\begin{aligned} q_y\% = 20\% \qquad & \frac{\sigma_x}{\sigma_0} = 0.28 + 0.15ns \\ q_y\% = 60\% \qquad & \frac{\sigma_x}{\sigma_0} = 0.33 + 0.07ns \end{aligned}\right\} \tag{10-33}$$

（5）区域网平差的高程理论精度决定于控制点间的跨度而与区域大小无关。

由公式（10-27）、（10-31*a*）、（10-31*b*）可以列出：

航带法：

$$\frac{\sigma_Z^2}{\sigma_S^2} = 0.97 + 0.003i$$

独立模型法

$$\frac{\sigma_Z}{\sigma_{Z_M}} = 0.34 + 0.22i$$

光线束法

$$\frac{\sigma_Z}{\sigma_0} = 0.93 + 0.19i$$

从以上公式可以看出，高程理论精度的方差比，决定于高程控制点间的跨度 i，只要高程控制点间的跨度相同，即使区域大小不一样，它们的高程理论精度是相等的。

以上提供的公式都是方差比值或根方差比值，其中不同方法的单位权中误差σ_S、σ_{x_M}、σ_0分别表示航带中模型点、单元模型中模型点、像点坐标的中误差，其数值大小彼此不等，因此不能简单地从公式表面表达来判定其方法的优劣。

从理论上讲，光线束法最符合最小二乘法原理，精度最好。因为这里平差中使用的观测值是真正的观测值，而其余两种方法在平差中的观测值均为真正观测值函数。在实际作业过程中，如果系统误差没有得到很好的补偿，光束法的优点往往反映不出来，而是三种方法的精度没有显著差异，这已在§8.1节中讨论过。

二、生产中控制点的布设原则

通过理论精度的分析和在第八、九章中的讨论，可以对实际作业中区域网平差的控制点布设提出下列原则：

（1）平面控制点应采用周边布点。高精度加密点位时宜采用 $i = 2b$的密周边布点，区域愈大愈有利。测图加密时不一定采用密周边布点，平面控制点间距视成图要求和区域大小而定。

（2）高程控制点应布成锁形。高程控制点沿旁向间距为$2b$，沿航向间距则根据要求的精度而定。在高精度加密平面点位时，仍需要布设适当的高程控制点，以保证模型的变形不致对平面坐标产生影响，在旁向重叠为20%时，每条航线两端必须各有一对高程控制点。

（3）当信噪比较大时（$\sigma_S/\sigma_n \geqslant 0.70$），光束法区域网平差时可利用附加参数的自检

校平差来补偿像片系统误差。此时地面控制应当有足够的强度，以保证避免附加参数与坐标未知数间的强相关。

（4）在区域网平差中可用来代替地面控制点的非摄影测量观测值主要是导航数据，如GPS定位系统提供的摄站坐标；只要记录齐全、无失锁现象，可以只在每个区域四角各布设一个平高控制点。

如果用地面测量观测值代替或加强区域网的控制点，平面观测值（距离、水平角、方位角）最好布在区域周边或四角，有关高程的相对观测值（如高差、高度角等）应平行于航带方向布设。

（5）为了提高区域网的可靠性，控制点可做成点组。其理由见下一章。

（6）在不增加控制点的情况下，通过扩大平差区域范围（上、下各增加一条航线，左、右各增加一个模型）可以提高精度和可靠性。

关于从提高可靠性出发对控制点布设的要求在下一章中讨论。作业中实际的布点要求，应根据相应的规范执行。

§10.4 解析空中三角测量的实际精度

前一节讨论了区域网空中三角测量的理论精度，理论精度反映了量测中的偶然误差的影响并与点位的分布有关。实际情况是复杂的，往往是偶然误差和残余系统误差的综合影响，实际精度与理论精度可能有一定的差异。因此有必要研究一下如何估计区域网空中三角测量的实际精度。

一、解析摄影测量的试验场

解析摄影测量的试验场是研究区域网空中三角测量精度的实验方法。在这个试验场中布设大量等间隔的地面控制点。这些点上均布有标志，并用高精度的大地测量方法测得到这些标志点的地面测量坐标，这些地面标志点在像片上均有相应的构像，避免了像点的辨认误差，因此这些地面控制点的地面测量坐标可以认为是真值，经区域网平差后得到这些点的摄影测量坐标，与相应的地面测量坐标之差可以看作“真差”，被用来衡量区域网空中三角测量的实际精度。

$$\left.\begin{aligned}\mu_X &= \sqrt{\frac{\Sigma (X_{控} - X_{摄})^2}{n_X}} \\ \mu_Y &= \sqrt{\frac{\Sigma (Y_{控} - Y_{摄})^2}{n_Y}} \\ \mu_Z &= \sqrt{\frac{\Sigma (Z_{控} - Z_{摄})^2}{n_Z}}\end{aligned}\right\} \tag{10-34}$$

式（10-34）是估计实际精度公式，这种估计是否与理论精度一致，对此我们在下面作一分析。

二、实际精度与理论精度的关系

设控制点地面测量坐标向量X、Y、Z没有误差，因此，摄影测量坐标的真误差向量为：

$$\Delta\hat{X}=\hat{X}-X,\quad \Delta\hat{Y}=\hat{Y}-Y,\ \Delta\hat{Z}=\hat{Z}-Z \tag{10-35}$$

式中：$\hat{X}$、$\hat{Y}$、$\hat{Z}$为摄测坐标向量。

摄影测量坐标的精度可按下式估计：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mu}_X^2&=\frac{\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{X}}{n_X},\quad \tilde{\mu}_Y^2=\frac{\Delta\hat{Y}^T\Delta\hat{Y}}{n_Y}\\ \tilde{\mu}_{X,Y}^2&=\frac{\tilde{\mu}_X^2+\tilde{\mu}_Y^2}{2},\quad \tilde{\mu}_Z^2=\frac{\Delta\hat{Z}^T\Delta\hat{Z}}{n_Z}\end{aligned}\right\} \tag{10-36}$$

其中：n_X、n_Y表示平面控制点的个数；

n_Z表示高程控制点的个数。

在H_0的假设下：

$$\begin{bmatrix}\Delta\hat{X}\\ \Delta\hat{Y}\end{bmatrix}\sim N(0,\sigma_0^2\cdot Q_{XX}),\ \Delta\hat{Z}\sim N(0,\sigma_0^2Q_{ZZ})$$

那么按式（10-36）求得的$\tilde{\mu}_X^2$、$\tilde{\mu}_Y^2$、$\tilde{\mu}_Z^2$是理论精度σ_X^2、σ_Y^2、σ_Z^2的无偏估计。证明如下：

由式（10-36）：

$$E(\tilde{\mu}_X^2)=E\left(\frac{\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{X}}{n_X}\right)=\frac{1}{n_X}E(\Delta\hat{X}_1^2+\Delta\hat{X}_2^2+\cdots+\Delta\hat{X}_n^2) \tag{10-37}$$

由H_0假设可知：

$$E(\Delta\hat{X})=0,\ D(\Delta\hat{X})=E(\Delta\hat{X})^2=\sigma_0^2Q_{XX} \tag{10-38}$$

将式（10-38）代入（10-37）中：

$$\begin{aligned}E(\tilde{\mu}_X^2)&=\frac{1}{n_X}\sigma_0^2\{(Q_{XX})_1+(Q_{XX})_2+\cdots+(Q_{XX})_{n_X}\}\\&=\frac{\sigma_0^2}{n_X}T_r(Q_{XX})\end{aligned}$$

由式（10-25）中第四个公式可知，上式可以写成：

$$E(\tilde{\mu}_X^2)=\sigma_X^2 \tag{10-39}$$

得证明。

同理可以证明

$$E(\tilde{\mu}_Z^2)=\sigma_Z^2 \tag{10-40}$$

公式（10-39）、（10-40）告诉我们，利用多余控制点的真误差$\Delta\hat{X}$、$\Delta\hat{Y}$、$\Delta\hat{Z}$，按公式（10-36）估算出摄影测量区域网加密的实际精度是理论精度的无偏估计，即说明了理论精度与实际精度的一致性。

如果$\Delta\hat{X}$、$\Delta\hat{Y}$、$\Delta\hat{Z}$为正态分布随机变量，则下式

$$\hat{\mu}^2_{X,Y}=\frac{(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)Q^{-1}_{XX}(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)^T}{2n_X} \tag{10-41}$$

$$\hat{\mu}^2_Z=\frac{\Delta\hat{Z}^TQ^{-1}_{ZZ}\Delta\hat{Z}}{n_Z} \tag{10-42}$$

是单位权方差的无偏估计，即

$$E(\hat{\mu}^2_{X,Y})=\sigma_0^2,\quad E(\hat{\mu}^2_Z)=(\sigma_0^2)_Z \tag{10-43}$$

证明如下，要证明$E(\hat{\mu}^2_{X,Y})=\sigma_0^2$，只要证明

$$E\{(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)Q^{-1}_{XX}(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)^T\}=2n_X\sigma_0^2$$

已知

$$(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)Q^{-1}_{XX}(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)^T$$
$$=T_r\{(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)^T(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)Q^{-1}_{XX}\}$$

那么

$$E\{(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)Q^{-1}_{XX}(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)^T\}$$
$$=T_r\{E((\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T)^T(\Delta\hat{X}^T\Delta\hat{Y}^T))Q^{-1}_{XX}\}$$

$$=T_r\left\{E\left[\begin{matrix}\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_1 & \Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 & \cdots\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_{n_X} & \Delta\hat{X}_1\Delta\hat{Y}_1 & \cdots\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{Y}_{n_Y}\\ \Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 & \Delta\hat{X}_2\Delta\hat{X}_2 & \cdots\Delta\hat{X}_2\Delta\hat{X}_{n_X} & \Delta\hat{X}_2\Delta\hat{Y}_1 & \cdots\Delta\hat{X}_2\Delta\hat{Y}_{n_Y}\\ \vdots & & & & \\ \Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_{n_X} & \Delta\hat{X}_2\Delta\hat{X}_{n_X} & \cdots\Delta\hat{X}_{n_X}\Delta\hat{X}_{n_X} & \Delta\hat{X}_{n_X}\Delta\hat{Y}_1 & \cdots\Delta\hat{X}_{n_X}\Delta\hat{Y}_{n_Y}\\ \vdots & & & & \\ \Delta\hat{X}_1\Delta\hat{Y}_{n_Y} & \Delta\hat{X}_2\Delta\hat{Y}_{n_Y} & \cdots\Delta\hat{X}_{n_X}\Delta\hat{Y}_{n_Y} & \Delta\hat{Y}_1\Delta\hat{Y}_{n_Y} & \cdots\Delta\hat{Y}_{n_Y}\Delta\hat{Y}_{n_Y}\end{matrix}\right]Q^{-1}_{XX}\right\}$$

$$=T_r\left\{\sigma_0^2\left[\begin{matrix}Q_{X_1X_1} & Q_{X_1X_2} & \cdots Q_{X_1X_{n_X}} & Q_{X_1Y_1} & \cdots Q_{X_1Y_{n_Y}}\\ Q_{X_1X_2} & Q_{X_2X_2} & \cdots Q_{X_2X_{n_X}} & Q_{X_2Y_1} & \cdots Q_{X_2Y_{n_Y}}\\ \vdots & & & & \\ Q_{X_{n_X}X_1} & Q_{X_{n_X}X_2} & \cdots Q_{X_{n_X}X_{nX}} & Q_{X_{n_X}Y_1} & \cdots Q_{X_{n_X}Yn_Y}\\ \vdots & & & & \\ Q_{Y_{n_Y}X_1} & Q_{Y_{n_Y}X_2} & \cdots Q_{Y_{n_Y}Xn_X} & Q_{Y_{n_Y}Y_1} & \cdots Q_{Y_{n_Y}Y_{n_Y}}\end{matrix}\right]Q^{-1}_{XX}\right\}$$

$$=2n_X\sigma_0^2$$

得证明。

以上证明告诉我们，当多余控制点较多时，用式（10-36）、（10-41）、（10-42）计算出的实际精度比较合理，而且接近理论精度。

三、解析空中三角测量目前能达到的精度

联邦德国阿克曼教授1983年在武汉测绘科技大学讲课时，提供各种连接点方式的区域网平差的单位权中误差σ_0数据，列在表10-4-1中。

表中的相关的影像误差是指用整区附加参数不能补偿的、从一片到邻片间有一定相关的影像误差。目前区域网平差的精度，在国外的平面精度为10～15μm。若带有附加参数，平面精度可达5μm，高程精度为$H/10000$。国内的最近试验结果也达到类似的精度。

区域网平差方法的精度　　表 10-4-1

	连接点的方式	量测仪器	区域网平差的方法	$\sigma_{X,Y}$（以像片比例尺计）	主要误差来源
1	人工刺点（例常的）	模拟仪器或坐标量测仪	独立模型法或光束法	15～40μm	转点误差
2	地面标志点	模拟仪器	独立模型法或光束法	8～12μm	仪器误差
3	地面标志点	精密坐标量测仪或解析测图仪	独立模型法（解析相对定向）	4～9μm	系统误差
4	人工刺点	精密坐标量测仪	光束法	6～10μm	转点误差、影像系统误差
5	地面标志	精密坐标量测仪	光束法	3～8μm	影像系统误差
6	人工刺点	精密坐标量测仪	光束法带附加参数	5～8μm	偶然和相关的影像误差及转点误差
7	地面标志点	精密坐标量测仪	光束法带附加参数	2～6μm	偶然和相关的影像误差

本章习题与思考题

1.如何估计解析空中三角测量的理论精度？
2.如何估计解析空中三角测量的实际精度？
3.单航带空中三角测量最弱点精度推导的基本思想。
4.单航带空中三角测量的控制点应当如何布设？为什么？
5.区域网空中三角测量的最弱点分布在哪里？区域网平差的控制点应当怎样布设？
6.怎样理解区域网平差的实际精度与理论精度的一致性。
7.若理论精度与实际精度之间出现了矛盾。应当作何解释？
8.什么叫解析摄影测量试验场？如何设置这种试验场？
9.如何设计供理论精度研究用的像片模拟数据？

第十一章　解析空中三角测量的可靠性分析与粗差探测

§11.1　概述

一、可靠性研究的必要性

自从电子计算机问世之后，无论在摄影测量学的解析空中三角测量，还是在大地测量网或工程测量网的平差中均取得了突飞猛进的成就。人们摆脱了长期来计算手段的束缚，对用现代量测仪器和手段获取的大量数据，进行严密的计算机解算，导出了各种平差问题的计算机解算程序。譬如，在解析空中三角测量中，我们已学习了航带法、独立模型法、光束法和带附加参数光束法为基础的联合平差系统。

但是，在测量数据获取过程中可能出现的粗差问题，在本书中尚未进行研究和讨论。实际经验告诉我们，在大量的观测数据中，尤其是在摄影测量观测值和地面控制点成果中，粗差往往是不可能完全避免的。而且，面对愈来愈大量的数据信息，用老的、人工的、经验的分析和挑出粗差的方法已愈来愈无能为力。以区域网平差而言，利用目前作业中的人工挑错方法，一个区域网平差至少要重复好几次，经过观测、计算、修测、再计算的反复过程方能完成。即使如此，往往还有未被发现的粗差参与了平差。就连著名的德国上施瓦本试验场数据，用当代的自动粗差定位方法，还找出了当年有经验的专家们未曾发现的粗差。

显然，如果粗差不能在平差中被发现和剔除，它势必影响平差结果的精度，使得人们所预期的理论精度无法实现。因此，在对精度进行分析研究的同时，还应当对平差系统发现和剔除粗差的能力和方法进行研究，称之为可靠性研究。

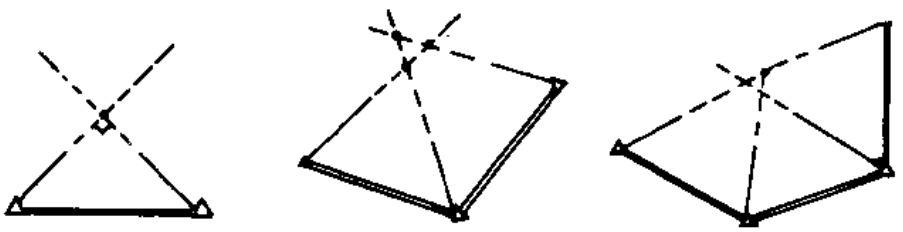
二、可靠性研究的主要任务

可靠性研究是建立在数理统计的假设检验基础上。经典的假设检验理论是1933年由莱曼和皮尔逊提出的。在测量界中，可靠性研究理论是由荷兰巴尔达（Baarda）教授在1967～1968年提出的。经过许多学者的继续研究，使理论更加成熟。

简要地讲，可靠性研究有两大主要任务。第一，从理论上研究平差系统发现和区分粗差（或系统误差）的能力（内部可靠性）以及不可发现和不可区分的粗差（或系统误差）对平差结果的影响（外部可靠性）。第二，从实践中寻求在平差过程中自动发现和剔除粗差的方法。前者用于测区的设计，后者用于实际平差计算程序中。它们对于高精度测量，包括解析空中三角测量是十分重要的。

可以用一个极简单的例子来理解可靠性的基本概念。图11-1-1表示前方交会，其中图11-1-1(a)仅含两个观测值，若其交会角为90°，交会精度是好的，但它却极不可靠。若任一观测值上出现了粗差均是无法发现的，所以可靠性极差。若增加一个观测值（图11-1-1(b)）

则单个粗差是可以通过出现的示误三角形加以发现，但仍不能肯定粗差在哪个观测值上，只有图11-1-1(*c*)，具有四个观测值时，单个粗差的位置才能正确地定出来。



(*a*) 粗差不可发现　　(*b*) 粗差可发现但不可定位　　(*c*) 粗差可定位

图 11-1-1

在本章中将简要地介绍巴尔达提出的可靠性理论（§11.2），并用该理论对解析空中三角测量进行可靠性分析（§11.3），最后介绍一些发现和剔除粗差的主要方法（§11.4）。

§11.2 可靠性研究的基本理论

一、问题的提出

具有摄影测量平差经验的实践者都知道，观测值中是否包含粗差事先并不知道，人们只能从平差后观测值的残差（或改正数）来进行推测。在经过最小二乘法平差后，观测值中包含的粗差往往只有一小部分反映到残差中，而相当大的一部分在平差中被吞没掉。而且观测值残差中，大的残差所对应的观测值未必就会有粗差。这里可以列举两个例子。

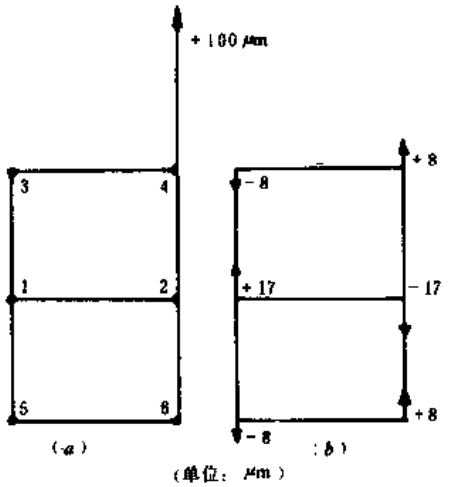


图 11-2-1

例 1　在六点相对定向时，假定点 4 的上下视差有100μm的粗差（见图11-2-1(a)），平差后残差的分配如图11-2-1(*b*) 所示。此时可以看出：

（1）在点 4 上的残差只有实际粗差的8%；

（2）最大的残差不在点 4 上，而在点 1 和点 2 上；

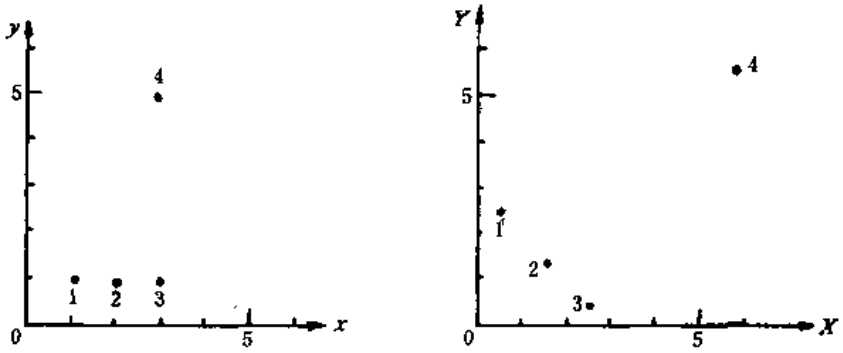
（3）如果已知观测中误差为10μm，该粗差不可能通过对残差的简单检验，即 $|V|$ 是否大于三倍中误差来发现的。

例 2　独立模型法平高分求中，平面变换为相似变换。假定观测值不含偶然误差，且仅有一个坐标粗差，图11-2-2(*a*) 为所需要变换的点，其中点 4 的 X 坐标的粗差为 +1.0. 图11-2-2(*b*)则为控制点。

表11-2-1为平差的原始数据与结果，v_x和v_y表示坐标的改正数。

结果再次表明：

（1）某个观测值的粗差只有一小部分（本例为11%）反映在其相应的改正数中；



（a）观测值分布　　（b）控制点分布

图 11-2-2　带坐标粗差（$\nabla x_4 = 1.0$）的相似变换

表 11-2-1

点　号	x	y	X	Y	v_X	v_Y
1	1	1	0.5	2.5	0.04	0.21
2	2	1	1.5	1.5	0.04	0
3	3	1	2.5	0.5	0.04	−0.21
4	3	5	5.5	5.5	−0.11	0

（2）具有最大改正数的观测值（本例中 1，3 点的 y 坐标）并不一定含有粗差。

因此，必须从理论上来解释最小二乘法平差的这些特点，并从中找出如何发现粗差和分析平差系统可靠性的方法。

二、观测值误差对平差改正数的影响

为了一般地描述观测值误差与平差改正数（亦称观测值残差）之间的关系，我们以一般间接观测值平差为出发点。其结论亦适用于条件平差等其它情况。

假设观测值 l_i（$i = 1, 2, \cdots n$）属于以 σ_0（单位权方差因子）、$Q = Q_{ll}$（权倒数矩阵）或 $P = P_{ll} = Q^{-1}$（权矩阵）所特征的随机模型的正态变量。

由线性化的误差方程式出发

$$l + v = F(\hat{x}) = F(x_0) + A\Delta\hat{x} \tag{11-1}$$

式中：l 为观测向量；

v 为改正数向量；

$F(\hat{x})$ 为观测值的函数模型，通常为非线性函数；

A 为线性化后的系数矩阵；

$\Delta\hat{x}$ 为未知数相对其近似值的改正数向量。

上式或写成：

$$v = A\Delta\hat{x} - f, \qquad f = l - F(x_0) \tag{11-2}$$

得到法方程式：

$$N\Delta\hat{x} = A^T P f, \quad N = A^T P A$$

于是有

$$\Delta\hat{x} = N^{-1} A^T P f \tag{11-3}$$

将其代入（11-2)式，可求出v向量：

$$v = A\Delta\hat{x} - f = (AN^{-1}A^T P - E)(l - F(x_0))$$

$$= -(Q_{ll} - AN^{-1}A^T)P_{ll}(l - F(x_0)) \tag{11-4}$$

根据误差传播定理，由（11-4）式可求得改正数向量的协因数矩阵（或称权系数矩阵）：

$$Q_{vv} = (Q_{ll} - AN^{-1}A^T)P_l Q_{ll}[(Q_{ll} - AN^{-1}A^T)P_{ll}]^T$$

$$= Q_{ll} - AN^{-1}A^T = Q_{ll} - Q_{\hat{l}\hat{l}} \tag{11-5}$$

其中$Q_{\hat{l}\hat{l}}$表示观测值平差值

$$\hat{l} = l + v$$

的协因数矩阵

将（11-5)式代入（11-4)式有

$$v = -Q_{vv}P_{ll}(l - F(x_0)) \tag{11-6}$$

若以未知数的真值代入求$F(x_0)$，则

$$f = (l - F(x_0)) = \varepsilon_l$$

为观测值的真误差向量，于是有下列观测值误差与改正数向量之间的一般关系式：

$$\boxed{v = -(Q_{vv}P_{ll})\varepsilon_l} \tag{11-7}$$

由（11-7）式出发，可详细地讨论一下观测值误差与改正数之间的关系：

（1）任一改正数v_i将受到所有观测值误差的影响和作用，即

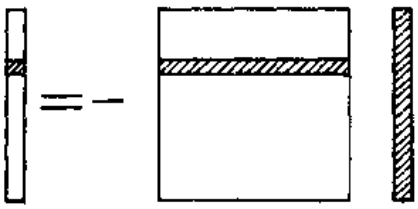


图 11-2-3(a)

$$v_i = -\sum_{j=1}^{n}[(Q_{vv}P_{ll})_{ij} \cdot \varepsilon_j] \tag{11-8}$$

用示意图表示为图11-2-3(a)。

（2）任一观测值误差ε_i将作用到所有的改正数上，即：

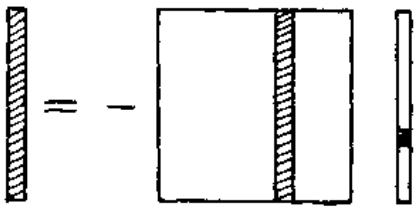


图 11-2-3(b)

$$v^* = -(Q_{vv}P_{ll})\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或

$$v_j = -(Q_{vv}P_{ll})_{ji}\varepsilon_i \tag{11-9}$$

用示意图表示为图11-2-3(b)。

即ε_i对v_j的影响取决于矩阵$Q_{vv}P_{ll}$的j行i列元素。

（3）某一观测值误差对其自身改正数的作用取决于其多余分量$r_i=(Q_{vv}P_{ll})_{ii}$，即

$$v_i^*=-(Q_{vv}P_{ll})_{ii}\cdot\varepsilon_i=-r_i\cdot\varepsilon_i \qquad (11-10)$$

用示意图表示为图11-2-3(c)。

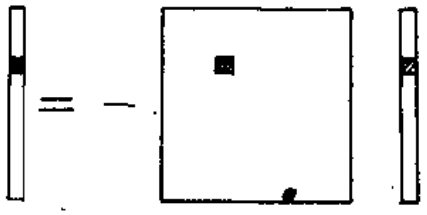


图 11-2-3(c)

为了更好地了解观测值误差对平差改正数的影响，下面简要地介绍一下$(Q_{vv}P_{ll})$矩阵的特性：

①矩阵$Q_{vv}P_{ll}$为幂等矩阵，即

$$(Q_{vv}P_{ll})^2=Q_{vv}P_{ll}$$

对于幂等矩阵，有下列特性：

——特征值为0或1；

——幂等矩阵的秩等于其迹；

——若A为幂等矩阵，则$E-A$亦为幂等矩阵（E为单位矩阵）；

——幂等对称矩阵至少是半正定的；

——若幂等对称矩阵主对角线元素的值为0或1时，则该列的其它元素必为0。

②矩阵$Q_{vv}P_{ll}$的迹等于平差的多余观测数r。

③矩阵$Q_{vv}P_{ll}$为降秩方阵。

④矩阵$Q_{vv}P_{ll}$的第i个对角线元素为第i个观测值的多余观测分量r_i，即

$$r_i=(Q_{vv}P_{ll})_{ii},\ \text{且}\ r=\sum_{i=1}^{n}r_i \qquad (11-11)$$

显然

$$0\leqslant r_i\leqslant 1 \qquad (11-12)$$

若$r_i=0$，则表示该观测值为必要观测；

若$r_i=1$，则表示该观测值未参加平差，纯系多余观测。

结合式(11-10)可知，观测值误差只能部分地反映在它自身的改正数中；若$(Q_{vv}P_{ll})_{ji}>(Q_{vv}P_{ll})_{ii}$，则观测值误差$\varepsilon_i$反映到$v_j$上将大于反映到它自身的改正数$v_i$上。这就从理论上解释了前面两个例子中出现的“怪”现象。

⑤可以利用$(Q_{vv}P_{ll})$矩阵计算改正数的中误差

$$\sigma_{v_i}^2=(Q_{vv})_{ii}\cdot\sigma_0^2=(Q_{vv}P_{ll}Q_{ll})\sigma_0^2=[Q_{vv}P_{ll}(Q_{ll}\sigma_0^2)]_{ii} \qquad (11-13)$$

当观测值不相关时，Q_{ll}和P_{ll}均为对角线矩阵，则

$$\sigma_{v_i}^2=(Q_{vv}P_{ll})_{ii}\sigma_{l_i}^2=r_i\cdot\sigma_{l_i}^2$$

或写成

$$\sigma_{v_i}=\pm\sqrt{r_i}\,\sigma_{l_i} \qquad (11-14)$$

此外，式（11-10）还可以用来对单个粗差的大小进行估计。若令$\nabla\hat{l}_i$表示第i个观测值粗差的估值，在只存在一个粗差的假设下，可得：

$$\nabla\hat{l}_i=-\frac{v_i}{r_i} \qquad (11-15)$$

而且该估值的精度$\sigma_{\nabla\hat{l}_i}$为：

$$\sigma_{\nabla\hat{l}} = \sigma_{l_i} / \sqrt{r_i} \tag{11-16}$$

例如，当r_i = 1cm，σ_{l_i} = ±1cm，r_i = 0.01时，可求得

$$\nabla\hat{l}_i = -1\text{cm}/0.01 = -100\text{cm}$$

$$\sigma_{\nabla\hat{l}_i} = \pm 1\text{cm}/\sqrt{0.01} = \pm 10\text{cm}$$

利用式（11-15)来估计粗差的大小具有实际意义。通常，如果对某一观测值估求的粗差接近某个整数时，其含粗差的可能性往往较大。

三、数据探测法的简单推导

从本节开头提出的问题和两个例子中看出，直接用改正数与单位权中误差来比较的传统方法是不可能正确地发现粗差的。那么，是否存在用严格的统计检验量来发现粗差呢？为此巴尔达首先提出了数据探测（Data Snooping)法。

这里可以用上面的关系式方便地导出数据探测法的公式来。

假定只存在一个粗差，且观测值的单位权方差σ_0^2已知，观测值互不相关，则可以利用式（11 14）来求每一个观测值的标准化残差：

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sqrt{r_i}\sigma_{l_i}} = \frac{v_i}{\sigma_0\sqrt{q_{ii}}} \tag{11-17}$$

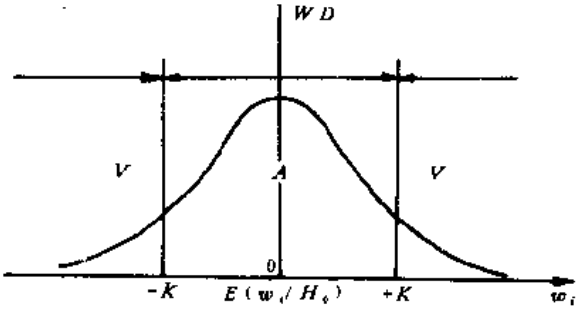
可以证明，若观测值l_i不存在粗差时，w_i将服从标准化正态分布，即

$$w_i \mid H_0 \sim N(0,1)$$

此时它将有熟知的标准化正态分布密度函数

$$f(w_i \mid H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{w_i^2}{2}\right\} \tag{11-18}$$

统计量标准化残差w_i可以进行统计检验。即将标准化残差与所选定的临界值K_α（α为信度）进行比较，见图11-2-4。



A为接受域　V为拒绝域

图 11-2-4

区间（$-K$，K）为接受域，当w_i落入该区间时，将接受H_0假设，即该观测值不含粗差。此时的置信水平为$1-\alpha$。巴尔达教授取α = 0.1%，K_α = 3.29。

区间（$-\infty$，$-K$］和［K，∞）为拒绝域，当$|w_i| \geqslant K_\alpha$时，我们就得拒绝H_0假设，该观测值将不能视为不含粗差的了。

例如某像对相对定向后$v_i = v_j$ = 5μm，但是其多余观测分量不等，r_i = 0.3，r_j = 0.09，已知σ_0 = ±5μm则可求出：

$$w_i = \frac{5}{\sqrt{0.3 \cdot 5}} = 1.83 < K_\alpha = 3.29$$

$$w_j = \frac{5}{\sqrt{0.09 \cdot 5}} = 3.33 > K_\alpha = 3.29$$

如果用常规方法，残差为观测值中误差大小时是不会怀疑存在粗差的，而且l_i与l_j的残差大小相同，也无法猜想它们其中一个正确，一个含有粗差。这就是数据探测法的作用。

四、内部可靠性的概念

观测值l_i若存在粗差$\nabla\tilde{l}_i$，必然引起检验量w_i产生相应的$\nabla\tilde{w}_i = \delta_i$，从而导致标准化残差$w_i$的分布函数产生相应的平移$\delta_i$。该平移量在统计学上称为非中心化参数$\delta_i$，其值可借助（11-10）式求出为：

$$\delta_i = \nabla\tilde{w}_i = \frac{-\nabla\tilde{v}_i}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_i}} = \frac{\nabla\tilde{l}_i}{\sigma_{l_i}} \cdot \sqrt{r_i} \tag{11-19}$$

图11-2-5表示在三种不同假设下w_i的分布函数：

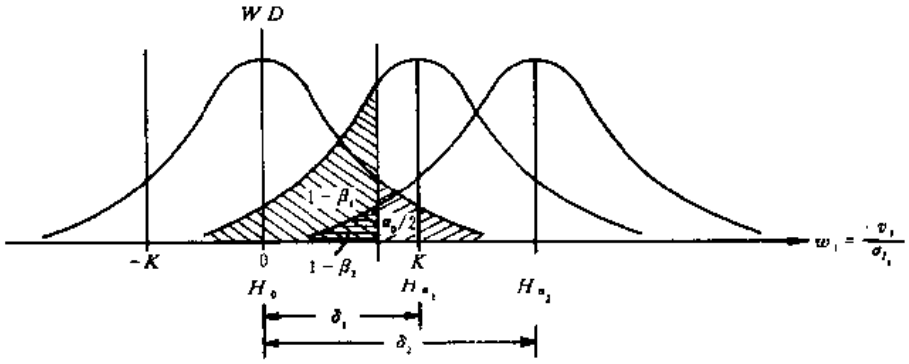


图 11-2-5

1）H_0（零假设）：观测值l_i无粗差，检验值w_i的期望值

$$E(w_i|H_0) = 0$$

（2）H_{a_1}（备选假设1）：观测值l_i会有一个数值为$\nabla_1\tilde{l}_i$的粗差，它导致$\nabla\tilde{w}_i = \delta_1$，所以$E(w_i|H_{a_1}) = \delta_1$

（3）H_{a_2}(备选假设2)：观测值l_i含有一个更大的粗差$\nabla_2\tilde{l}_i$，它导致$\nabla\tilde{w}_i = \delta_2$，所以$E(w_i|H_{a_2}) = \delta_2$。

前面已经讲过，当$|w_i| < K_\alpha$时，可以认为该观测值不含粗差。这种决策的把握（即概率）为

$$P(|w_i| < K_\alpha | H_0) = 1 - \alpha$$

如果$|w_i| > K_\alpha$，则怀疑它对应的观测值含有粗差。能以多大的把握说它包含大小为$\nabla_1\tilde{l}_i$或大小为$\nabla_2\tilde{l}_i$的粗差呢？统计学上称此为检验功效β_1和β_2，从图11-2-5可得出下列关系式：

$$\beta_P = \beta_P(\alpha_0,\ \delta_P) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{K_\alpha - \delta_P} e^{-u^2/2}du \qquad (11\text{-}20)$$

$$(P = 1,\ 2,\ \cdots)$$

可以查标准化正态分布表求出检验功效

$$\beta = 1 - \phi(K_\alpha - \delta) = \phi(\delta - K_\alpha) \qquad (11\text{-}20a)$$

式（11-20）表明，检验功效是信度 α 和非中心化参数的函数。粗差愈大，δ 愈大，则检验功效愈高，这是理所当然的。

在实际作业中，粗差的大小是未知的。对于作业员来说更重要的问题是：在给定的信度α_0和检验功效β_0下，每个观测值能够发现最小的粗差是多大？此值用$\nabla_0 l_i$表示，并称为可发现粗差的下界值。其值可由式（11-19）导出：

$$\boxed{\nabla_0 l_i = \sigma_{l_i} \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}} \qquad (11\text{-}21)$$

式中，r_i为该观测值的多余观测分量，σ_{l_i}为该观测值的精度，δ_0为非中心化参数。当α_0和β_0给定后，可查表用式（11-20）求出，譬如，当$\alpha_0 = 0.1\%$，$\beta_0 = 80\%$时，$\delta_0 = 4.13$，国际摄影测量界通常用此值。

由于可发现粗差的下界值是有量纲的，人们又定义了一个与精度无关且无量纲的可靠性尺度，称为可控性数值：

$$\boxed{\delta'_{0,i} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}} \qquad (11\text{-}22)$$

它与可发现粗差的下界值的关系为

$$\nabla_0 l_i = \delta'_{0,i} \cdot \sigma_{l_i}$$

可控性数值$\delta'_{0,i}$表示观测值l_i上的粗差至少为其中误差的$\delta'_{0,i}$倍，它才能在信度为α_0，检验功效为β_0的统计检验中被发现。

这就是巴尔达所提出的内部可靠性理论。这里的公式推导是针对单个粗差和不相关观测值这个特例进行的。广义的、更严密的公式和理论可参见《误差处理和可靠性理论》（李德仁著）一书。

五、外部可靠性的概念

内部可靠性描述平差系统发现观测值粗差的能力。但是，平差的目的是要精确而又可靠地求解所需要的未知数或未知数函数。从这些意义上讲，需要进一步研究不可发现的粗差对平差未知数或未知数函数的影响，巴尔达将它定义为外部可靠性，它表示平差系统对粗差的灵敏程度。

在本书中我们仅讨论不可发现的单个粗差对平差结果的影响，并仍假设观测值是互不相关的。对于单个不可发现的粗差$\nabla_0 l_i$，可直接写出它对平差未知数的影响向量：

$$\nabla_{0,i}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0\\0\\\nabla_0 l_i\\0\\0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{a}_i P_i\nabla_0 l_i \tag{11-23}$$

式中：a_i为误差方程式系数阵A的第i列向量。

定义下列影响向量长度作为外部可靠性尺度：

$$\overline{\delta_{0,i}}=|\nabla_{0,i}x|=\sqrt{(\nabla_{0,i}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}(\nabla_{0,i}\boldsymbol{x})}/\sigma_0 \tag{11-24}$$

将式（11-23）代入（11-24)中，并考虑列式（11-21），便得：

$$\overline{\delta_{0,i}}=\delta_0\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{Q}_{xx}\boldsymbol{a}_i P_i}{r_i}}$$

因为 $$\boldsymbol{Q}_{vv}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{xx}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$$

所以当P为对角线矩阵时，有

$$r_i=(\boldsymbol{Q}_{vv}\boldsymbol{P})_{ii}=1-\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{Q}_{xx}\boldsymbol{a}_i P_i$$

即 $$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{Q}_{xx}\boldsymbol{a}_i P_i=1-r_i$$

故最终得到

$$\boxed{\overline{\delta_{0,i}}=\delta_0\sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}}} \tag{11-25}$$

这便是单个不可发现的观测值粗差对平差未知数影响向量的长度，以σ_0为单位。

现在再讨论不可发现的粗差$\nabla_0 l_i$对平差未知数函数的影响。

设未知参数的任一函数为：

$$f=\boldsymbol{e}^T\hat{\boldsymbol{x}}$$

则$\nabla_0 l_i$对f的影响为：

$$\nabla_{0,i}f=\boldsymbol{e}^T\nabla_{0,i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{a}_i P_i\nabla_0 l_i$$

利用柯西——施瓦茨不等式

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|$$

设$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{a}$，则：

$$\nabla_{0,i}f\leqslant\sqrt{\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{e}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{a}P_i}\cdot\sigma_0\frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}$$

化简后即为

$$\boxed{\nabla_{0,i}f\leqslant\sigma_f\cdot\overline{\delta_{0,i}}} \tag{11-26}$$

这就是说，不可发现的粗差$\nabla_0 l_i$对平差未知数的函数f的影响不会超过该函数中误差的$\overline{\delta_{0,i}}$倍。

对比式（11-25）和（11-21），可以看出，内、外部可靠性的好坏均与多余观测分量r_i有密切的关系。而且，对内、外部可靠性的研究，只要得知设计矩阵A和权矩阵P即可，

它并不需要知道实际的观测值向量。因此，这项研究可在测区设计时进行。

*§11.3 解析空中三角测量的可靠性分析

本节讨论的范围是在解析空中三角测量平差中，单个观测值粗差的可发现性及不可发现的单个粗差对平差结果的影响。

研究的基本方法是根据在解析空中三角测量中常用的几何图形给定设计矩阵和权矩阵（一般取$P=E$），然后便可计算$Q_{vv}P$矩阵。从中可计算$\delta_{0,i}$和$\overline{\delta}_{0,i}$等内、外部可靠性参数。

$Q_{vv}P$矩阵可称为可靠性矩阵，就好像Q_{xx}矩阵被称为精度矩阵一样。在可靠性分析中最重要的一个参数是多余观测分量r_i，除了直接由$Q_{vv}P$矩阵中获得外，亦可有相应的技巧，即通过引入一个已知误差$\varepsilon_i=\nabla l_i$到l_i上，平差后。其改正数上亦将有一个相应的∇v_i，则r_i可按如下方法求出：

$$r_i=-\frac{\nabla v_i}{\nabla l_i} \tag{11-27}$$

这种方法的优点是可以利用任何已有的程序和灵活地对所需要的观测值进行计算。

一、基本摄影测量平差问题的内外部可靠性

这里讨论的基本摄影测量平差问题的内部可靠性包括空间后方交会、像片相对定向、单元模型置平、二维或三维相似变换等。研究的重点是可发现粗差的下界值是如何随着观测值的点数和点位的变化而变化。

（一）空间后方交会的内部可靠性

单像空间后方交会是根据中心透视成像原理，利用若干个物点空间坐标及其像点坐标来解求像片方位元素。若仅解求六个外方位元素时，至少需要不在一直线上的三个点。

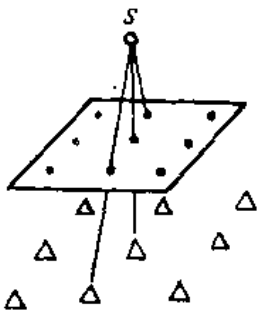


图 11-3-1

通常每张像片上分布有九个标准点（见图11-3-1）。利用共线方程线性化的误差方程式，在假设观测值等权不相关的情况下，可以导出每个标准位置上具有单个和两个点时的像点坐标观测值的多余观测分量，现将利用全片、半片和四分之一片进行空间后方交会时的多余观测分量示于图11-3 2中。

从图11-3-2中看出，除了只利用四分之一片的四个单点外，空间后方交会均具有较好的内部可靠性。

（二）相对定向的内外部可靠性

在像片对相对定向中仍以各点的上下视差为观测值．在相对定向中我们不可能发现位于该面上的像点坐标粗差，也不能区分粗差在左片或是在右片的y坐标上。下面以权矩阵为单位矩阵为前提，列出几种不同布点时的相对定向内部可靠性。

1．六点相对定向（图11-3-3）

对于六个标准点的相对定向，有条件方程式：

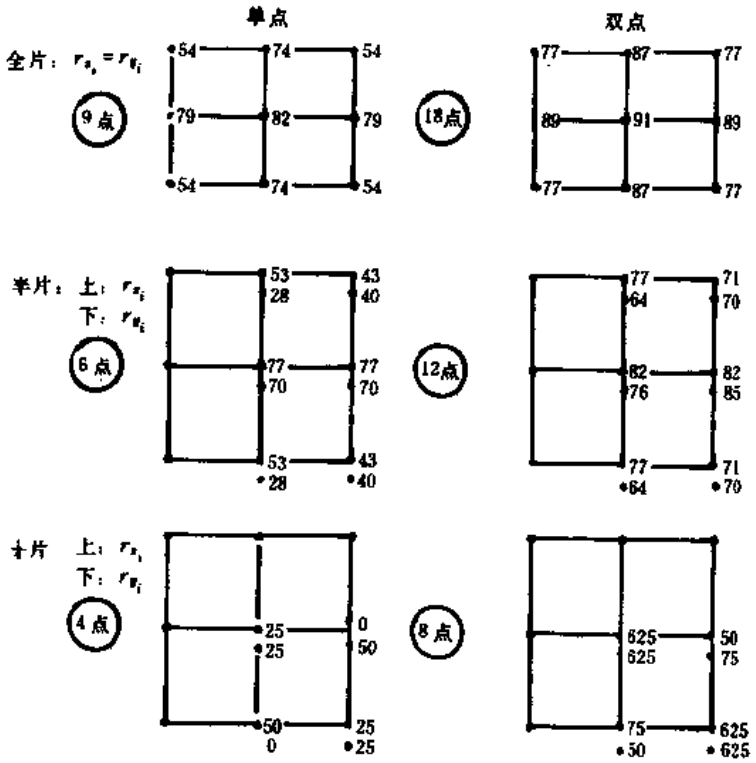


图 11-3-2

$$2q_1 - 2q_2 - q_3 + q_4 - q_5 + q_6 = W$$

或写成

$$U \cdot V = W$$

$$U = [\,2 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1\,]$$

$$V^T = [\,q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6\,]$$

法方程式系数矩阵

$$N = uQ_{ll}u^T = 12$$

联系数

$$K = N^{-1}W = \frac{W}{12}$$

$$Q_{vv}P = Q_{vv} = Q_{ll} - Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{ll}u^T N^{-1} u Q_{ll} = \frac{1}{12}u^T u$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

内部可靠性数值 $\delta_{0,i} = 7.1 \quad 7.1 \quad 14.3 \quad 14.3 \quad 14.3 \quad 14.3$

外部可靠性数值 $\overline{\delta_{0,i}} = 5.8 \quad 5.8 \quad 13.7 \quad 13.7 \quad 13.7 \quad 13.7$

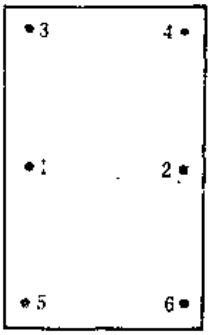


图 11-3-3

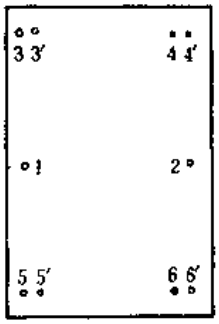


图 11-3-4

2. 十点相对定向（图11-3-4）

矩阵（$Q_{\cdot}P$）仿上述求出后，得到：

$$r_1 = r_2 = 0.40$$

$$r_3 = r_{3'} = r_4 = r_{4'} = r_5 = r_{5'} = r_6 = r_{6'} = 0.52$$

内部可靠性数值

$$\delta'_{0,1} = \delta'_{0,2} = 6.5$$

$$\delta'_{0,3} = \delta'_{0,3'} = \cdots = \delta'_{0,6} = \delta'_{0,6'} = 5.7$$

外部可靠性数值

$$\overline{\delta}_{0,1} = \overline{\delta}_{0,2} = 5.06$$

$$\overline{\delta}_{0,3} = \overline{\delta}_{0,3'} = \cdots = \overline{\delta}_{0,6} = \overline{\delta}_{0,6'} = 3.97$$

3. 十二点相对定向（图11-3-5）

多余观测分量

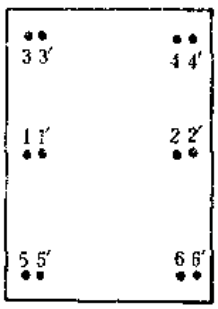


图 11-3-5

$$r_1 = r_{1'} = r_2 = r_{2'} = 0.67$$

$$r_3 = r_{3'} = \cdots = r_6 = r_{6'} = 0.54$$

内部可靠性数值

$$\delta'_{0,1} = \delta'_{0,1'} = \delta'_{0,2} = \delta'_{0,2'} = 5.05$$

$$\delta'_{0,3} = \delta'_{0,3'} = \cdots = \delta'_{0,6} = \delta'_{0,6'} = 5.62$$

外部可靠性数值

$$\overline{\delta}_{0,1} = \overline{\delta}_{0,1'} = \overline{\delta}_{0,2} = \overline{\delta}_{0,2'} = 2.90$$

$$\overline{\delta}_{0,3} = \overline{\delta}_{0,3'} = \cdots = \overline{\delta}_{0,6} = \overline{\delta}_{0,6'} = 3.81$$

图11-3-6列出了各种不同布点时相对定向的内部可靠性数值，点数从 6 个到18个，点位分布有均匀分布和点组分布方式。从图中可得出以下结论：

——只利用六个标准点进行相对定向时，内部可靠性极差；

——随着点数的增加，可靠性将得到改善。例如，利用在六个标准点上的双点将有效地改善其可靠性、角点的可发现粗差下界值由 $14.3\sigma_0$ 降为 $5.6\sigma_0$。必须指出，利用解析测图仪或任何带自动记录的坐标量测仪，对双点组进行量测并不会明显增加工作量。

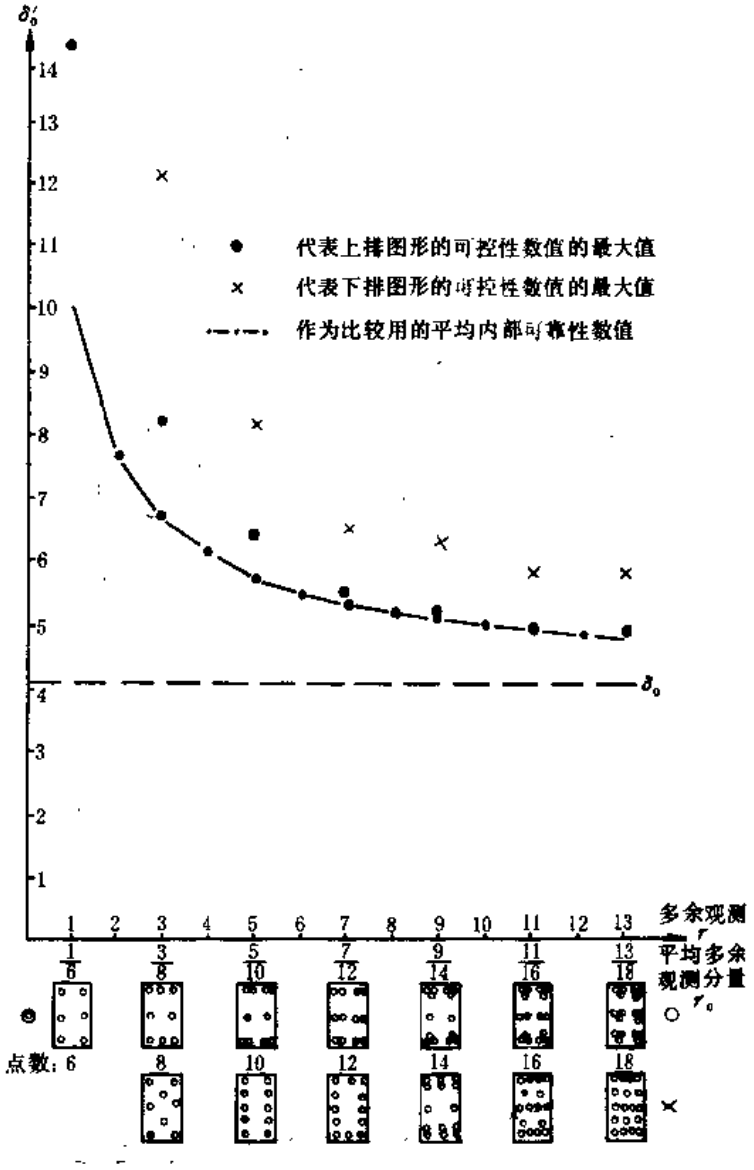


图 11-3-6

（三）单模型高程置平的内部可靠性

对于单模型高程置平，观测值为控制点高程与其摄测高程之差。平差的数学模型为：

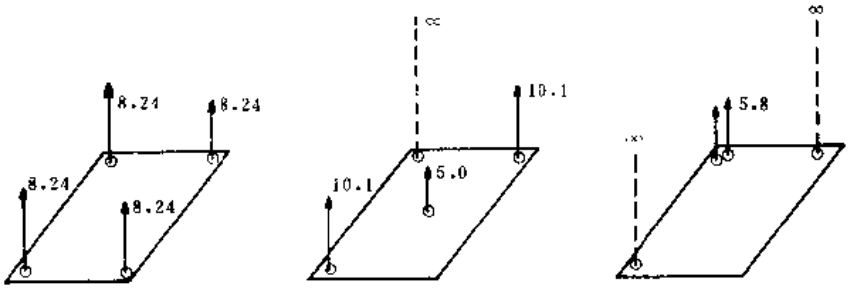
$$\Delta Z + v = Z_0 + Xd\phi + YdΩ \tag{11-28}$$

此时，我们只能发现ΔZ的粗差，而不可能判断是摄影测量高程，还是控制点高程的粗差。

研究表明，如果仅用四个点，必须加倍注意它们的点位（见图11-3-7），否则可能会有1或2个点的粗差不能被发现。

图11-3-8中比较了不同点数和点位时，模型高程置平的内部可靠性。从中看出：

（1）平均可靠性与极限可靠性之间差别不大，即内部可靠性是均匀的。



$Q_{vv}P=$

$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

A

0	0	0	0
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

B

0.5	0.5	0	0
0.5	0.5	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

C

图 11-3-7

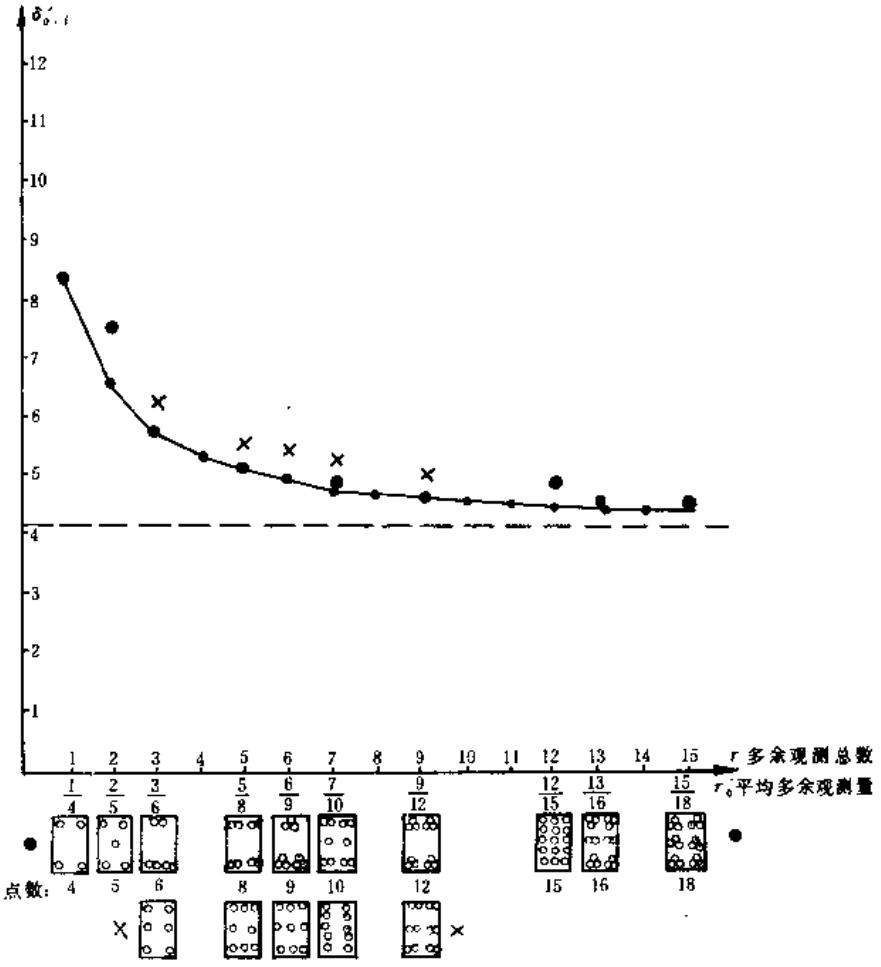


图 11-3 8

（2）增加点数可改善可靠性，如采用双点的点组形式，将有利于发现粗差。显然，在空中三角测量中，若采用双连接点进行相对定向，则意味着单模型定向中有双点可利用，这样做并不要求增加外业工作量，因而是简单易行而又可靠的。

（四）平面相似变换的内部可靠性

平面相似变换的数学模型为：

$$\left.\begin{aligned} X &= ax - by + x_0 \\ Y &= bx + ay + y_0 \end{aligned}\right\} \tag{11-29}$$

如果平面相似变换用于像片内定向，即实现仪器坐标系列像片坐标系的变换，则得到图11-3-9的内部可靠性数值$\delta_{\%}$。如果用于单模型的平面定向，则结果示于图11-3-10中。

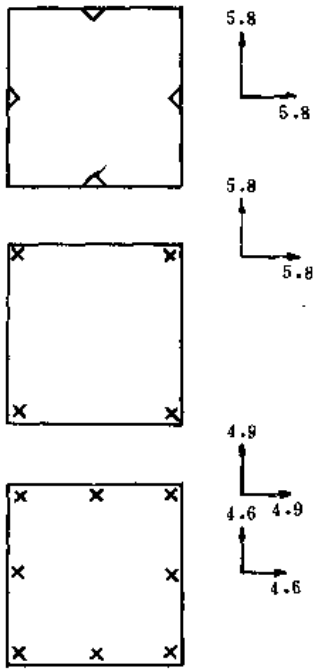


图 11-3-9

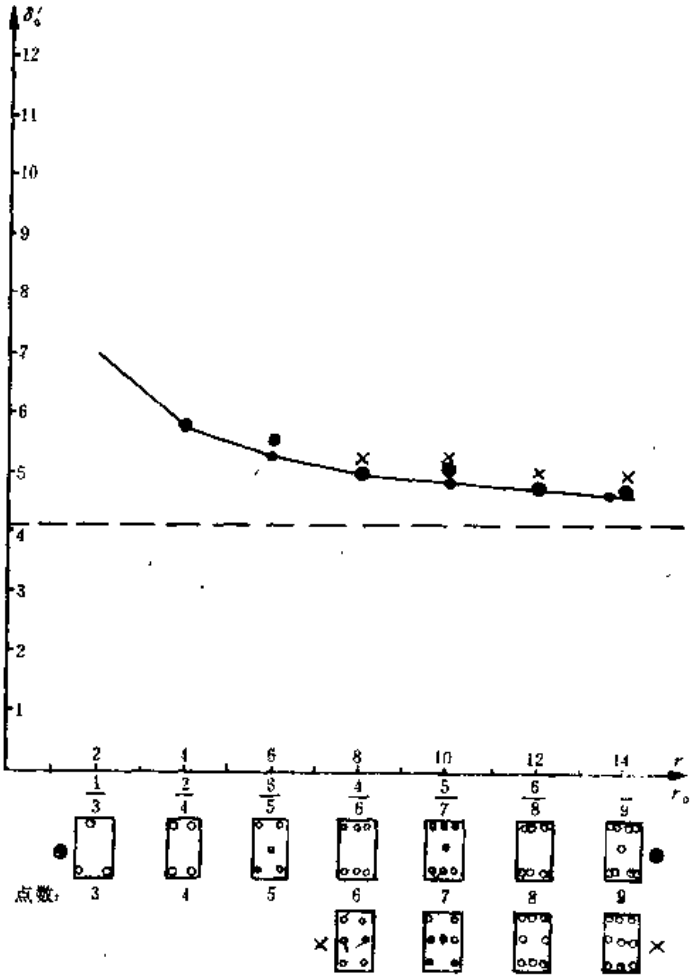


图 11-3-10

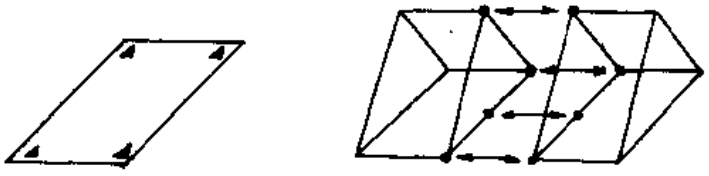
显然，若利用4个或更多位置合适的控制点进行平面相似变换，其可靠性是相当好的。正由于此，人们常说平面相似变换是一种稳健的方法，有较好的抗拒粗差的本领。

（五）三维相似变换的内部可靠性

摄影测量中的三维相似变换公式为：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \cdot R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \tag{11-30}$$

它主要用于模型的绝对定向（图11-3-11(*a*)）和模型连接（图11-3-11(*b*)），或构成独立模型法平差的基础方程。在前两种情况下，所用来变换的点大体位于一个平面内。经研究表明，它可以分解为平面相似变换和高程置平来研究。



（*a*）绝对定向　　（*b*）模型连接

图 11-3-11

这里仅侧重分析一下模型连接的可靠性。取图11-3-12中四种不同的连接点方案：

Ⅰ：三个连接点位于一直线上；

Ⅱ：中间连接点 *c* 的平面位置错开10％基线长度；

Ⅲ：中间连接点 *c* 与其它两点有10％航高的高差；

Ⅳ：Ⅱ和Ⅲ的组合。

对这四种情况，分别取单、双连接点求得其内部可靠性数值，列于表11-3-1中。

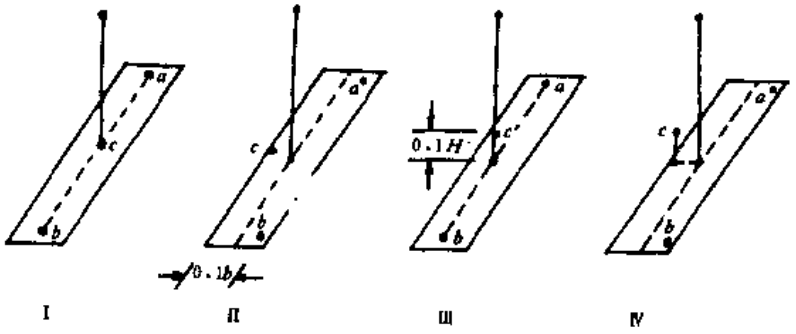


图 11-3-12

从试验结果可以得出：

（1）无论何种情况，投影中心的 *X* 坐标的可靠性最差。最好的情况下也只能发现 $22\sigma_0$ 的粗差。

（2）四种情况下，采用单连接点，内部可靠性也不好；而利用双点则可改善两侧点的可靠性。

（3）比较Ⅱ和Ⅲ知，连接点在 *X* 方向错开比在高程方向错开，其可靠性要好一些。

通过本节的讨论可知，经典的摄影测量作业布点方案往往具有较差的可靠性。考虑到现代自动记录技术和高精度作业的要求，完全可能和必要通过适当增加摄影测量观测值来确保成果的可靠性。

各种模型连接布点方案的内部可靠性

（可控性数值$\delta_{\Delta i}=\delta_{\Delta}/\sqrt{r_i}$）　　表 11-3-1

布点情况	点　位	单连接点			双连接点		
		ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
Ⅰ	投影中心	∞	6.8	6.8	∞	5.6	5.6
	c	5.0	4.9	4.9	4.5	4.5	4.5
	a、b	10.1	6.1	6.1	5.4	5.0	5.0
Ⅱ	投影中心	38.4	6.7	6.8	27.5	5.6	5.6
	c	5.1	4.9	4.9	4.5	4.5	4.5
	a、b	9.9	6.1	6.1	5.4	5.0	5.0
Ⅲ	投影中心	50.0	6.6	6.6	35.3	5.5	5.5
	c	4.9	4.8	4.8	4.5	4.5	4.5
	a、b	10.9	6.2	6.2	5.5	5.0	5.0
Ⅳ	投影中心	29.9	6.6	6.6	21.4	5.5	5.5
	c	4.9	4.9	4.9	4.5	4.5	4.5
	a、b	10.6	6.2	6.2	5.4	5.0	5.0

二、摄影测量区域网平差的可靠性

在现代摄影测量区域网平差中主要采用独立模型法和光束法，还有以光束法或独立模型法为基础，包括非摄影测量观测值的联合平差。

本书中仅就前两种方法的内、外部可靠性进行分析。这里的外部可靠性指不可发现的观测值粗差对地面坐标未知数的影响。

研究用模拟数据，对下列不同的布点方案进行。

对于独立模型法：

$E4$ 每个模型四个连接点的单区域

$E6$ 每个模型六个连接点的单区域

$E8$ 每个模型四个双连接点的单区域

$E12$ 每个模型六个双连接点的单区域

$D6$ 每个模型六个连接点的双区域（$q=60\%$）

$D12$ 每个模型六个双连接点的双区域（$q=60\%$）

对于光束法同样有方案$E9$，$E18$，$E25$和$D9$，$D18$，$D25$，分别代表每片9个点，9个双点和25个点。下面介绍主要的结果。

（一）独立模型法区域网平差的可靠性

独立模型法区域网平差的平均可靠性和最弱处的可靠性数值汇总于表11-3-2中。

可以取一个具体实例来了解平面平差和高程平差时内外可靠性的分布特点。图11-3-13和图11-3-14代表一个规则的$6\times12=72$个模型的区域的平面平差和高程平差的可靠性。每个模型有四对连接点，高程平差再增加两个投影中心。

独立模型法区域网的可靠性数值

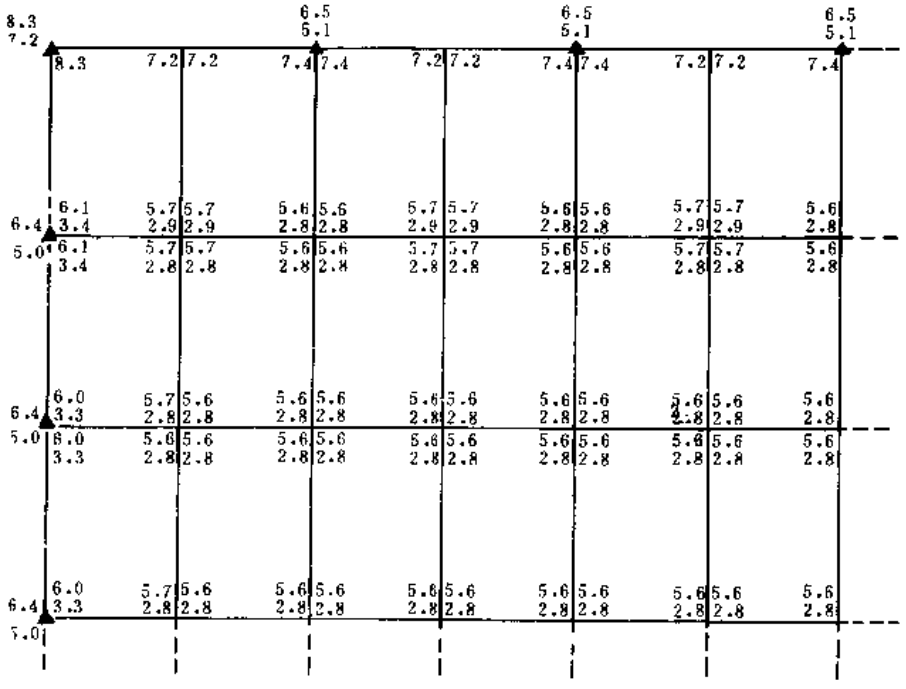
平均值（区域内部点）

表 11-3-2

区域	$q=20\%$ 平面		高程		区域	$q=60\%$ 平面	
	δ_0'	$\overline{\delta_0}$	δ_0'	$\overline{\delta_0}$		δ_0'	$\overline{\delta_0}$
$E4$	8.0	4.0	7.5	2.5	$D6$	5.7	2.3
$E6$	6.9	4.0	6.9	2.9	$D12$	4.9	2.0
$E8$	5.7	2.8	6.2	2.4			
$E12$	5.7	3.3	6.0	2.9			

极限值

区域	$q=20\%$ 平面 四角		平面 边沿		高程 四角		高程 边沿		区域	$q=60\%$ 平面 四角		平面 边沿	
	δ_0'	$\overline{\delta_0}$	δ_0'	$\overline{\delta_0}$	δ_0'	$\overline{\delta_0}$	δ_0'	$\overline{\delta_0}$		δ_0'	$\overline{\delta_0}$	δ_0'	$\overline{\delta_0}$
$E4$	21	15	18	13	12	5.6	12	5.4	$D6$	7.6	4.3	6.9	3.5
$E6$	12	8.0	11	7.7					$D12$	6.4	4.1	5.7	3.1
$E8$	7.8	5.5	7.8	5.5	7.3	4.5	7.3	4.5					
$E12$	7.3	5.2	7.2	5.1									



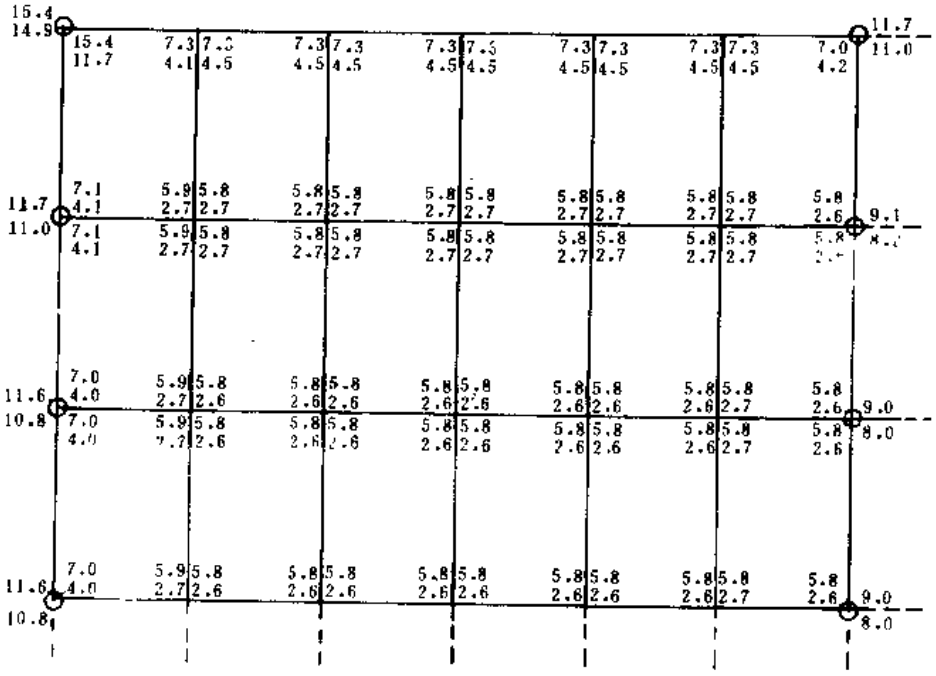
独立模型法平差时平面坐标（X和Y相同）的内部和外部可靠性（上排为δ_0'，下排为$\overline{\delta_0}$）

——6 × 12 = 72个独立模型区域

——采用密周边平面控制（$t=2b$）

——每个模型四对连接点

图 11-3-13



独立模型法平差时高程的内部和外部可靠性（上排为δ_{i}，下排为δ_{e}）

——6 ×12　72个独立模型的区域；

——三排高程控制点（ i =66）；

—每个模型四对连接点加两个投影中心点。

图 11-3-14

根据上列图、表结果可以看出：

（1）在区域内部，内、外部可靠性均是十分均匀，而且外部可靠性数值约为内部可靠性数值的一半。这意味着不可发现的粗差对平差坐标的影响明显地减弱了。

（2）区域边沿的内、外部可靠性明显地下降，而区域四角的可靠性最差。

（3）控制点坐标的可靠性一般均低于摄影测量观测值，尤其是不可发现的控制点坐标粗差对平差坐标未知数的影响要明显地增大。对于平面密周边布点，$\overline{\delta}$值仍达到5.0(边沿点）和7.2(四角点）。高程控制点在 i =66时 $\overline{\delta}$ 达到11（边沿点）和14.9（四角点）。因此要十分重视控制点的可靠性。

（4）独立模型法区域中投影中心的内、外部可靠性均较好。即使采用单连接点时 $\overline{\delta}$ 值一般均在2.5以下。

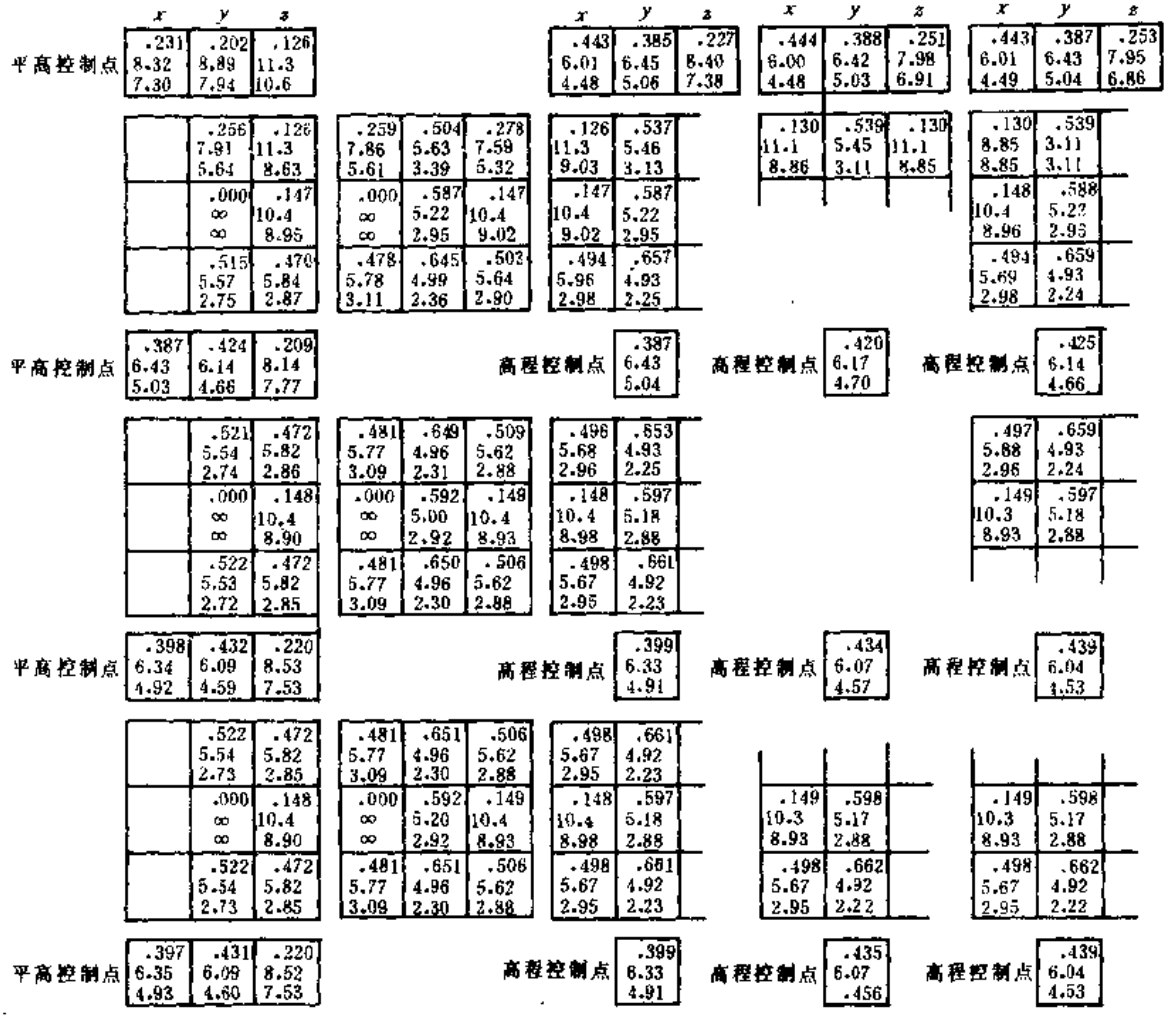
（5）采用双连接点时不仅能改善平均可靠性，而更重要的是改善最弱处的可靠性。

（二）光束法区域网平差的可靠性

光束法区域网平差的平均可靠性和最弱处的可靠性数值汇列于表11-3-3中。

下面再取一个具体区域列出光束法区域网平差时像点 x 和控制点的内、外部可靠性（图11 3-15）。

图、表中的结果表明，光束法区域网平差的可靠性总体上与独立模型法相似，即区域内部比周边好，控制点最差，此时需指出的是：



光束法区域网平差时像点X坐标和控制点的内外部可靠性（第一排$\overline{r_i}$，第二排$\overline{\delta}$，第三排$\overline{\delta_0}$）

——区域大小为 6 × 13 = 78片（20%旁向重叠）；

一一每片 2 × 9 = 18个连接点；

一一密集控制（$i = 2b$）。

图 11-3-15

（1）像片上不同部位像点的内、外部可靠性数值有较大的差异。它取决于该点在像片上位置和该点在像片上出现的次数。出现次数愈少，距离中心愈远，可靠性愈差。

（2）两度重叠点的x坐标是不可靠的，任何大小的粗差均是不能发现的。

控制点的可靠性还与控制点间距有直接关系。图11-3-16(a)和(b)分别列出不同平差区域中控制点坐标的可靠性与控制点间距的关系。图中列出的为最弱处的控制点外部可靠性数值。即使在密集控制（$i = 2b$）下，四角处的$\overline{\delta_0}$仍为8.5～9.1和7.2。随着间距的增大，$\overline{\delta_0}$值很快地增大。在$i = 12\ b$时，四角控制点的$\overline{\delta_0}$值分别达到50.8(X)和53.3(Y)（光束法平差）。由此可见，确保控制点的质量对区域网平差的可靠性是十分重要的。

光束法区域网平差的可靠性数值

光束法区域外部可靠性的平均值和极限值

平均值（区域内部点）　　表 11-3-3

区域	$q=20\%$		区域	$q=60\%$	
	δ_0'	$\overline{\delta_0}$		δ_0'	$\overline{\delta_0}$
E 9	6.9	4.0	D 9	5.7	2.3
E 18	5.7	3.3	D 18	4.9	2.0
E 25	6.3	4.4	D 25	5.0	2.4

极限值

区域	$q=20\%$				区域	$q=60\%$			
	四角		边沿			四角		边沿	
	δ_0'	$\overline{\delta_0}$	δ_0'	$\overline{\delta_1}$		δ_0'	$\overline{\delta_0}$	δ_0'	$\overline{\delta_0}$
E 9	15	10	15	10	D 9	10	5.7	9.7	4.0
E 18	12	9.3	12	9.3	D 18	7.0	3.0	6.3	3.0
E 25	12	9.8	12	9.8	D 25	5.0	2.7	5.0	2.7

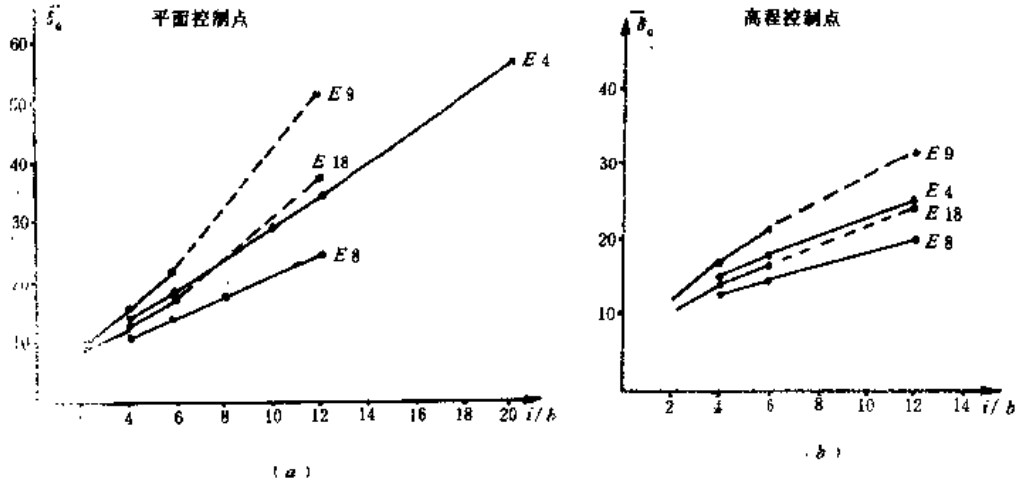


图 11-3 16

三、　　在分析导出的测区设计和控制网布点规则

以上对摄影测量平差系统的可靠性分析和所得到的认识，应当在测区设计时予以考虑。为了保证必要的可靠性，以下几点应引起测区设计人员的重视：

（1）应根据摄影测量加密的目的来设计参数。

当区域网平差用于高精度加密时，应采用60%旁向重叠的双区域或采用交叉飞行的双

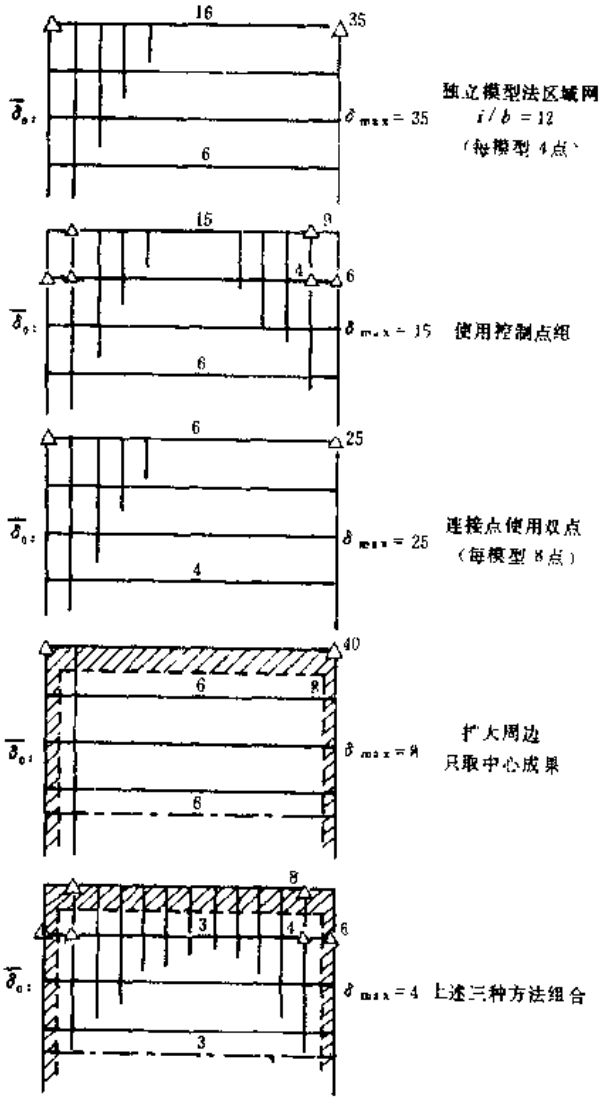


图 11-3-17

区域并同时用双连接点、布设地面标志等办法。如果加密仅供测图用，则可采用20%旁向重叠的单区域。

（2）为了改善区域边缘的可靠性和精度，航摄范围应适当大于测区范围。两端应多出1～2个像对，上下应多飞一条航带。如果测区分几个区域计算，则每个计算区域也应仿此扩大计算范围。

（3）如果用解析测图仪或自动记录坐标量测仪量测像点坐标时，建议观测双连接点。

（4）在区域四角，用控制点点组代替原来的单点可提高其可靠性。这些点的坐标最好独立测定。

图11 3-17形象地列出了用上述2、3、4三种措施后，外部可靠性的改善情况。如果三种方法组合使用，可使$\bar{\delta}_0$的最大角仅为4．从而使区域网平差有极好的可靠性。

最后必须指出，由于可靠性研究是建立在严格数理统计基础上的。如果用以往的经典的非严格的粗差检测方法，本节中叙述的可靠性指标是不可能达到的。因此，还必须在平差程序中引入相应的粗差检测程序。关于粗差检测的方法将在下一节中讨论。

§11.4 粗差的检测和定位

一、概述

在前几节中已经讨论了可靠性研究的基本理论和解析空中三角测量的内、外部可靠性。然而，可靠性研究的一个最现实的目的是如何在平差过程中自动地将观测值的粗差剔除出来。

粗差作为一种模型误差，可以从两个角度去理解它：

第一，含粗差的观测值可以看作是与其它同类观测值具有相同的方差，不同的期望的一个子样（期望平移模型）。

设l_i上含有粗差$\nabla\tilde{l}_i$，则有：

$$\left.\begin{aligned} l_i &\sim N(E(l)+\nabla\tilde{l}_i,\sigma^2) \\ l_j &\sim N(E(l),\ \sigma^2),\ j\neq i \end{aligned}\right\} \tag{11-31}$$

其分布见图11-4-1。它意味着将粗差视为函数模型的一部分看待。

基于这种理解，可以通过对平差结果严格地建立相应的统计检验量，来判断相应的观测值是否包含粗差，统称为统计检验法。

第二，含粗差的观测值可以看作是期望不变，而方差异常大的一个子样，即：

$$\left.\begin{aligned} l_i &\sim N(E(l),\sigma_{l_i}^2)\ (\sigma_{l_i}^2\gg\sigma^2) \\ l_j &\sim N(E(l),\ \ \sigma^2)\ (j\neq i) \end{aligned}\right\} \tag{11-32}$$

其分布见图11-4-2。它意味着将粗差视为随机模型的一部分（方差膨胀模型）。

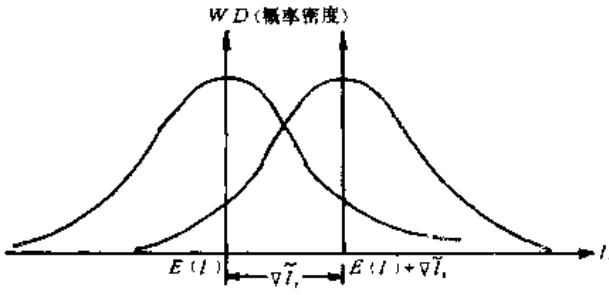


图 11-4-1

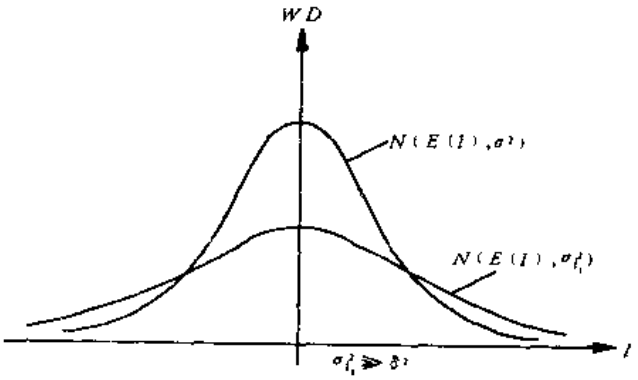


图 11-4-2

从此角度出发进行粗差探测，是根据逐次平差的结果来改变观测值的权，最终使含粗差观测值的权趋向于零，实现剔除粗差的目的。这类方法统称为选权迭代法。

下面分别对这两类方法加以简要介绍。

二、粗差检测的统计检验方法

在§11.2一节中已经讲述了巴尔达提出的著名的数据探测法。在已知单位权方差和观测值互不相关的情况下，标准化残差

$$w_i=\frac{|v_i|}{\sigma_0\sqrt{q_{ii}^{vv}}}=\frac{|v_i|}{\sigma_0\sqrt{r_i}} \tag{11-33}$$

应当服从标准正态分布，即

$$w_i\sim N(0,1)\ |H_0$$

当给定显著性水平α后可求出临界值K_α。若$w_i>K_\alpha$，则认为l_i可能包含粗差。

由于单位权方差通常是未知的，所以人们又提出在未知单位权方差时的t分布检验量：

$$t_i=\frac{|v_i|}{\sigma_i\sqrt{q_{ii}^{vv}}}\sim t_{n-u-1}\ |H_0 \tag{11-34}$$

其中

$$\sigma_i^2=\frac{1}{n-u-1}\left(v^TPv-\frac{P_iv_i^2}{r_i}\right) \tag{11-35}$$

还可以直接利用单位权方差估值

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{n-u}$$

获得Pope提出的τ变量

$$\tau_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}^{vv}}} \sim \tau(1, n-u-1) \mid H_0 \qquad (11\text{-}36)$$

t_a可查 t 分布表获得，τ_a可查Pope编制的 τ 分布表，亦可按Koch推[illegible]由 F 分布表求得：

$$\tau_a = \sqrt{\frac{(n-u)F_a}{(n-u-1)+F_a}} \qquad (11\text{-}37)$$

以上三个检验量均是针对仅可能存在单个粗差的情况。当存在多个粗差时的严格统计检验量不在此处讨论。

三、剔除粗差的选择权迭代法

利用统计检验法难以对多个粗差进行检测。此时从粗差可视为方差膨胀[illegible]，采用选择权迭代法来剔除粗差。

由于

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_i}^2} \qquad (11\text{-}38)$$

所以，含粗差观测值因其$\sigma_{l_i}^2$很大，故权应当很小。

基于这种思想，提出一种选择权迭代法。首先由于粗差未知，平差仍从惯常的最小二乘法出发，但在每次平差后，根据残差和其它参数，按所选择的权函数，计算每个观测值在下步迭代中的权。如果权函数选择合适，且粗差可以定位，则含粗差观测值的权必将愈来愈小，直至趋近于零。迭代中止时，相应观测值的残差直接代表了粗差的大小，而且平差结果也不受其影响。

下面介绍几种可利用的权函数。

（1）最小范数迭代法

或

$$\left.\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{|v_i| + c} \\ P_i &= \frac{1}{v_i^2 + c} \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}39)$$

（2）丹麦法

$$\left.\begin{aligned} &\text{第一次迭代} && P_i = 1 \\ &\text{第二、三次迭代} && P_i = \left(\exp\left[-\left(\frac{v_i}{\sigma}\right)^{4.4}\right]\right)^{0.05} \\ &\text{以后各次迭代} && P_i = \left(\exp\left[-\left(\frac{v_i}{\sigma}\right)^{3.0}\right]\right)^{0.05} \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}40)$$

（3）基于稳健（Rolust）估计的权函数

这种权函数应当满足稳健估计的基本条件，其形式很多。例如Huler提出的权函数为：

$$P(v)=\begin{cases}\text{常数}，\text{当}\ |v|\leqslant 2\sigma\\ \dfrac{1}{v}\ ，\text{当}\ |v|>2\sigma\end{cases}\tag{11-41}$$

（4）从验后方差分量估计原理导出的权函数

该方法由李德仁在1983年首先提出。对于仅含一组等精度观测值之平差，可采用下列权函数：

$$P_i=\begin{cases}1，& \text{当}T_i<F_{\alpha,1,r}\\ \dfrac{\hat{\sigma}_0^2\cdot r_i}{v_i^2}，& \text{当}T_i\geqslant F_{\alpha,1,r}\end{cases}\tag{11-42}$$

其中检验量T_i近似服从F分布，其值为

$$T_i=\frac{v_i^2}{\hat{\sigma}_0^2\cdot r_i}\tag{11-43}$$

且

$$r_i=(\boldsymbol{Q}_{vv}\boldsymbol{P})_{ii}$$

不论采用哪种形式，权函数的选择应满足以下条件：

（Ⅰ）含粗差观测值的权应逐步趋近于零，亦即其多余观测分量应逐步趋近于1。

（Ⅱ）不含粗差观测值的权应与该观测值的实际精度相一致。

（Ⅲ）权函数的选择应能保证迭代过程快速地收敛。

（Ⅳ）平差结果应等同于剔除粗差后的最小二乘法平差结果。

四、线性规划在粗差检测中的应用

前面介绍的粗差检测的统计检验方法都有一个共同点，那就是统计量或权函数的计算均需要残差v_i或单位权方差σ_0^2的值。在最小二乘法平差中，这两个数值都会受到粗差的影响，使它们的数值比应有值有了增加，使粗差定位的存伪错误增加，因为这个缘故，有些学者使用σ_0^2的先验值，结果又使粗差定位的去真错误增加。就这一点而论，受残差和单位权方差影响较小甚至不受影响的粗差检测方法就是$\Sigma|v|=\min$的平差方法。这种方法利用线性规划中单纯形算法求出最优解。

$\Sigma|v|=\min$法，以$\Sigma|v|=\min$为目标函数，在迭代计算过程中，使目标函数值有改善（即$\Sigma|v|$值比前一次计算结果减少）的原则选取新的调入变量和调出变量，由于这个缘故，使带有粗差的误差方程式自动地不参与未知数的解算，从而达到粗差定位的目的。

关于$\Sigma|v|=\min$原理，单纯形算法以及在粗差定位中的应用实例等细节，见参考文献[26]。

本章习题与思考题

1.为什么要研究摄影测量平差的可靠性？

2.可靠性研究的内容包括什么？什么是内部可靠性和外部可靠性？

3.用六个标准点进行相对定向，若第3点上出现84μm的粗差，则各点上下视差的残差将受到多大影响？为什么说当1、2点上残差大时，1，2点并不一定有差错？

4.利用下列结果进行平面相似变换时，请求出各点坐标的改正数（此时 $P=I$）。并从中分析当 $\sigma_0=\pm 0.05\mu m$ 时，是否存在粗差？如有则请指出粗差所在的位置。

点号	x 观测值	y 观测值	X 已知值	Y 已知值	v_X	v_Y
1	1	1	0.5	2.5		
2	2	1	1.5	1.5		
3	3	1	2.5	0.5		
4	3	5	5.5	5.5		

5.什么叫做可发现粗差的下界值和可控性数值？试求出习题3中各观测值的内部可靠性数值。

6.计算习题4中各观测值的内、外部可靠性数值。

7.当某一观测值的权趋于0和趋于无穷大时，其多余观测分量等于多少？它的内、外部可靠性数值又如何？

8.什么叫数据探测（Data Snooping）？试推导其表达式？并叙述用该法检测粗差的具体过程。

9.有哪些方法可用来改善区域网平差的可靠性呢？试举例说明之。

10.像片连接点和控制点应当如何配置才能确保区域网平差的可靠性？

11.如何计算多余观测分量 r_i？

12.叙述单个粗差检验的统计量，为何有好几种不同形式，请分析各个检验量的特点。

13.什么叫剔除粗差的选权迭代法？常用的权函数有哪几种形式？

14.试比较理论精度分析和可靠性分析的过程。

第十二章　在线空中三角测量

§ 12.1　概　　述

常规的解析空中三角测量把像点坐标的量测与平差计算分别在两个环节中完成，这种脱机方式处理的严重缺点是对量测的质量缺乏及时的了解。人们在量测过程中，特别是在处理大量数据中不可避免地会有粗差发生。这些粗差往往要在平差计算过程中才能发现，之后需要返工补测，再重新计算，这样的反复量测和计算很不经济，而且在大量数据中找出粗差并加以排除是相当困难。

在线空中三角测量利用电子计算机的高速运算和连机操作控制的优点，把像点坐标的量测与最小二乘平差计算放在同一个环节中进行，无需分成两个阶段。

在线空中三角测量系统是利用一台解析测图仪或与一台电子计算机联用的立体坐标量测仪，一边进行观测一边进行运算。计算过程中计算机对所获取数据具有粗差定位的功能，使系统的操作者可以经常地得到关于作业过程和质量的信息反馈，以便对量测过程作出必要的更改而与该系统作人机对话。

在线空中三角测量有两种基本方案。第一方案中联机的作用在于作数据获取时的质量控制，使其具有高度的可靠性，之后作脱机的整体平差。此时计算机控制所完成的计算是一种额外性质的比较廉价的预处理，并不需要使用所有的观测值和条件，也不需要那样的严密。此时可以把计算分段，分段可以尽可能地小，以便操作者实时地采取措施。

第二方案中联机的计算作为整体平差作业过程的一部分，使能在量测结束以后，马上就获得最后的成果。

在这两个方案中，第一个方案使用的较多，因为最后的整体平差是以脱机的效率较高，特别是在大区域网时更是如此。第二方案主要是在量测结束之后，马上就需要空中三角测量成果的条件下才使用，往往限于单航带的加密。

§ 12.2　在线空中三角测量的作业方案

在线空中三角测量往往是在解析测图仪上完成，在我国并不限于此，用一台微计算机控制一台以上的18×18立体坐标量测仪，同样也可以取得较好的效果。在仪器上完成标准点的量测以后，自动进行相对定向的解算，计算中具有粗差检测功能，随时将粗差点的信息反馈给操作员，以便及时采取措施进行必要的修测或补测。如果作业在解析测图仪上进行，在完成相对定向计算以后，根据所求得的相对定向元素，计算机实时地驱动像片盘以消除上下视差，这时我们在解析测图仪观测系统中见到一个没有上下视差的光学模型。

在线空中三角测量的相对定向通常采用带有连接条件的相对定向数学模型(见第五章)。

$$\left.\begin{aligned} Q &= -\frac{X_2Y_2}{Z_2}N'd\varphi-\left(Z_2+\frac{Y_2^2}{Z_2}\right)N'd\omega+N'X_2d\kappa+B_Xd\mu-\frac{Y_2}{Z_2}B_Xdv \\ P &= -\left(Z_2+\frac{X_2^2}{Z_2}\right)N'd\varphi-\frac{X_2Y_2}{Z_2}N'd\omega-N'Y_2d\kappa-\frac{X_2}{Z_2}B_Xdv+B_Xdm \end{aligned}\right\} \quad (5\ 31)$$

式中

$$Q = NY_1 - N'Y_2 - B_Y$$

$$P = NX_1 - N'X_2 - B_X$$

因为带连接条件的相对定向，包括模型连接的工作，完成一个像对的量测以后，右方像片无需移动到左方像片盘中，与前一个模型的公共点无需作业员辨认，计算机可以根据前一个模型记录下来的像点坐标，自动驱动像片盘到所需的同名点（在解析测图仪上作业才有可能），如此类推，可以完成一条航带的构网工作。如果输入控制点的地面测量坐标，就可以完成绝对定向和全区域的整体平差工作。

如果测图是按解析的方式，而不是在模拟测图仪上进行，则常规的在像片上选刺点、编点号等工作完全可以省去（见§3.2），这些常规生产流程中往往是引入粗差的主要来源之一。

虽然由解析测图仪可以提供每张像片的精确的外方位元素，然而由于模拟测图仪机械精度的限制而得不到充分的利用，所以必须借助于定向点来完成测图工作，这时选刺点的工作仍需进行，但是模型之间无需保证全部都是公共点。

在线空中三角测量的另一个特点是采用了序贯算法，这种算法保证了在剔除粗差点的过程中无需全部计算重新计算一遍，而是只要作与该点有关的计算。

§12.3 实时序贯算法

在线空中三角测量中，运算系统的响应时间是一项很主要的功效参数，快速的响应时间才能保证对粗差点的剔除和增加新点的要求作出实时的反映。而且当增、减观测值时，不需要对整个平差计算重新反复。实时序贯算法就是针对这种问题而产生的。

下面我们分两种情况来讨论实时序贯算法，一种情况是误差方程式增减以后，不引起未知参数个数的改变；另一种情况是平差系统中未知参数的个数随着误差方程式的增减而改变。

一、未知数个数不变的序贯算法

设有误差方程式为：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{l}$$

相应的法方程式为：

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PAX} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Pl}$$

当运算中存在增或减误差方程或情况时，上面公式中矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{P}$为以下形式

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{A}} \\ \ddot{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{l}} \\ \ddot{\boldsymbol{l}} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{P}} & \\ & \ddot{\boldsymbol{P}} \end{bmatrix} \quad (12\text{-}1)$$

式中字母带“·”者表示原始误差方程式内容，字母带“··”者表示增或减一个误差方程式引起的内容。

考虑到式（12-1），相应的法方程式的系数矩阵和常数项矩阵为：

$$N = \dot{N} + \ddot{N}, \quad L = \dot{l} + \ddot{l} \tag{12-2}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{N} &= \dot{A}^T \dot{P} \dot{A}, \quad \ddot{N} = \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{A} \\ \dot{L} &= \dot{A}^T \dot{P} \dot{l}, \quad \ddot{L} = \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{l} \end{aligned}\right\} \tag{12-3}$$

法方程式系数矩阵的逆阵和解的形式如下：

$$N^{-1} = \dot{N}^{-1} \mp \Delta N, \quad X = \dot{X} \pm \Delta X \tag{12-4}$$

式中ΔN由矩阵反演公式可知：

$$\left.\begin{aligned} \Delta N &= \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P}^{-1} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} \ddot{A} \dot{N}^{-1} \\ \dot{X} &= \dot{N}^{-1} \dot{L} \\ \Delta X &= \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} (\ddot{l} - \ddot{A} \dot{X}) \end{aligned}\right\} \tag{12-5}$$

上式中第三式可以由下式推导出来：

$$\begin{aligned} X &= N^{-1} L = N^{-1} (\dot{L} + \ddot{L}) = N^{-1} (\dot{A}^T \dot{P} \dot{l} + \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{l}) \\ &= [\dot{N}^{-1} \mp \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P}^{-1} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} \ddot{A} \dot{N}^{-1}] \dot{A}^T \dot{P} \dot{l} + (\dot{N} + \ddot{N})^{-1} \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{l} \\ &= \dot{N}^{-1} \dot{A}^T \dot{P} \dot{l} \mp \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P}^{-1} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} \ddot{A} \dot{N}^{-1} \dot{A}^T \dot{P} \dot{l} + (\dot{N} + \ddot{N})^{-1} \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{l} \\ &= \dot{X} - \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P}^{-1} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} \ddot{A} \dot{N}^{-1} \dot{A}^T \dot{P} \dot{l} + (\dot{N} + \ddot{N})^{-1} \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{l} \end{aligned} \tag{12-6}$$

上式中

$$\begin{aligned} (\dot{N} \pm \ddot{N})^{-1} \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{l} &= (\dot{N} \pm \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{A})^{-1} \ddot{A}^T \ddot{P} \ddot{l} \\ &= \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P}^{-1} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} \ddot{l} \end{aligned} \tag{12-6a}$$

把式（12-6a）代入式（12-6）中，得

$$\begin{aligned} X &= \dot{X} \mp \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P}^{-1} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} \ddot{A} \dot{X} \\ &\quad + \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} \ddot{l} \\ X &= \dot{X} \pm \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T (\ddot{P} \pm \ddot{A} \dot{N}^{-1} \ddot{A}^T)^{-1} (\ddot{l} - \ddot{A} \dot{X}) \end{aligned}$$

得证明。

由式（12-2）~（12-5）可见，$\dot{N}$、$\dot{A}^T \dot{P} \dot{l}$在前次的计算中已经存在，在增减一个观测方程式之后，无需重新计算，只需计算与新点有关的$\ddot{A}$，$\ddot{l}$即可。式中“±”或“∓”的上面符号表示平差系统中增加一个误差方程式，下面符号表示减少一个误差方程式。这种适时算法适用于解算未知参数不随点数增减而改变的情况，譬如相对定向元素的计算．像片外方位元素的计算等。如果平差系统的未知参数随着误差方程式的增减而变化时，应采用以下实时算法。

二、未知数个数变化的序贯算法

原误差方程式：

$$-V_f = A_f X + e_f X_f \qquad - l_f \tag{12-7}$$

增减一个误差方程式：

$$-V_g = A_g X \qquad + a_g X_g - l_g \tag{12-7a}$$

相应的法方程式为：

$$\begin{bmatrix} A_f^T P_f A_f + A_g^T P_g A_g & A_f^T P_f a_f & A_g^T P_g a_g \\ a_f^T P_f A_f & a_f^T P_f a_f & \cdot \\ a_g^T P_g A_g & \cdot & a_g^T P_g a_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_f \\ X_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_f l_f + A_g^T P_g l_g \\ a_f^T P_f l_f \\ a_g^T P_g l_g \end{bmatrix} \tag{12-8}$$

将上式写成以下的形式：

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12}^T & N_{22} & \cdot \\ N_{13}^T & \cdot & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_f \\ X_{g1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h_f \\ h_g \end{bmatrix} \tag{12-9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} N_{11} &= A_f^T P_f A_f \pm \boxed{A_g^T P_g A_g} \\ N_{13} &= \boxed{A_g^T P_g a_g} \\ h &= A_f^T P_f l_f \pm \boxed{A_g^T P_g l_g} \\ h_g &= \boxed{a_g^T P_g l_g} \end{aligned}\right\} \tag{12-10}$$

$$\left.\begin{aligned} N_{12} &= A_f^T P_f a_f \\ N_{22} &= a_f^T P_f a_f \\ h_f &= a_f^T P_f l_f \end{aligned}\right\} \tag{12-11}$$

式中各矩阵带有 f 下标者表示未增减点以前的内容，带有 g 下标者表示与增减点有关的内容，如式（12-10）中□里的内容。

法方程式（12-9）中消去坐标改正数未知矢量 X_f 以后的改化法方程式为：

$$\begin{bmatrix} N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{12}^T & N_{13} \\ N_{13}^T & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h - N_{12} N_{22}^{-1} h_f \\ h_g \end{bmatrix} \tag{12-12}$$

或写成

$$\begin{bmatrix} \dot{N} & \overline{N} \\ \overline{N}^T & \ddot{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{h} \\ h_g \end{bmatrix} \tag{12-12a}$$

假设

$$\begin{bmatrix} \dot{N} & \overline{N} \\ \overline{N}^T & \ddot{N} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & G \\ G^T & H \end{bmatrix} \tag{12-13}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= \underset{f,g}{\dot{N}^{-1}} + \underset{g}{\dot{N}^{-1}} \underset{g}{\overline{N}} (\underset{g}{\ddot{N}} - \overline{N}^T \dot{N}^{-1} \overline{N})^{-1} \overline{N}^T \dot{N}^{-1} \\ G &= -E \overline{N} \ddot{N}^{-1} \\ H &= \ddot{N}^{-1} - \ddot{N}^{-1} \overline{N}^T G \end{aligned}\right\} \tag{12-14}$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{N}^{-1} &= (N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{12}^T)^{-1} \\ &= \underset{f,g}{N_{11}^{-1}} + \underset{f}{N_{11}^{-1}} \underset{f}{N_{12}} (\underset{f}{N_{22}} - N_{12}^T N_{11}^{-T} N_{12})^{-1} N_{12}^T N_{11}^{-1} \end{aligned}$$

$$N_{11}^{-1} = (N_f \pm A_g^T P_g A_g)^{-1} = N_f^{-1} \mp \Delta N \tag{12-15}$$

$$N_{11}^{1}=(N_f \pm A_g^T P_g A_g)^{-1}=N_f^{-1}\mp \Delta N \tag{12-15}$$

上式中ΔN可按公式（12-5）中第一式解求。

$$h=(A_f^T P_f l_f \pm A_g^T P_g l_g)-N_{12}N_{22}^{-1}h_f \tag{12-16}$$

（N_{12}：f g；N_{22}^{-1}：f f）

$$h_g=a_g^T P_g l_g$$

最后按下式：

$$\begin{bmatrix} X \\ X_g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & H \\ G^T & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ h_g \end{bmatrix} \tag{12-17}$$

求得最后结果。

从式（12-8）至（12-17）便是第二种情况的实时序贯算法。

*§ 12.4 吉文斯(Givens)变换解法

吉文斯（Givens）变换属于正交变换的一种方法，这种变换方法的求解具有以下三个特点：

（1）无需列出法方程式就可以求得最小二乘法的解；

（2）无需从误差方程式逐点计算残差，就可以求得残差的平方和；

（3）当平差系统的误差方程式有增减时，很容易实现实时运算。

一、一般的正交变换

常规的由法方程式求解的缺点：

（1）组成法方程式的各矩阵时，可能导致严重的信息损失；

（2）法方程式系数矩阵$A^T A$的状态数是矩阵A的状态数的平方，如果误差方程的系数矩阵A的状态已经不佳时，法方程式求解的精度必将更差；

（3）矩阵A的稀疏性不一定能保证矩阵$A^T A$也将是比较稀疏的。如果A矩阵中有一个满行时，则$A^T A$就是满阵。

若利用正交化的办法可以直接从误差方程式进行求解，这样就可以改善求解的稳定性。

设一个$m \times n$阶矩阵A（$m > n$），存在一个规格化的正交矩阵Q，使

$$\underset{m\cdot m}{Q}\cdot\underset{m\cdot n}{A}=\underset{m\cdot n}{\tilde{R}}=\begin{bmatrix} \underset{n\cdot n}{R} \\ \hline \underset{(m-n)\cdot n}{O} \end{bmatrix} \tag{12-18}$$

$\underset{n\cdot n}{R}$为上三角矩阵。

$$\tilde{R}^T\tilde{R}=[R^T \quad O]\begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}=R^T R \tag{12-19}$$

$$\widetilde{R}^T\widetilde{R}=A^TQ^TQA=A^TA=R^TR \tag{12-19a}$$

我们对误差方程式

$$v=Ax-e\ ,\quad P=E$$

进行正交变换，则有：

$$Qv=QAx-Ql \tag{12-20}$$

令

$$c=Ql$$

上式变为

$$Qv=QAx-c \tag{12-21}$$

其中Ql的方差阵可以按误差传播定律为：

$$D(Ql)=QD(l)Q^T=\sigma^2QQ^T=\sigma^2E \tag{12-22}$$

上式表明经正交变换以后的Ql的方差与变换前的相同，因此可以直接由式（12-20）列出法方程式，即

$$\widetilde{R}^T\widetilde{R}x=\widetilde{R}^Tc \tag{12-23}$$

其中

$$\underset{m\cdot 1}{c}=\begin{bmatrix}\underset{n\cdot 1}{\dot{c}}\\ \underset{(m-n),1}{\ddot{c}}\end{bmatrix}$$

考虑到式（12-19），则式（12-23）可以写成：

$$R^TRx=[R^T\quad O]\begin{bmatrix}\dot{c}\\ \ddot{c}\end{bmatrix}=R^T\dot{c} \tag{12-24}$$

当矩阵A的秩为n时，R的秩也为n，因此$(R^T)^{-1}$存在，以$(R^T)^{-1}$乘以式（12-24）的两边，则：

$$(R^T)^{-1}R^TRx=(R^T)^{-1}R^T\dot{c} \tag{12-25}$$

$$Rx=\dot{c}$$

$\dot{c}$是正交变换以后Ql的前n行。

公式（12-25）告诉我们，经正交变换后，可以直接由式（12-25）求解未知参数X，它完全等价于由原始误差方程式法化求解的结果。

再看残差的二次和，由式（12-21）知：

$$(Qv)^T(Qv)=v^TQ^TQv=v^Tv$$

故可直接由$(Qv)^T(Qv)$获得需要的残差二次和。

由式（12-25）知

$$x=R^{-1}\dot{c}$$

连用式（12-18）代入式（12-21）中，有

$$Qv=\begin{bmatrix}\underset{n\cdot n}{R}\\ \underset{(m-n)\cdot n}{O}\end{bmatrix}\underset{n\cdot n}{R^{-1}}\dot{c}-\begin{bmatrix}\underset{n\cdot 1}{\dot{c}}\\ \underset{(m-n),1}{\ddot{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{c}\\ O\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dot{c}\\ \ddot{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O\\ -\ddot{c}\end{bmatrix}$$

于是

$$v^Tv=(Qv)^T(Qv)=\ddot{c}^T\ddot{c} \tag{12-26}$$

所以在经过正交变换之后，不仅可方便地求解未知数，而且也可以方便地求出残差的二次和。

二、吉文斯变换

可以利用吉文斯（Givens）变换来实现上述正交变换的目的。上述的正交变换完全可以用逐次吉文斯平面旋转变换来实现。分析式（12-18）知，变换后的 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 矩阵应当使 i 列（$i=1, \cdots, n$）的后 $m-i$ 个元素均为零。

欲使第 i 列的第 k 个元素变为零，可引入下列 $\boldsymbol{Q}_{ik}$ 平面旋转矩阵：

$$\boldsymbol{Q}_{ik}=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \cdots & i & \cdots & k & \cdots & m \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ m \end{matrix} \end{array} \tag{12-27}$$

上式中的 $\boldsymbol{Q}_{ik}$ 矩阵中，位于（i，i）和（k，k）以外的主对角线元素均为 1，在（i，i），（k，i），（i，k），（k，k）位置上的元素分别为 c，$-s$，s，c，且

$$c=\cos\theta, \quad s=\sin\theta$$

其余元素均为零。不难验证 $\boldsymbol{Q}_{ik}$ 是一个规格化的正交矩阵，即

$$\boldsymbol{Q}_{ik}^{-1}=\boldsymbol{Q}_{ik}^{T}$$

若用 $\boldsymbol{Q}_{ik}$ 对矩阵 A 施以吉文斯变换，并使变换后的（k，i）元素为 0，则有：

$$-s\cdot a_{ii}+ca_{ki}=0$$

并考虑到

$$s^2+c^2=1$$

故有

$$\left.\begin{aligned} s&=a_{ki}/(a_{ii}^2+a_{ki}^2)^{\frac{1}{2}} \\ c&=a_{ii}/(a_{ii}^2+a_{ki}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad k>i \tag{12-28}$$

因此，可以逐列地进行上述变换。对于第 1 列需作 $m-1$ 次变换，对于第 k 列需作 $m-k$ 次变换。所以变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_{nm}\cdot\boldsymbol{Q}_{n(m-1)}\cdots\boldsymbol{Q}_{n(n+1)}\cdots\boldsymbol{Q}_{km}\cdot\boldsymbol{Q}_{k(m-1)}\cdots\boldsymbol{Q}_{k(k+1)}\cdots\boldsymbol{Q}_{1m}\boldsymbol{Q}_{i(m-1)}\boldsymbol{Q}_{13}\boldsymbol{Q}_{12}$$

归纳起来，具体算法是对于 i 从 1 逐步变化到 n，对 k 从 $i+1$ 逐步变化到 m，进行下列各步计算：

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ c_{ki}=a_{ii}/(a_{ii}^2+a_{ki}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\ s_{ki}=a_{ki}/(a_{ii}^2+a_{ki}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{12-29}$$

（2）对 A 矩阵逐次施以吉文斯变换。即第一步为 $Q_{12}A$，第二步为 $Q_{13}(Q_{12}A)$，…直至最后一步得到 QA，相应地对 l 向量变换得到 Ql。

每步变化后需要作的计算为：

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\bar{a}_{ij}\\ \bar{a}_{kj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s\\ -s & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{ij}\\ a_{kj}\end{bmatrix},\quad j=i,\ i+1,\ \cdots n\\&\begin{bmatrix}\bar{b}_{i}\\ \bar{b}_{k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s\\ -s & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{i}\\ b_{k}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad(12\text{-}30)$$

显然，这是一个两重循环的有规则的计算，便于在计算机上的实现。

三、算例

现在举一个具体的算例来进一步阐述吉文斯变换的具体步骤。

已知 $v=Ax-b$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}-25.42\\ -10.34\\ 35.20\\ 15.54\\ -21.32\\ -4.82\\ 31.02\\ 26.11\end{bmatrix}$$

$$X=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$$

第1列化算，$i=1$

（1）$k=2$

$$c=a_{11}/(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\frac{1}{2}}=1/\sqrt{2}$$

$$s=a_{21}/(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\frac{1}{2}}=1/\sqrt{2}$$

按式（12-30）矩阵 A、B 的第 i、k 行的元素变换为

$$\begin{array}{c}\\ i=1\\ k=2\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}A & & & \end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1.4142 & -0.7071 & 0 & 0\\ 0 & 0.7071 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\quad\begin{array}{c}b\\ \begin{bmatrix}10.6631\\ 25.2859\end{bmatrix}\end{array}$$

由于 $a_{31}=0$，故第三行无须作旋转变换。

（2）$k=4$，$i=1$

$$c=1.4142/(1.4142^2+1)^{\frac{1}{2}}=0.8165$$

$$s=1/(1.4142^2+1)^{\frac{1}{2}}=0.5774$$

矩阵 A、b 的第1，4行的元素变换为

$$\begin{matrix} i=1 \\ k=4 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1.7321 & -0.5773 & -0.5774 & 0 \\ 0 & 0.4083 & -0.8165 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17.6792 \\ 6.5315 \end{bmatrix}$$

因为$a_{k,1}=0$（$k>4$），所以第1列化算结束。

第2列化算，$i=2$

（1）$k=3$，$i=2$

$$c=0.7071/(0.7071^2+1)^{\frac{1}{2}}=0.5773$$

$$s=1/(0.7071^2+1)^{\frac{1}{2}}=0.8165$$

矩阵A、b第2行，3行的元素变换为

$$\begin{matrix} i=2 \\ k=3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 1.2247 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 43.3384 \\ -0.3250 \end{bmatrix}$$

（2）$k=4$，$i=2$

$$c=1.2247/(0.4083^2+1.2247^2)^{\frac{1}{2}}=0.9487$$

$$s=0.4083/(0.4083^2+1.2247^2)^{\frac{1}{2}}=0.3163$$

$$\begin{matrix} i=2 \\ k=4 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 1.2910 & -0.2582 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7746 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 43.1810 \\ -7.5115 \end{bmatrix}$$

因为$a_{52}=0$，所以第5行元素无须转换。

（3）$k=6$，$i=2$

$$c=1.2910/(1.2910^2+1)^{\frac{1}{2}}=0.7906$$

$$s=-1/(1.2910^2+1)^{\frac{1}{2}}=-0.6124$$

$$\begin{matrix} i=2 \\ k=6 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 1.6331 & -0.2041 & -0.6124 \\ 0 & 0 & -0.1581 & 0.7906 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 37.0907 \\ 22.6333 \end{bmatrix}$$

因为$a_{72}=0$，所以第7行元素无须转换。

（4）$k=8$，$i=2$

$$c=1.6331/(1.6331^2+1)^{\frac{1}{2}}=0.8528$$

$$s=1/(1.6331^2+1)^{\frac{1}{2}}=0.5222$$

$$\begin{matrix} i=2 \\ k=8 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 1.9119 & 0.6962 & -0.5222 \\ 0 & 0 & 0.7462 & 0.3198 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15.2656 \\ 2.8978 \end{bmatrix}$$

如此继续进行第3、4列的化算，最后的矩阵A、b的形式为：

$$A=\begin{bmatrix} 1.9320 & -0.5773 & -0.5774 & 0 \\ 0 & 1.9149 & -0.6962 & -0.5222 \\ 0 & 0 & 1.4771 & -0.9231 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3694 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 17.6792 \\ 45.2656 \\ -14.3808 \\ 42.2736 \\ \hline -0.3250 \\ 0.2348 \\ 0.1939 \\ 0.1838 \end{bmatrix}$$

经回代求得解如下：

$$x_4 = 42.2736/1.3694 = 30.8702$$

$$x_3 = (-14.3808 + 0.9231 \times 30.8702)/1.4771 = 9.5562$$

$$x_2 = (45.2656 + 0.6962 \times 9.5562 + 0.5222 \times 30.8702)/1.9149 = 35.5314$$

$$x_1 = (17.6792 + 0.5773 \times 35.5314 + 0.5774 \times 9.5562)/1.7320 = 25.2363$$

$$\Sigma v^2 = 0.325^2 + 0.2348^2 + 0.1939^2 + 0.1838^2$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\Sigma v^2/n-u} = \sqrt{0.2321/(8-4)} = 0.2609$$

四、吉文斯变换用于序贯最小二乘平差

序贯最小二乘平差要求在平差任何阶段可随意增减观测值而无需重复前面的已完成的计算。下面扼要阐述怎样将吉文斯变换用于序贯最小二乘平差。

设原来的观测值误差方程为

$$v = Ax - l$$

经吉文斯变换后得到

$$ux = d,$$

$$\delta = v^T v$$

下面分别对增、减观测值讨论如何修正 u、d、δ、u^{-T}和Q_{xx}等。

（一）增加观测值的情况

图 12-4-1列出吉文斯变换后的原来结果与新增观测值 Y 向量和常数项 l_y。

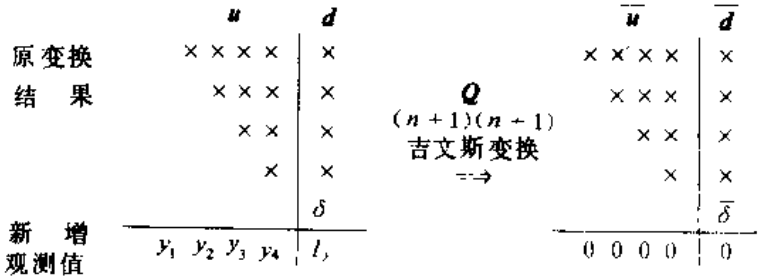


图 12-4-1

可以证明，对已变换结果继续施以吉文斯变换即得到所需结果。设有变换：

$$\underset{(n+1)(n+1)}{\boldsymbol{Q}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \tag{12-33}$$

则
$$[\overline{\boldsymbol{u}}^T \quad \boldsymbol{O}]\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{u}^T\ \boldsymbol{Y}^T]\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}$$

即
$$\overline{\boldsymbol{u}}^T\overline{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} \tag{12-34}$$

所以，对于新增观测值，可将它与原来的 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{d}$ 列在一起，然后，对于 $i=1,\cdots,n$，消去 $n+1$ 行向量的非零元。计算 s，c 的方法同上，这样便得到 $\overline{\boldsymbol{u}}$、$\overline{\boldsymbol{d}}$，若将 l_y 亦消去为 0，则 $\delta'=\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{l_y}^T\boldsymbol{v}_{l_y}$。

为了不重复求矩阵之逆，可以直接用同一吉文斯变换序列将 $\boldsymbol{u}^{-T}$ 改化为 $(\overline{\boldsymbol{u}})^{-T}$。兹证明如下：

将（12-33）式中 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$ 配成方阵，进行吉文斯变换，有：

$$\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{O} & \sigma\end{bmatrix} \tag{12-35}$$

两端同时求逆

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y} & 1\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{Q}^T=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{O} & \sigma\end{bmatrix}^{-1}$$

即
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{Y}\boldsymbol{u}^{-1} & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^T=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}}^{-1} & -(\overline{\boldsymbol{u}})^{-1}\boldsymbol{e}/\sigma\\ \boldsymbol{O} & 1/\sigma\end{bmatrix}$$

两端转置得：

$$\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{-T} & -\boldsymbol{u}^{-T}\boldsymbol{Y}^T\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}}^{-T} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{e}^T(\overline{\boldsymbol{u}})^{-T}/\sigma & 1/\sigma\end{bmatrix} \tag{12-36}$$

从式(12-36)可以看出，用与改化 $\boldsymbol{u}$ 相同的吉文斯矩阵，可直接改化 $\boldsymbol{u}^{-T}$ 得到 $(\overline{\boldsymbol{u}})^{-T}$。

（二）删去观测值的情况

先分析一下式（12-35），将两端左乘其转置阵，并考虑到 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，则有：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{Y}^T\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}}^T & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{e}^T & \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{O} & \sigma\end{bmatrix}$$

即
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y}^T\\ \boldsymbol{Y} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}}^T\overline{\boldsymbol{u}} & \overline{\boldsymbol{u}}^T\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{e}^T\overline{\boldsymbol{u}} & \sigma^2\end{bmatrix}$$

故有

$$\overline{\boldsymbol{u}}^T\overline{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}$$

这是增加观测值的情况。

为了实现从 $\boldsymbol{u}$ 中减去观测值向量 $\boldsymbol{Y}$ 的影响，可仿照式（12-35）构造一个列向量 $\boldsymbol{e}$ 和一标量 σ，使其通过一吉文斯矩阵的系列变换后有：

$$\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{O} & \sigma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y} & 1\end{bmatrix} \tag{12-37}$$

同理有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{e}^T & \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{O} & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}^T & \boldsymbol{Y}^T \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u} & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}+\sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}^T\bar{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y}^T \\ \boldsymbol{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

于是有：

$$\left.\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{u}}^T\bar{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}-\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{u}^{-T}\boldsymbol{Y}^T \\ \sigma &= (1-\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{12-38}$$

显然 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 即为所求的从 $\boldsymbol{u}$ 中消去了观测值向量 $\boldsymbol{Y}$ 的贡献后的改化上三角形矩阵。为了获得 $\bar{\boldsymbol{u}}$，必须先由式（12-38）式求出 $\boldsymbol{e}$ 和 σ，然后通过如式（12-37)的吉文斯变换即可求出 $\bar{\boldsymbol{u}}$。

由上可见，删去观测值要比增加观测值麻烦。如果引入负权和复数运算，则可令 $P=-1$、$\sqrt{P}=i$，用增加观测值的算法可同样地处理删去观测值的情况。

本章习题与思考题

1.什么叫做在线空中三角测量？它有什么特点？

2.什么叫实时序贯算法？为什么要采用序贯算法？

3.试推导增减观测值但不改变未知数的实时序贯算法的基本公式。

4.什么叫吉文斯变换？在测量平差中利用它有什么好处？

5.用吉文斯变换求下列误差方程式的解 x 和单位权方差估值。并与通常的解法相比较

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6.求解含有有名的Hilbert矩阵的对称病态方程组。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{bmatrix}$$

第十三章　解析测图仪的原理与使用

§13.1　概　述

一、从模拟测图仪到解析测图仪

为了重建摄影时的几何光束，对所摄目标进行立体量测需要采用摄影测量仪器。在基础摄影测量课程中，大家已学过各种模拟立体测图仪。为了实现摄影时同名光线的相交，在模拟测图仪上是借助光学投影（如多倍仪，C—5 精密立体测图仪等）、机械投影（如 A10，B8S，AG1，D3等）或光学机械投影（如汤姆逊—瓦茨测图仪等）的方式，用光学或机械交会导杆实现的。

由第二章的解析摄影测量基础知，物点、像点和投影中心点之间存在着严格的数学关系，即三点共线方程。因此，如果利用电子计算机，通过严格的数学解算方法保证像点坐标和模型点坐标之间的相应关系，建立所测目标的数学模型，同样也可以完成对所摄目标的立体量测。显然，在这样的仪器上，原来复杂的光学和机械投影将由计算方法取代，这便是解析测图仪。从这个意义上讲，人们称解析测图仪为“数字投影型”测图仪。

通过本章的学习，读者将逐步了解到解析测图仪的产生与应用，绝不仅仅是投影方式的变化，而是引起摄影测量从模拟法走向解析法，并且进一步向数字化方向发展的重大变革。

二、解析测图仪的基本组成部分

解析测图仪是利用电子计算机与立体坐标量测仪相连接，用严格数学方法解算像点坐标和模型坐标几何关系、模型坐标与地面坐标以及图而坐标几何关系的摄影测量仪器，它输出数字或图解产品，其基本组成部分见图13-1-1的示意图。

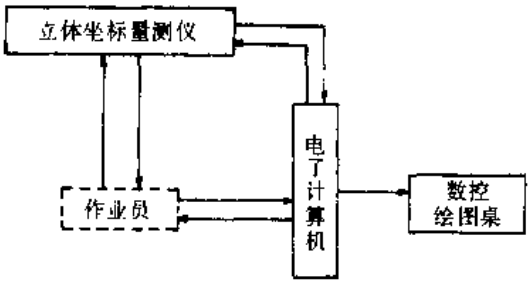


图 13 1-1

其中，精密立体坐标量测仪为立体观察和立体量测部件，电子计算机为解析测图仪的核心，它实现解析测图仪的实时计算，并完成各种摄影测量作业的有关计算。数控绘图桌在电子计算机控制下，自动绘出地形图和其它各种图件。为了实现电子计算机与立体坐标量测仪和数控绘图桌的连接和信息沟通，还要利用接口设备和其它控制部件。

作业员对解析测图仪的操作除了一般测图仪上的手轮、脚盘外，还可以通过电子计算机的终端和专用面板或键盘等部件来进行。

三、解析测图仪的优点

与各种模拟测图仪比较，解析测图仪有下列明显的优点：

（1）精度高。由于解析测图仪依靠电子计算机进行数值解算，仪器的光机部分构造简单，机械传动少，易于做成稳定的结构；对于来自摄影过程中的像点移位、像片材料变形及仪器机械部分的系统误差均可通过计算方法加以改正；而且偶然误差的处理可采用严格的最小二乘法，因此解析测图仪的量测精度可达±2μm左右。

（2）功能强。解析测图仪采用数字解算，具有很大的灵活性。它具有各种摄影测量仪器的多种功能，如像片坐标量测、模型坐标量测、纵横断面测量、地物和地貌测绘、数字高程模型采样。它不受摄影主距和像片外方位元素的限制，除了处理常规摄影像片外，还可处理交向摄影、全景摄影、非量测相机的像片及各种遥感图像资料。

（3）效率高。由于有电子计算机的实时控制和反馈作用，在定向过程中可自动驱使到标准点位观测，对已测过的像对可恢复其方位，对已测过的点可恢复其位置。在观测过程中可通过实时计算进行质量控制，及时发现观测粗差（在线空中三角测量）。在测图过程中可辅助测图，使部分测图工作，如制作平行线、填入地图符号、加绘符号和晕线等自动进行（机助测图）。在数字高程模型采样中可实现等时间或等距离间隔或用渐进采样方法获取数据。此外，还可在解析测图仪进行自动转点（见第三章）。加上使用键盘及屏幕终端，可进行人机对话。打入简单的命令就可以完成一连串繁琐冗长的操作，大大缩短测图辅助性操作的时间，提高作业效率。

（4）便于实现自动化。在解析测图仪上易于增加数字影像获取系统，如CCD摄像机，从而实时地对所获取的数字影像进行自动匹配和相关，代替人眼的立体观测，形成在线的自动采样或自动测图系统。

（5）利于数字测图和建立测量数据库。由于解析测图仪的所有测量结果首先是以数字形式保留在电子计算机中的，因此，可在数字测图或数据库软件控制下为测量数据库进行摄影测量采集数据，通过对采集数据的编辑加工后，便可获得数字地图。除了在数控绘图桌上绘出合格的地形图外，还可直接将成果输进到测量数据库或各种地理信息系统中去。采用这种方法，对地图的修测和更新也将是十分有利的。

表13-1-1是对模拟测图仪和解析测图仪进行简要的比较，从中也看出解析测图仪的明显优越性。

解析测图仪与模拟测图仪的比较　　表 13-1-1

比较项目	解析测图仪	模拟测图仪
坐标量测精度	±1～3μm	～±10μm
测标大小	20μm	40μm
放大倍率	达到16^{x}或更大	8^{x}

续表 13 1-1

比 较 项 目	解 析 测 图 仪	模 拟 测 图 仪
对成像方式和内外方位元素的限制	无	有很大限制
定 向 法	严密解析法	光学机械法
系统误差处理	计算法全面补偿	模拟装置部分改正
数 据 流	模拟量—数字量—模拟量	模拟量—模拟量
明显地物测定精度	±5～20μm	±30～50μm
测 图 方 式	机助测图，数字测图	手工测图
产 品	数字/图解地图，剖面图、透视图、DEM	只有图解地图产品

四、解析测图仪的发展历史

解析测图仪的发展已经经历了30多年的历史。1957年海拉瓦（U、V、Helava）首先发表了解析测图仪原理的论文，被认为是解析测图仪的发明者。但是由于当时电子计算机的功能差、体积大、故障多、成本高，启动时间长，所以大多数人们不顾意用它来取代模拟测图仪。因此在长达近20年中一直处子提出和研制阶段（1957—1976年）。这个研制阶段中的主要解析测图仪列于表13-1-2。随后，由于电子计算机的性能有了很大改善，价格也大为降低，而且摄影测量人员在利用电子计算机进行解析空中三角测量方面已取得明显成就，人们才开始普遍重视解析测图仪。

1976年在赫尔辛基召开的第十三届国际摄影测量大会上展出了七家公司的解析测图仪（表13-1-3），标志着解析测图仪的发展从研制阶段转入民用生产阶段（1976—1987年）。其中以联邦德国欧波同厂生产的Planicomp C—100为代表。这是由长期生产模拟测图仪的主要厂家生产的功能齐全、设计合理的解析测图仪。在这个阶段中设计的解析测图仪在型

初期研制的一些解析测图仪 表 13-1-2

年 份	型 号	厂 商 特 征	用 户
1963	AP-1	NRC ottawa 延迟线存贮器	研 究
1963	AS-11A	OMI-Bendix 数字微分分析机	军 用
1964	AP-C	OMI-Bendix 延迟线存贮器	军 用
1968	AS-11-AI	OMI-Bendix Bx 272 磁心	军 用
1972	AP/C-3	OMI-Bendix IBM 1130 磁心	民 用
1972	D.S.	Galileo Laben 小型计算机	民 用
1974	APPS	ETL Fort Belvoir HP 9810	军 用

1976年在赫尔辛基展出的解析测图仪　　表 13-1-3

型　号	厂　商	计算机	内　存	磁盘存贮	数字增量	运算周期
AP/C-3T	意，OMI	PDP 11/35	24k, 16b	1.2M, 16b	2μm	900 ns
AP/C-4	意，OMI	PDP 11/03	24k, 16b	盒式磁带	2μm	1.2 μs
US-1	美，Bendix	PDP 11/35	24k, 16b	1.2M, 16b	1μm	900 ns
Anaplot	加，Instronics	PDP 11/45 Telemech	32k, 32b	2×1.2M, 32b	1μm	
Traster 77	法，Matra	Solar 16-40	32k, 16b	2×2,5M, 8b	0.5μm	750 ns
Planicomp C-100	联邦德国欧波同	HP 21 Mx	24k, 16b	4.9M, 8b	1μm	650 ns
Stereodicomal	前民主德国蔡司	Kongsderg SM4	16k, 16b	/	0.625μm	/
D.S.	意，Galileo	PDP 11/05	12k, 16b	/	1μm	900 ns

式、性能及价格方面都比较丰富多采，能满足各种不同用户的要求（见表13-1-4），而且，解析测图仪的体积愈来愈小，价格愈来愈便宜，性能则愈来愈高。因此，在80年代之后，世界主要仪器厂商已不再研制新型号的模拟测图仪。显然，解析测图仪的性能价格比已明显优于模拟测图仪。这种趋势明显的表现在1980年和1984年分别在汉堡和里约热内卢召开的两届国际摄影测量与遥感大会上。主要的进步在于软件的改善和扩充及微机的广泛使用。

第二代解析测图仪的主要产品（1976～1987）　　表 13-1-4

型　号	厂　商	特　点
APPS Ⅳ	美国 AUTOMETRIC	输入像点坐标，中等精度，图像迭加显示，可作断面量测
US-2	美国 Helava	采用数字投影器
DSC 3/80	美国 Keuffel & Esser	像盘固定，光路移动，分辨力高，观测系统可放大至55倍
AUTOPLOT	加拿大 Systemhoose	采用微处理机（与主机相联结）
Anaplot I	加拿大 Marconi	像片车架由气垫支撑，光路系统具有伺服驱动
AC-1	瑞士 Wild	TA-2 数控绘图桌具有丰富的制图软件，绘图桌上图形能电视显示在操作台前
BC-2	瑞士 Wild	AC-1的改进型。采用DG 30微型计算机，配有DMAP机助绘图软件和菜单式绘图操作键盘
DSR-1	瑞士 Kern	测图仪DSR-1和绘图桌GP-1有灵活的独立或联合运行方式，采用分配计算处理，带有激光刺点装置
DSR-11	瑞士 Kern	DSR-1的改进型，带有CCD影像传感器和相关器

续表 13-1-4

型 号	厂 商	特 点
C 110 120 130	联邦德国 OPTON	为C 100 型的改进型。C 110、C 120带有Z oom系统。C110配HP 1000 A 900小型计算机，C120配HP 1000 A 700 微型计算机，C 130配HP 1000 A 600微型计算机
SD-4	澳大利亚 Qasco	简单，价廉，6μm精度，可与主计算机联结成解析测图仪，又可单独作立体坐标量测仪

然而，在这个发展阶段中，人们仍然较多地从测图仪这个传统的概念出发，以计算机辅助或控制进行测图工作。因此，这个阶段亦可称为机助测图阶段。在此阶段中，电子计算机对所采集的数据处理后仍强调在数控绘图桌上绘出图解的地形图，而对中间的数字产品并未作严格的管理。各种经济型的解析测图仪的价格已等同于一般的模拟测图仪。可以说，从80年代起，解析测图仪已成为摄影测量的主要仪器。

随着解析空中三角测量技术的推广和解析测图仪与正射投影仪的使用，摄影测量已从模拟法走向解析摄影测量阶段。

解析测图仪发展的第三阶段是面向数字测图、地形数据库和地理/土地信息系统的摄影测量数据采集阶段。它以联邦德国欧波同厂1987年推出的新型解析测图仪P 1，P2，P 3为起点，是在数据库系统管理和操纵下的机控数据采集站。在P 系列仪器中是用称之为PHOCUS的摄影测量与制图通用软件系统来进行目标分层的数据采集，强调的首先是数字产品，可以连机绘图，也可以经过图形编辑后进行脱机绘图或将数字产品送入地形数据库或地理信息系统中。因此第三代解析测图仪并不强调与绘图机的在线连接。表13-1-5列出属于这类的新型解析测图仪。

新型第三代解析测图仪简介（1987年以来） 表 13-1-5

型 号	厂 商	特 点
P 1	联邦德国 OPTONT	为功能齐全的高级全能型解析测图仪，像片盘尺寸330×240mm^2，大面积工作台上嵌有800×400mm的数字化图形板，既可用 3 维型带光标的摄影测量操作器，也可用手轮和脚盘控制测标的运动进行立体量测、可变焦光学系统200M放大倍率为 5 ～20倍，并可连接图像叠置系统VIDEOMAP和CCD摄象机。该系统在摄影测量与制图通用软件系统PHOCUS支持下能够按目标分类进行数字测图。
P 2	联邦德国 OPTON	在Planicomp C系列仪器上加上PHOCUS软件系统，并用PHOCUS的面板取代原来 C 系列仪器的操作面版。为现有C 系列仪器的改造提供了可能。

续表 13-1-5

型 号	厂 商	特 点
P3	联邦德国 OPTON	具有PHOCHS软件的低成本 P 系列解析测图仪，结构紧凑，利用594×420mm的数字化图形板和带光标的摄影测量操作器实现对立体模型的量测。
BC3	瑞 士 Wild	用高性能的386微机取代BC-2中DG30计算机可望装设图像叠置系统和CCD摄象机。
System9	瑞 士 Mild（与PRIME公司合作）	为一套建立地理信息系统的数据库系统，其中S9-AP系利用改进后的BC2作为摄影测量数据采集工作站，系统还包括S9-E编辑站，S9-D数字化工作站，S9-S文件服务工作站等。
DSR-15	瑞 士 Kern	主机采用DECMicroVAX或VAX工作站，可装上克恩栅格图像叠置系统KRISS和克恩相关系统，并与地学信息系统INFOCAM相连接。
DSR-15 -18	瑞 士 Kern	同DSR-15，但装了25×50cm的大像幅像片盘，以供大像幅相机之用。
IMAP (Intergraph Map Modeling System)	美 国 Intergraph	该系统除有带人机对话图形显示的解析测图仪 Inter Map Analytic photogrammetric Station外，还有几何预处理子系统Inter Pro 32C，和两个显示屏幕Inter View 32C，其中左方用矢量数据，右方用栅格数据。

而且在这样的仪器上往往均装有CCD数字摄影机，可以实时地获得所欲处理目标的数字影像。如果加上相应的数字影像匹配或相关的软件，则将可能取代人的立体观测工作，从而实现全数字化的自动量测和数据采集，从而获得DEM和数字正射影像。再引入像片影像的自动判读，摄影测量作业将实现全面自动化。

由于这样的系统，可以面对数字化影像或直接由数字式传感器采集的数字影像，它们可以直接在高分辨率屏幕上获得供立体观测用的影像，从而使目前解析测图仪上的立体坐标量测仪光机部件不再成为必要。于是解析测图仪发展成为数字摄影测量系统。这个命题已成为当代国际摄影测量界研究的热点。

显然，解析测图仪的发展不仅使其自身日益完善，而且也导致和推动了摄影测量从解析法向数字化方向的发展，并进而使摄影测量与遥感进一步有机地结合起来。这些将在“数字摄影测量”一书中详细讲述。

图13-1-2给出解析测图仪发展的三个阶段的示意图。

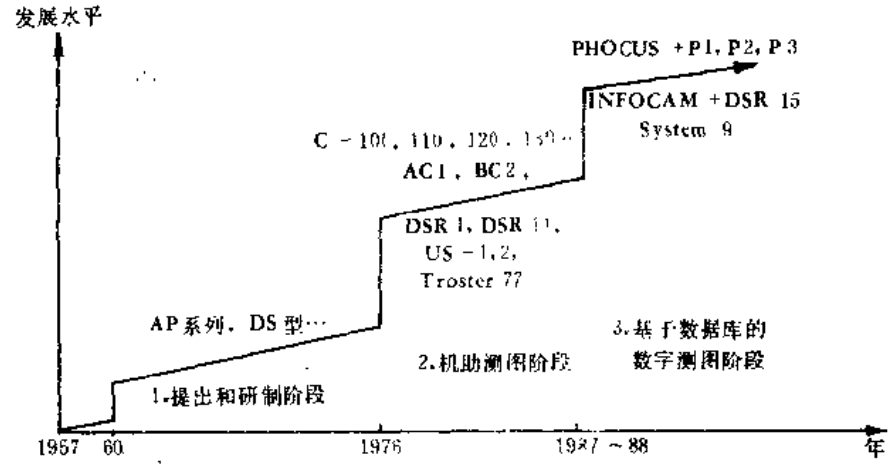


图 13-1-2

§13.2 解析测图仪的硬件

解析测图仪的硬件指光、机、电各部分结构的实体。下面对主要部分加以说明。

一、立体坐标量测仪

解析测图仪的立体观察与立体量测部件的基本结构和功能与通常的精密立体坐标量测仪大体相同，所不同的特色在于：

（1）机械结构要求稳定、简单。

对普通的精密立体坐标量测仪，必须保证机械结构的精确度和稳定性。对导轨的直线性、正交性，丝杆的精确性等均有较高的要求。而在解析测图仪上许多机械方面的系统误差，只要它是稳定不变的，便可以借助软件通过计算的方法加以改正，从而可放宽对光机制造方面的难以实现的要求。而在设计和制造中主要偏重于稳定性，这样就可保证高精度而又能简化结构和降低成本。从这个意义上讲，生产解析测图仪要比生产常规模拟测图仪更容易。

（2）增设Dove旋像棱镜与Zoom变倍系统。

为了保证解析测图仪对不同摄影方式和不同像片比例尺的通用性，许多解析测图仪的观测系统中增设了由计算机控制的Dove棱镜和Zoom变倍系统。前者的作用是作连续像对观测和在立体观察时消除旋像现象；后者则连续地调节观测影像的放大率，使得左、右片影像比例尺不一致时也能获得良好的立体视觉。

当仅利用航空测量方法测制地形图时，可以采用无Zoom系统的经济型解析测图仪。

（3）增设与电子计算机的接口设备。

立体坐标仪上手轮和脚盘的运动，像片车架的运动欲送入电子计算机需引入模/数转

换装置，称之为编码器。电子计算机欲实现对仪器的控制和反馈作用则需引入数/模转换装置，称之为伺服系统。根据解析测图仪器的不同设计，这种反馈至少有一个（如y_2或q）或两个（如x_2，y_2或p,q）乃至四个（x_1,y_1，x_2和y_2）。无反馈一般不称为解析测图仪而叫做机助测图系统。

为了方便计算机与坐标量测仪的联系及作业员的操作，往往在立体坐标量测仪上装有操作控制面板或菜单式键盘。

二、接口设备

解析测图仪接口设备是在电子计算机与立体坐标仪、绘图桌、操作台乃至作业员间沟通信息的桥梁。凡是立体坐标仪或绘图桌的模拟量需送入电子计算机时，均要进行模/数（A/D）转换；凡是电子计算机要控制和反馈作用到立体坐标仪或绘图桌或其它光机部件上，均要进行数/模（D/A）转换。此外，作业员不论对手轮、脚盘的操作，还是在任一面板或键盘上的动作均会与电子计算机发生通信与联系。如果要在解析测图仪上增设其它硬部件（如CCD摄像机），也需要配以相应的接口设备。

下面简要介绍接口设备中的编码器和伺服系统。

（一）编码器

编码器的作用是把仪器的各种机械位移量转换成计算机所能接受的数字量，实现模/数转换。解析测图仪上的手轮、脚盘、像片车架，绘图桌及需要自动控制的棱镜、透镜等部位，均需要安置编码器。图13-2-1表示像片车架的机械位移量通过编码器变成数字量，传送到计算机的整个过程。

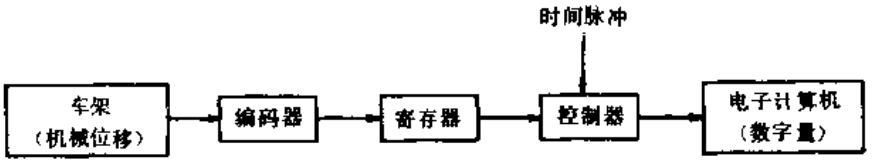


图 13-2-1

图中的时间脉冲是根据解析测图仪实时计算的周期来确定的。当计算机中实时程序（Loop程序）需要时，便通过相应的时间脉冲将编码器变换后的数字量送入电子计算机。

常用的编码器有旋转编码器和线性编码器两种。

1.旋转编码器

旋转编码器装在产生机械位移量的有关部件上，它的结构原理如图13-2-2。当产生机械运动时，编码器的圆盘光栅便产生转动，于是两个固定位置的光电管A、B上便有正弦形光电流输出。A、B的相对位置错开，正好能使其输出波形相位相差90°的信号，如图13-2 3所示。

两个光电管这样的安排主要是为了顾及在正转或反转时能有正确的计数。例如，把a、b信号加入到图13-2-4的线路上，则当码盘正转（顺时针转动）时，只有正转信号f输出；而当码盘反转（逆时针转动）时，只有反转信号g输出。这个结论可由图中的分析结

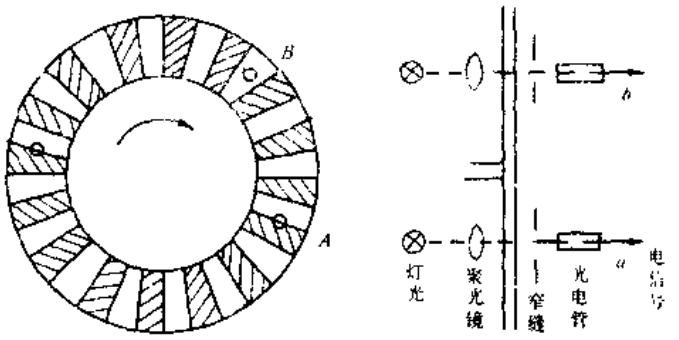


图 13-2-2

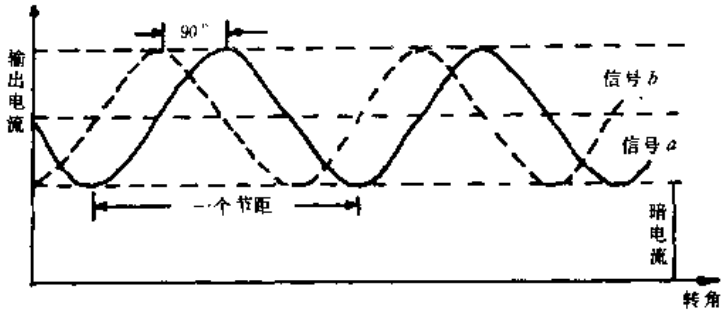


图 13-2-3

果看出。信号 f 和 g 的代数和代表了真正的移动量。

如果把 b 信号反相后加到连通 d 和 e 信号的线路上，就可以把原信号二等分，即在 0° 和180°处各有一个脉冲输出，因此量测的精度便可提高一倍，这称之为倍频技术。例如，当丝杆螺距为 2 mm，码盘一周的栅条数为500，且通过光电信号的四倍频，则输出的脉冲当量为 1 μm。

只有两个光电管的旋转编码器，不能排除图13-2-3中的暗电流波动的干扰。为此，实际的编码器在与图13-2-2中 A、B 相对的位置上再安置两个光电管，并使 4 个光电管的信号初相位分别为0°，90°，180°，270°。将相位差为180°的一对信号相减，就可以排除暗电流干扰，从而获得稳定的输出。

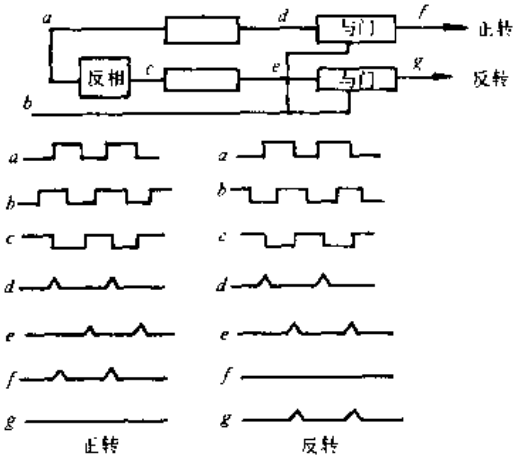


图 13-2-4

2. 线性编码器

旋转编码器依赖于丝杆，即把量测机构附设在机械传动机件上，因此，当丝杆受热与受力伸缩时就会影响量测精度。一般认为，旋转

编码器精度不会高于3μm。而且这种动态伸缩误差很难用软件加以改正。因此，当量测精度要求较高时，宜采用线性编码器。

线性编码器采用高精度的直尺光栅作为计量器件，如图13-2-5所示，（a）为标尺光栅，（b）为指标光栅，它们具有相同的刻线密度。把指标光栅重叠于标尺光栅上，并旋转一个微小角度θ，就会得到如图13-2 5（c）的莫尔条纹。当标尺光栅相对于指标光栅移动时，莫尔条纹将作侧向移动。莫尔条纹的间距W与光栅间距离a具有如下关系：

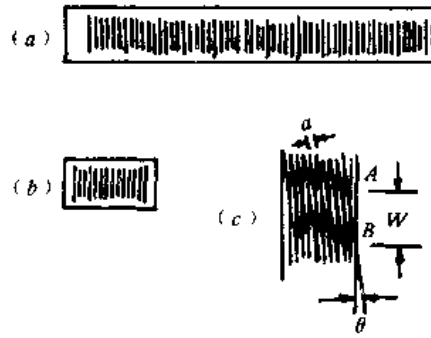


图 13-2-5

$$W=\frac{a}{\theta} \qquad (13\ 1)$$

式中θ为以弧度表示的子、母光栅偏转角。当θ很小时，W要比a大许多倍。在莫尔条纹上每1/4间隔处各安置一个光电管，即可量出标尺光栅的位移值，其原理与图13-2-3、4所示相同。

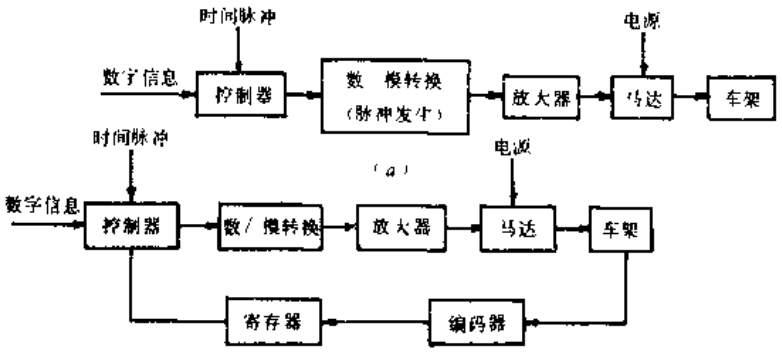
设光栅刻线密度为50线/mm，且光电信号经过20倍频，则输出脉冲当量为1μm。

（二）伺服系统

伺服系统的功能是把计算机给出的数字信息转变为仪器部件的机械位移，把有关部件，如像片架或绘图笔驱动到应有位置，即实现数/模转换。根据是否带有反馈控制，伺服系统可分成开环系统和闭环系统两种。

开环系统的结构如图13-2-6（a）。来自计算机的数字信息输给控制器，控制器按照一定的时间要求把信息传送给数/模转换器，在其中将数字信息转换为电压信号或脉冲串，经过放大电路输送给电机，以驱动相应的车架移动。开环系统一般采用步进电机，它每接受一个脉冲就旋转一个固定角度。因此，可以根据脉冲的数目和频率来控制轴的旋转角度和速度。

闭环伺服系统的结构如图13-2-6（b）。来自计算机的数字信息，一方面和开环系统一样，经控制器、数/模转换、放大器，由电机驱动像片车架。另一方面，车架上的编码器又



（b）

图 13-2 6

及时地将车架位移量变成数字量输送给寄存器。该数字量与由计算机来的数字信息进行比较，如有相差，就按差值经数/模转换后送到驱动线路继续驱动车架作相应移动。这样的反馈循环直到寄存器中的数字与来自计算机中的数字相等时为止。闭环伺服系统中常用伺服马达。

相比之下，开环系统结构简单，成本低廉，但抗干扰能力差，若丢失脉冲就会造成误差。而闭环伺服系统则可以抑制干扰，通过反馈回路的自动检核来保证精度，但其结构复杂，成本比开环高，因此在精度要求高的部位，如像片车架，须采用闭环伺服系统。

伺服系统中常用的驱动电机有步进电机、伺服电机和直线电机等，它们的结构不同，性能也不一样。具体介绍见§13.4

三、电子计算机

解析测图仪可以认为是一种计算机控制下的摄影测量仪器或数据采集系统。电子计算机，包括主机和各个微处理机是它的核心。它担负着全部数据的计算与管理任务，使解析测图仪顺利地完成各种实时和非实时的作业任务，决定了解析测图仪的潜力与限制，并在相当程度上影响着仪器的价格。

解析测图仪的数据处理任务通常包括：实时输入/输出（模/数及数/模转换），接口（计算机与量测机件间的通讯）、由实时程序执行的坐标变换(即数字投影)和由应用程序执行的其它摄影测量运算。所有这些任务的完成均需要利用电子计算机。

目前的解析测图仪有三种选择和配置电子计算机的方案（见13-2-7）。第一种方案是单主机方案，即选用功能较强的小型或微型计算机完成除接口设备外的全部数据处理任务。采用这种方案的解析测图仪有如联邦德国欧波同公司的Planicomp C-100解析测图仪采用小型机HP1000a A900处理机，瑞士威特厂BC-2上选用DG30作为主机。第二种方案中将主

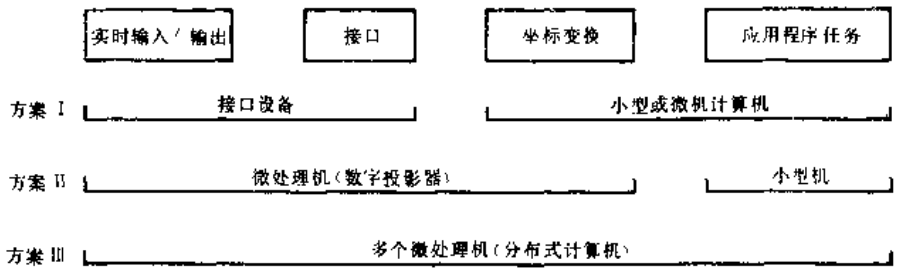


图 13-2-7

要实时计算的任务用一专用微处理机完成，称为数字投影器，作为主机的小型机可兼负其它运算任务。这类仪器的典型代表如美国生产的US—2。还有一种方案是用多个微处理机取代单一的主机，最典型的这一类仪器如瑞士克恩厂生产的DSR系列解析测图仪，联邦德国欧波同厂生产的P1 和P3,以及瑞士威特厂生产的BC 3 。

联机测图时，数控绘图桌作为解析测图仪的必不可少的一部分。用解析测图仪进行数字测图时，可将数据采集与绘图分别进行。即数据采集后要经过编辑加工后输入数据库，当需要绘图时，再从库中取出相应的数据进行机控绘图。因此在解析测图仪硬件中不列入

绘图桌讨论，而在下文的§13.4一节中专门讨论。

§13.3 解析测图仪的软件

如果说电子计算机是解析测图仪的中心，那么计算机软件则是解析测图仪的灵魂。只有通过软件才能使电子计算机控制和驱动仪器完成各种实时和应用任务。软件在很大程度上决定着解析测图仪的性能。

本节首先介绍解析测图仪的输入输出和控制方案，因为它决定软件的设计，尤其是实时软件的设计。然后介绍实时计算软件的数学公式，最后从总体上讨论解析测图仪的软件系统。

一、解析测图仪的输入、输出和控制方案

解析测图仪是电子计算机控制的摄影测量仪器，它的输入、输出内容和控制方案是仪器设计思想的核心，也是构成其软件的基础。

大体上可以归纳为两类典型的输入方式，即输入物方空间坐标和输入像方空间坐标。

（一）输入物方空间坐标（物方空间解析测图仪）

当手轮或脚盘运动时，相应的三个数字信号即送入电子计算机，在输入物方空间坐标的物方型解析测图仪上、这三个数字量可以代表：

——模型坐标（X、Y，Z），如C—100，BC—2等多数解析测图仪；

——地面坐标（E，N，H），如US—1，2解析测图仪；

——地理坐标（λ，Φ，H），如US—1，2解析测图仪。

在这种输入方式下，经过解析测图仪计算机解算后的输出量有：

——左、右像片的四个移动量x，y，x'，y'（或者为Δx，Δy，$\Delta x'$，$\Delta y'$）

——图板坐标X_T，Y_T。

为了使这些输出量能驱动相应部件的机械运动，需要有相应的伺服系统。

物方空间解析测图仪的两种结构方案见图13-3-1（方案一）和图13-3-2（方案二）。

（二）输入像方空间坐标（像方空间解析测图仪）

如果要节省伺服系统机构或直接利用原来的立体坐标量测仪，人们也可采用像方空间解析测图仪输入方式，其结构方案见图13-3-3。此时输入量为像片坐标x，y和P_x（在绘等高线时则为Z）。仪器解算后的输出坐标为P_y（在绘等高线时还有P_x）以及图板坐标X_T，Y_T。

必须指出，在图13-3 1，2，3中由像片到计算机的信息反馈表示采用了闭环伺服系统。

比较这两种输入、输出方案，可以看出：

第1，不论哪一类方案，均需有三个输入量通过缓冲区后送入电子计算机。

第2，输入物方空间坐标时，仪器灵活方便，可以实现按地面标准格网采样，按实地断面量测。但它对坐标量测仪应具有四个伺服装置。

第3，输入像方空间坐标时，仪器解算过程复杂。在测点与绘等高线时解算公式不同

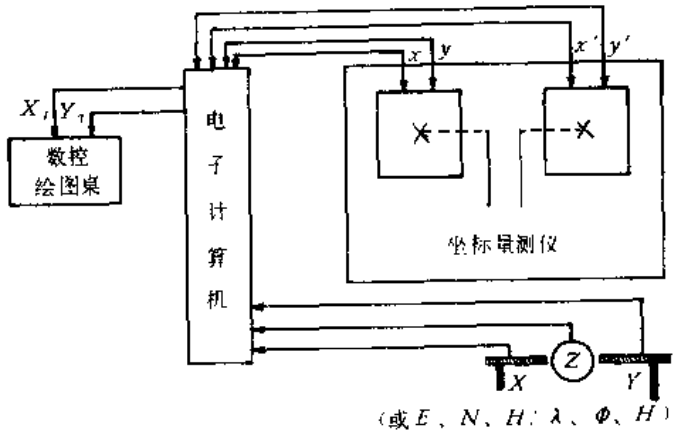


图 13-3-1

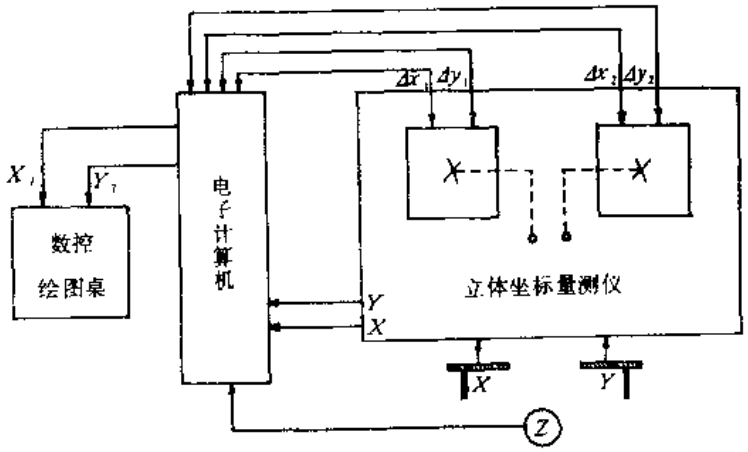


图 13-3-2

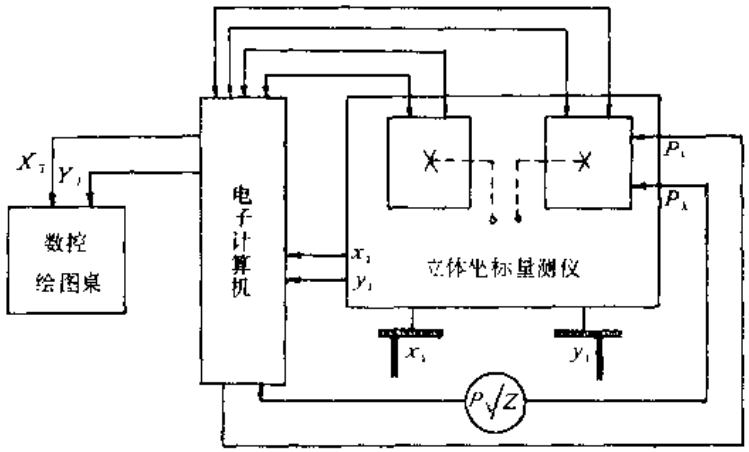


图 13-3-3

它只能按像片格网，沿像片断面量测，对某些作业是不方便的。只是这类仪器对坐标量测仪仅需两个伺服系统。

考虑到伺观系统在技术上已成熟，价格上也很便宜，当前大多数解析测图仪均采用物

方空间型结构。

还必须指出的是，由于电子计算机控制下的解析测图仪在时间脉冲控制下实时地进行所有解算和控制，因此，作业员在作业中并不感觉出谁主动谁被动，各有关坐标均可根据需要在仪器上显示。在这里仍是从原理结构上作微观分析，以便更好地理解其原理和软件结构。

二、实时计算软件的数学公式

（一）实时计算的概念

当在模拟测图仪上建立了立体模型之后，随着手轮和脚盘的运动，可以使测标切在立体模型上，从而完成各种摄影测量作业。而在解析测图仪，由于使用的是数字投影，几何关系的建立和各种坐标间的变换是用计算方法实现的。为了保证随着手轮和脚盘的运动使作业员观测到连续的、完整的立体模型，计算机必须以极高的频率根据输入坐标量的变化重复进行数值计算。这样的计算称为实时计算，为此而编制的程序称为实时程序。

实时计算的频率必须保证人眼在其视觉暂留瞬间之内重复计算，一般为50～75周/秒。例如联邦德国欧波同厂生产的C—100型解析测图仪实时程序（一般称为LOOP程序）为50周/秒，当每隔20 ms出现一个脉冲后，计算机自动终断其它所有程序的执行，并根据仪器的当前值进行实时程序的运算。一般仅需要几个ms，余下的时间里，可执行其它任务（见图13-3-4）。

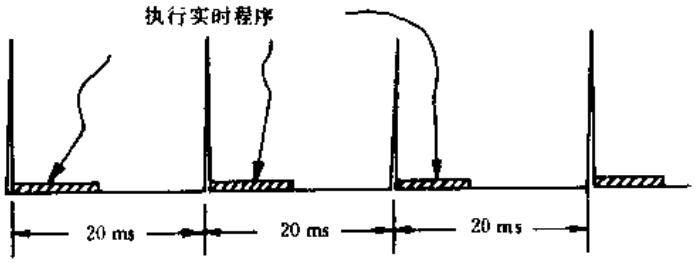


图 13-3-4

在解析测图仪上要完成哪些实时计算呢？主要是进行各有关坐标之间的变换和相应的系统误差改正。坐标变换包括：

——仪器架坐标与像片坐标的变换；

——点的像片坐标与模型坐标的变换；

——模型坐标与所规定的地面坐标的换算；

——模型坐标（或地面坐标）与绘图桌坐标的变换。

系统误差改正则包括：

——坐标量测仪器系统误差改正；

——像片系统误差改正；

——图纸系统误差改正；

——地球曲率和大气折光差的改正。

如果按本书第四章进行地面坐标的严格变换，则不再进行地球曲率改正。

由于实时程序的计算公式随仪器的输入输出和控制方案而变化，所以下面将分开叙述。

（二）输入模型坐标的计算公式（以C—100为例）

较多的解析测图仪采用输入模型坐标的方案。当手轮和脚盘运动时，将实时地获得模型坐标增量。此时的实时计算框图为图13-3-5所示。而模型坐标系原点则取左、右摄影中心的中点X方向与航带方向一致。(见图13-3-6)。

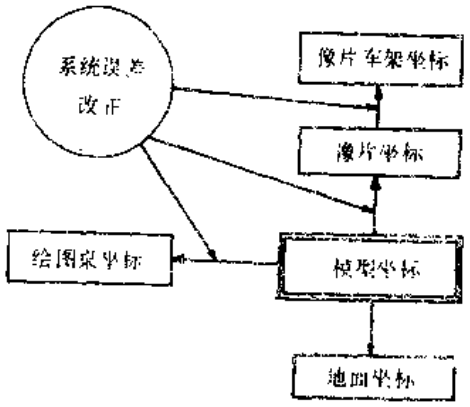


图 13-3-5

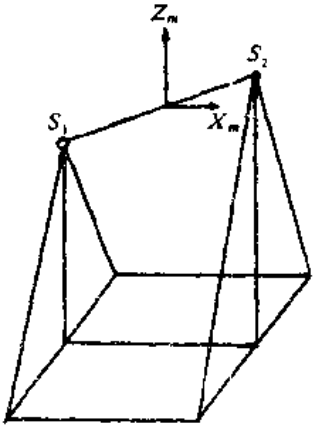


图 13-3-6

1.从模型坐标到地面坐标的变换

设在手轮和脚盘移动前的模型坐标为：

$$X'_m \ , \ Y'_m , \ Z'_m$$

当照准某点移动手轮和脚盘后便获得坐标增量：

$$dX_m \ , \ dY_m , dZ_m$$

则当前模型点的模型坐标为：

$$\begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_m \\ Y'_m \\ Z'_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX_m \\ dY_m \\ dZ_m \end{bmatrix} \tag{13-2}$$

利用下列公式将模型坐标变换为地面坐标：

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_g^0 \\ Y_g^0 \\ Z_g^0 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} \tag{13-3}$$

式中

$$\begin{bmatrix} X_g^0 \\ Y_g^0 \\ Z_g^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{s_1} \\ Y_{s_1} \\ Z_{s_1} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{s_2} \\ Y_{s_2} \\ Z_{s_2} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \tag{13-4}$$

且其中的$[X_{s_1}, Y_{s_1}, Z_{s_1}]^T$和$[X_{s_2}, Y_{s_2}, Z_{s_2}]^T$分别为左、右投影中心的地面坐标，$[B_x, B_y, B_z]^T$为模型基线分量，而$G$矩阵为旋转矩阵：

$$G=\begin{bmatrix} g_1 & -g_2 & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix}=m\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13-5}$$

这里的 m 为模型比例尺分母，θ 为平面旋转角，习惯上总是利用这种旋转使模型的 X_m 方向大致与航带方向一致。这种方法是地面坐标变换（第四章）中的简化方法。这种变换中要考虑地球曲率的影响。

上述变换中的有关参数已由模型的绝对定向或空中三角测量中求得，即所谓的大地坐标正反变换。

2.地球曲率改正

地球曲率和大气折光差的影响，如直接在模型坐标中改正是较为有利的。C—100 型解析测图仪只考虑了地球曲率引起的高程改正，所用公式为：

$$\Delta Z_g=\frac{D^2}{2R}=\frac{1}{2R}(X_g^2+Y_g^2)=\frac{m^2}{2R}(X_m^2+Y_m^2) \tag{13-6}$$

式中 R 为地球曲率半径。将改正数化算为模型坐标系中的高程改正量，则为

$$\Delta Z_m=\frac{\Delta Z_g}{m}=\frac{m}{2R}(X_m^2+Y_m^2) \tag{13-7}$$

3.从模型坐标到图面坐标的变换

从模型坐标变换至图面坐标，除了考虑到平移、图面旋转和比例尺缩放外，还应考虑绘图材料的不均匀变形和绘图桌的线性误差。此时用仿射变换公式：

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix}=\frac{1}{M}\begin{bmatrix} X_g^0 \\ Y_g^0 \\ Z_g^0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & 0 \\ t_3 & t_4 & 0 \\ 0 & 0 & t_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} \tag{13-8}$$

式中，M 为成图比例尺分母，t_1，t_2，t_3，t_4，t_5 表示三个轴向不等的比例尺缩放系数及旋转与不正交误差。这些参数已在图板定向时测出。

4.从模型坐标到像片坐标的变换

经地球曲率改正后的模型坐标，按照共线方程，便可得到左、右片上的像点坐标。对于左片有：

$$\left.\begin{aligned} x_L&=-f\frac{a_{L_1}\left(X_m+\frac{B_x}{2}\right)+b_{L_1}\left(Y_m+\frac{B_y}{2}\right)+c_{L_1}\left(Z_m+\frac{B_z}{2}\right)}{a_{L_3}\left(X_m+\frac{B_x}{2}\right)+b_{L_3}\left(Y_m+\frac{B_y}{2}\right)+c_{L_3}\left(Z_m+\frac{B_z}{2}\right)} \\ y_L&=-f\frac{a_{L_2}\left(X_m+\frac{B_x}{2}\right)+b_{L_2}\left(Y_m+\frac{B_y}{2}\right)+c_{L_2}\left(Z_m+\frac{B_z}{2}\right)}{a_{L_3}\left(X_m+\frac{B_x}{2}\right)+b_{L_3}\left(Y_m+\frac{B_y}{2}\right)+c_{L_3}\left(Z_m+\frac{B_z}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{13-9}$$

对于右片也可列出同样的解算公式。这里涉及到像片外方位元素，它们应由相对、绝对定向或一步定向法中求出。

5.畸变改正

上面计算的像点坐标未考虑到物镜畸变差的影响，必须加入畸变差改正，才能得到实际的像点坐标。C—100解析测图仪对畸变差的改正只限于径向畸变。令像点的辐射距为r

$$r=\sqrt{(x'^2)+(y'^2)} \tag{13-10}$$

根据航摄仪鉴定所提供的畸变曲线求得辐射距为r处的改正值Δy，于是实际的像点坐标为：

$$\left.\begin{aligned} x &= x^1\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\\ y &= y^1\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{13-11}$$

式中的x^1，y^1表示畸变差改正前计算的像点坐标，x，y为改正后的实际像点坐标。

6.从像片坐标到像片车架坐标的变换

$$\begin{bmatrix} x_{C_i}\\ y_{C_i}\\ -f_{C_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{C_{i0}}\\ y_{C_{i0}}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0\\ L_3 & L_4 & 0\\ 0 & 0 & L_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_L\\ y_L\\ -f_L\end{bmatrix}. \tag{13-12}$$

式中仍以左片为例，x_{C_L}，y_{C_L}表示左片的像片车架坐标。变换参数$x_{C_{i0}}$、$y_{C_{i0}}$和L_i（$i=1$，……，5）概括了内定向、像片材料变形和量测仪线性系统误差。这些参数通过对框标的内定向而事先测定。

（三）输入地面坐标的方案（以US—1，2为例）

该方案设计原则仍为输入物方坐标，但是，它可直接输入地面测量坐标甚至地理坐标，实时地进行与模型坐标的换算，使得在处理各种实际问题时具有较大的灵活性。例如，当小比例尺测图和卫星影像测图时，需要从大地经纬度及椭球面高到局部切面直角坐标系的坐标变换，这一设计方案便具有突出的优点了。下面以US—1和US—2型解析测图仪为例，列出所采用的计算关系式。

1.手轮和脚盘增量到地面坐标的变换

因为输入的是地面坐标，而仪器手轮和脚盘转动只能得出模型坐标的增量，故在手轮、脚盘输入的增量与地面坐标之间要有一个准模型坐标或摄影测量坐标的过渡。设手轮、脚盘输入增量为dL，dR，dF，将它先转换为准模型坐标增量dX，dY，dZ：

$$\begin{bmatrix} dX_i\\ dY_i\\ dZ_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13}\\ v_{21} & v_{22} & v_{23}\\ v_{31} & v_{32} & v_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dL\\ dR\\ dF\end{bmatrix} \tag{13-13}$$

再将准模型坐标增量转换得到地面测量坐标X_g，Y_g，Z_g：

$$\begin{bmatrix} X_g\\ Y_g\\ Z_g\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix} X_g\\ Y_g\\ Z_g\end{bmatrix}_{i-1}+\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13}\\ w_{21} & w_{22} & w_{23}\\ w_{31} & w_{32} & w_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dX\\ dY\\ dZ\end{bmatrix}_i \tag{13-14}$$

这里使用了v、w两个变换矩阵，目的是提供更灵活的操作性能。对于v矩阵，当左手轮控制X，右手轮控制Y，脚盘控制Z时，则有：$v_{11}=v_{22}=v_{33}=1$，而其它$v_{ij}=0$。w矩阵用以实现准模型坐标与地面测量坐标系间的旋转和比例缩放。灵活地选择w阵的系

数就可以实现沿任意方向的断面测量。如无特殊要求，可使准模型坐标的X坐标与航线方向平行。

2.地面坐标到模型坐标的转换

由于输入的地面坐标可能是地理坐标，故必须先将曲面坐标转换为平面直角坐标，然后再转换为模型坐标。

为此，先将地面坐标平移到局部坐标系中

$$\begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{g0} \\ Y_{g0} \end{bmatrix} \tag{13-15}$$

再利用下面的三次多项式转换成直角坐标：

$$\left.\begin{aligned} X_R &= g_{10} + g_{11}X_H + g_{12}Y_H + g_{13}X_H^2 + g_{14}X_HY_H + g_{15}Y_H^2 + \\ &\quad + g_{16}X_H^3 + g_{17}X_H^2Y_H + g_{18}X_HY_H^2 + g_{19}Y_H^3 \\ Y_R &= g_{20} + g_{21}X_H + g_{22}Y_H + g_{23}X_H^2 + g_{24}X_HY_H + g_{25}Y_H^2 + \\ &\quad + g_{26}X_H^3 + g_{27}X_H^2Y_H + g_{28}X_HY_H^2 + g_{29}Y_H^3 \end{aligned}\right\} \tag{13-16}$$

式中g_{ij}共18个变换参数通过至少九个点在变换前后两个坐标系的已知坐标求出。当输入的地面坐标已经是直角坐标时，式（13-16）中$g_{11} = g_{22} = 1$，其余的$g_{ij} = 0$。

最后转换成模型坐标：

$$\begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{cm} \\ Y_{cm} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13-17}$$

式中X_m, Y_m, Z_m为模型坐标，m为模型比例尺分母，θ为模型坐标系相对于地面直角坐标系的平面旋转角，即航带方向与地面直角坐标系X方向之夹角。X_{cm}、Y_{cm}表示把模型坐标系原点平移到基线中点处，$Z_{cm} = 0$则表明原点就在水准面上，它是基线中点在水准面的投影点。

3.地球曲率改正

US型解析测图仪在模型坐标系中改正地球曲率的影响，平面和高程均作改正。改正后的模型坐标设为X_p，Y_p，Z_p，则有：

$$\left.\begin{aligned} X_p &= G_2 \cdot X'_m \\ Y_p &= G_2 \cdot Y'_m \\ Z_p &= Z_m - G_1/2R_m + G_1^2/24R_m^2 - Z_mG_1/2R_m^3 \end{aligned}\right\} \tag{13-18}$$

式中：

$$\begin{bmatrix} X'_m \\ Y'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{cm} \\ Y_{cm} \end{bmatrix}$$

$$G_1 = (X'_m)^2 + (Y'_m)^2$$

$$G_2 = 1 - G_1/6R_m^2 + Z_m/R_m$$

R_m为依模型比例尺缩小的地球曲率半径。

4.建立以摄站为原点的局部空间直角坐标系

进行大气折光差改正和进行像点坐标变换，均需用到以摄站为原点的局部空间直角坐

标系。考虑到比例尺特小，摄影覆盖面积特大的像对，左、右摄站的铅垂线将不再平行，对于左摄站有下列一般关系式：

$$\begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} \tag{13-19}$$

式中，X_L，Y_L，Z_L为 P 点在左摄站为原点的局部空间直角坐标系中的坐标，X_S，Y_S，Z_S为左摄站在原模型坐标系中坐标，s_{ij}反映铅垂线不平行的影响。对于右摄站可列出类似关系式。

一般情况下，基线范围内铅垂线受地球曲率的影响很小，故通常情况下，$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 1$，其它$s_{ij} = 0$。

5.大气折光差改正

仅对局部直角坐标系中Z_L坐标加以改正，

$$dZ_A = K_{A1} + (Z_L + K_{A2})\ G_3 \cdot m \tag{13-20}$$

其中：

$$G_3 = 1 + (X_L^2 + Y_L^2)/Z_L^2$$

且 m为模型比例尺分母，K_{A1}和K_{A2}为给定的折光差常数。

6.变换为像片坐标

设X，Y，Z为经过折光差改正后的以摄站为原点的空间直角坐标：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L + dZ_A \end{bmatrix} \tag{13-21}$$

利用共线方程求得像片上理想的像点坐标：

$$\left.\begin{aligned} x &= -f\frac{a_1X + b_1Y + c_1Z}{a_3X + b_3Y + c_3Z} \\ y &= -f\frac{a_2X + b_2Y + c_2Z}{a_3X + b_3Y + c_3Z} \end{aligned}\right\} \tag{13-22}$$

7.镜箱畸变改正

利用摄影机检定数据，对理想的像点坐标进行改正，获得实际的像点坐标x_d，y_d：

$$\left.\begin{aligned} x_d &= x + \Delta x_1 + \Delta x_2 + x_{0f} \\ y_d &= y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + y_{0f} \end{aligned}\right\} \tag{13-23}$$

式中：x_{0f}，y_{0f}为像主点偏移值；Δx_1和Δy_1为经向畸变改正；Δx_2和Δy_2为切向畸变改正，其值分别为：

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= \frac{\Delta r}{r}x = x\ (k_1 + k_2r^2 + k_3r^4) \\ \Delta y_1 &= \frac{\Delta r}{r}y = y\ (k_1 + k_2r^2 + k_3r^4) \end{aligned}\right\} \tag{13-24}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_2 &= [k_4\ (r^2+2x^2)+2k_5 xy]\ [1+k_6 r^2]\\ \Delta y_2 &= [2k_4 xy+k_5\ (r^2+2y^2)]\ [1+k_6 r^2]\end{aligned}\right\} \tag{13-25}$$

式中k_1，……、k_6系由摄影机鉴定给出的畸变差常数。如果没有进行这项检验，则相应系数安置为0。

8.从像片坐标到像片车架坐标的变换

经系统误差改正后的像片坐标，需变换为像片车架的坐标增量，以实现反馈驱动。变换用下列关系式：

$$\left.\begin{aligned}x_c &= c_{11}+c_{12}x_d+c_{13}y_d+c_{14}x_d y_d\\ y_c &= c_{21}+c_{21}x_d+c_{23}y_d+c_{24}x_d y_d\end{aligned}\right\} \tag{13-26}$$

该变换中包括了内定向、像片材料系统变形和像片车架量测机构的系统线性误差，共八个参数，需要量测4～8个框标点。

9.从地面坐标到绘图桌坐标的变换

该类型仪器输入的是地面坐标，宜直接将地面坐标变换至绘图桌坐标。当然，在变换中也要考虑到地面坐标可能是曲面坐标，故应采用如下的变换关系式：

$$\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{11}&v_{12}&v_{13}\\v_{21}&v_{22}&v_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_H\\Y_H\\Z_g\end{bmatrix} \tag{13-27}$$

$$\left.\begin{aligned}X'_T &= t_{10}+t_{11}U+t_{12}V+t_{13}U^2+t_{14}UV+t_{15}V^2+\\ &\quad +t_{16}U^3+t_{17}U^2V+t_{18}UV^2+t_{19}V^3\\ Y'_T &= t_{20}+t_{21}U+t_{22}V+t_{23}U^2+t_{24}UV+t_{25}V^2+\\ &\quad +t_{26}U^3+t_{27}U^2V+t_{28}UV^2+t_{29}V^3\end{aligned}\right\} \tag{13-28}$$

$$\left.\begin{aligned}X_T &= X'_T-X_{T0}\\ Y_T &= Y_T-Y_{T0}\end{aligned}\right\} \tag{13-29}$$

这里的X_T和Y_T为最终驱动的绘图桌坐标，而X_{T_0}，Y_{T_0}为图板上的起始点坐标。式（13-28）的三次多项式用以实现从地面坐标到地图坐标的变换，它能满足小比例尺成图所需要的地图投影。当输入的坐标已是直角坐标时，$t_{11}=t_{22}=\frac{1}{M}$，其它的$t_{ij}=0$。式（13-27）提供灵活方面的软联结，包括旋转和轴系调换。例如，当勾绘等高线时，可置$v_{11}=v_{22}=1$，其它为零。当绘制XZ剖面图时，$v_{11}=v_{23}=1$，其它为零。这样就能在绘图桌输出各种图件。

（四）输入像片坐标的方案（以D.S型仪器为例）

这种实时解算方案中，手轮和脚盘的运动直接驱动像片车架，并将像片坐标移动增量实时地输入电子计算机，进而实时计算仪器上其它有关的反馈量和实现数字投影交会，该方案的典型仪器是意大利的D.S型解析测图仪。图13-3-7是它的结构示意图。

当测点时，输入的像片坐标为x_1，y_1和Δx，需要计算的为右片y_2坐标、模型坐标、地面坐标和图板坐标。而当测绘等高线时，输入的是像片坐标x_1，y_1和等高线高程θ_c，需要解求右片坐标x_2、y_2和模型坐标、地面坐标及图板坐标。这是与物方坐标型仪器不同之处。

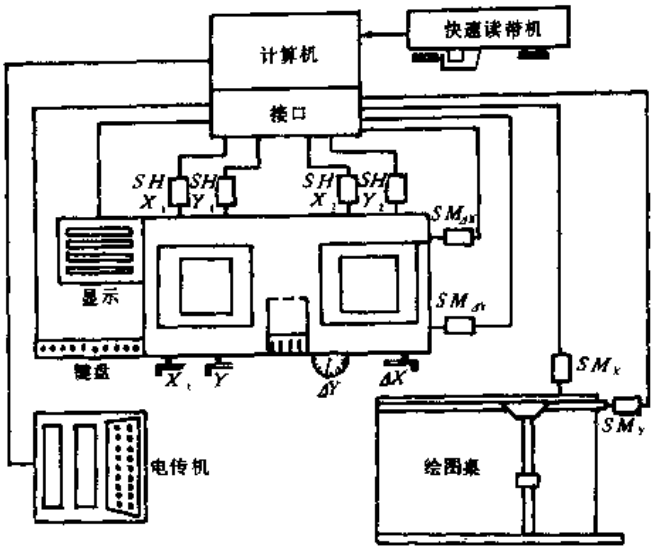


图 13 3 7

具体算法原理与公式如下：

（1）从像片坐标到像空间坐标的变换

如图13-3-8所示，D.S型仪器取S_1为坐标原点，空间基线S_1S_2为像空辅助坐标X轴，左主核面为XZ面。同名像点p_1和p_2的像空辅助坐标分别为：

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\-f\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}X_2-B\\Y_2\\Z_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\-f\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{13-30}$$

式中，B为空间基线（按模型比例尺计），a_{ij}和b_{ij}由相对定向元素求得。

（2）计算y_2

在一般情况下，D．S型仪器输入x_1，y_1和Δx，需由计算机解求y_2，并给右像片车架以反馈作用，使其在立体观测中自动消除上下视差。根据上面选择的像空辅助坐标系，有：

$$\frac{Y_1}{Z_1}=\frac{Y_2}{Z_2}\tag{13-31}$$

即：

$$\frac{a_{21}x_1+a_{22}y_1-a_{23}f}{a_{31}x_1+a_{32}y_1-a_{33}f}=\frac{b_{21}x_2+b_{22}y_2-b_{23}f}{b_{31}x_2+b_{32}y_2-b_{33}f}\tag{13-32}$$

其中，x_1，y_1和$x_2=x_1-\Delta x$为输入量，各方向余弦值a_{ij}和b_{ij}已由相对定向求出。于是可令：

$$T_y=\frac{a_{21}x_1+a_{22}y_1-a_{23}f}{a_{31}x_1+a_{32}y_1-a_{33}f}=\frac{Y_1}{Z_1}\tag{13-33}$$

则得到

$$y_2 = \frac{(b_{21} - b_{31}T_y)\ x_2 - (b_{23} - b_{33}T_y)\ f}{(b_{33}T_y - b_{22})} \tag{13-34}$$

（3）模型点坐标计算

同样，按图13-3-8所示的像空辅助坐标系可求出模型点M在S_1—XYZ坐标系中的坐标X_M, Y_M和Z_M。

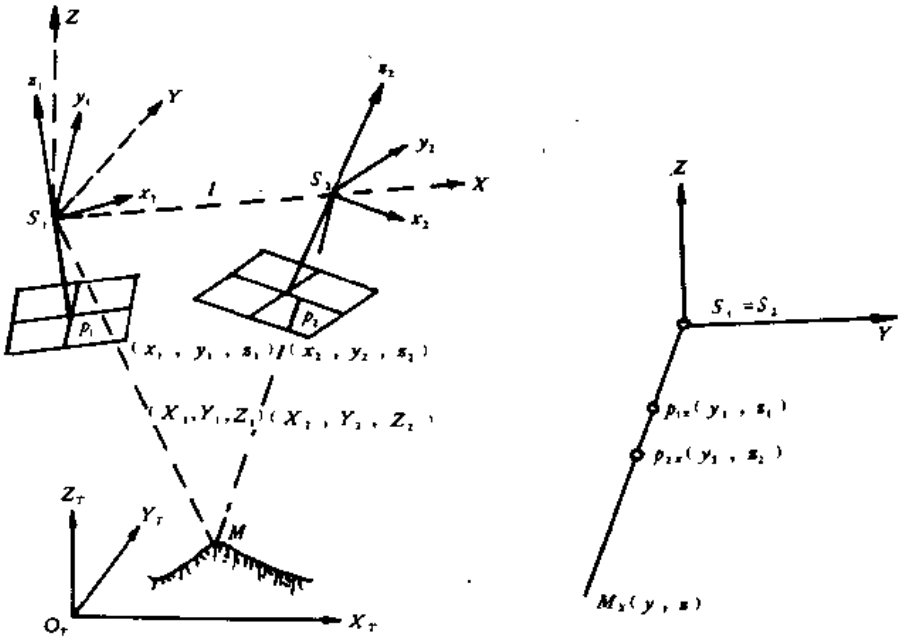


图 13-3-8

由图知，在此坐标系中有：

$$\frac{X_M}{Z_M} = \frac{X_1}{Z_1}, \qquad \frac{X_M - B}{Z_M} = \frac{X_2 - B}{Z_2}$$

两式相减得：

$$\frac{B}{Z_M} = \frac{X_1}{Z_1} - \frac{X_2 - B}{Z_2}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} Z_M &= \frac{B}{\dfrac{X_1}{Z_1} - \dfrac{X_2 - B}{Z_2}} \\ X_M &= Z_M \cdot \frac{X_1}{Z_1} \\ Y_M &= Z_M \cdot \frac{Y_1}{Z_1} \end{aligned}\right\} \tag{13-35}$$

（4）地面坐标计算

模型坐标X_M, Y_M, Z_M经旋转，缩放、平移就可以换算为地面坐标系的坐标：

$$\begin{bmatrix} E \\ N \\ Q \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{s_1} \\ N_{s_1} \\ Q_{s_1} \end{bmatrix} \tag{13-36}$$

式中：C_{ij}、E_{s_1}，N_{s_1}，Q_{s_1}及λ是由绝对定向确定的参数。

由E，N，Q计算图面坐标可仿照式(13-8)进行。此处不重复列出。

综合以上过程，可将D.S型解析测图仪上测点过程归纳如框图13-3-9。

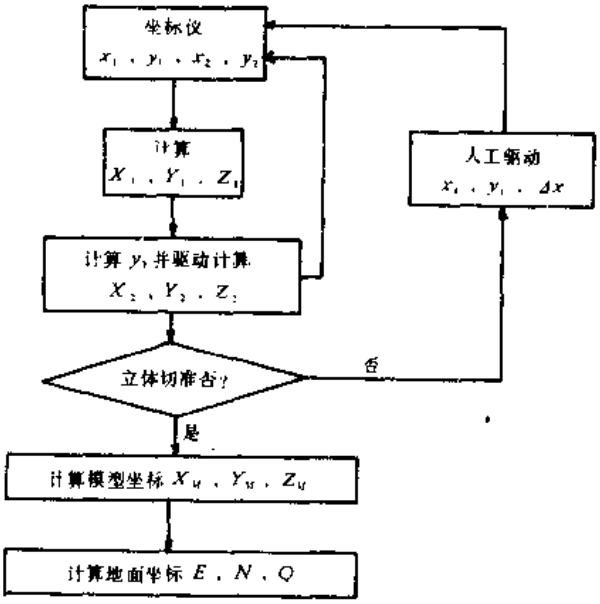


图 13-3-9

（5）测绘等高线

在D.S型仪器上测绘等高线时，因为等高线有固定的高程Q_C，且作为输入数据，故此时左片坐标x_1、y_1仍由手轮驱动，而右片坐标x_2、y_2必须由电子计算机实时地解算出来，并驱动右像盘移动，从而保证测标切在立体模型上无左右和上下视差。

计算x_2、y_2的原理如下。

设

$$R = \frac{Q}{\lambda} = \frac{Q_C - Q_{s_1}}{\lambda} \tag{13-37}$$

由式（13-36）第三式和式（13-35）可得：

$$R = \frac{Q}{\lambda} = c_{31}X_M + c_{32}Y_M + c_{33}Z_M =$$

$$= \frac{B}{\frac{X_1}{Z_1} - \frac{X_2 - B}{Z_2}} \left[\frac{X_1}{Z_1}c_{31} + \frac{Y_1}{Z_1}c_{32} + c_{33} \right] \tag{13-38}$$

其中R、B、X_1、Y_1、Z_1及c_{ij}均已知，故可将上式变换为：

$$\frac{X_2 - B}{Z_2} = \frac{X_1}{Z_1} - \left(c_{31}\frac{X_1}{Z_1} + c_{32}\frac{Y_1}{Z_1} + c_{33} \right) \cdot \frac{B}{R} \tag{13-39}$$

式（13-39）左端之比值可引用式（13-30）的表达式，故有：

$$\frac{b_{11}x_2 + b_{12}y_2 - b_{13}f}{b_{31}x_2 + b_{32}y_2 - b_{33}f} = \frac{X_1}{Z_1} - \left(c_{31}\frac{X_1}{Z_1} + c_{32}\frac{Y_1}{Z_1} + c_{33} \right) \frac{B}{R} \tag{13-40}$$

再由$\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}$得到：

$$\frac{b_{21}x_2 + b_{22}y_2 - b_{23}f}{b_{31}x_2 + b_{33}y_2 - b_{33}f} = \frac{Y_1}{Z_1} \tag{13-41}$$

联立解求式（13-40）和（13-41）可实时地求出x_2、y_2，提供给右像架伺服系统。并于计算模型坐标X_M，Y_M，Z_M和地面坐标E，N的公式同前。图13-3-10为D.S解析测图仪作等高线

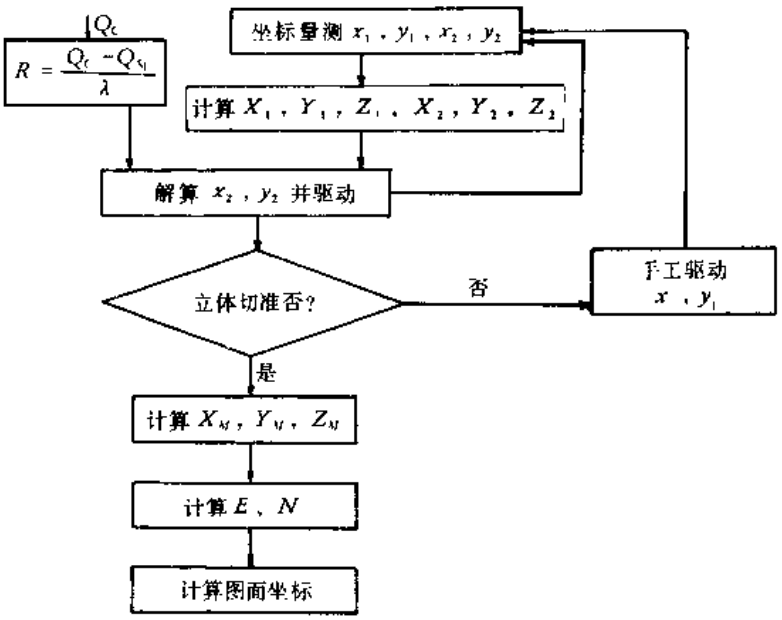


图 13 3-10

测绘时的运算框图。

三、计算机操作系统与摄影测量软件

上面介绍了实时计算的主要计算公式，现在我们从总体上来看解析测图仪的软件。

由于解析测图仪上配备的电子计算机均为通用的标准产品，所以解析测图仪的软件必然有计算机操作系统和摄影测量软件两大部分。前者用来管理和支持整个解析测图仪系统的工作，后者则是为执行摄影测量任务而编写的各种程序，包含实时计算程序和应用程序。

（一）计算机操作系统

这是由计算机厂家提供的软件，通常称为系统软件。它在计算机运行过程中担负着一系列重要任务，包括：指令收集与执行、内存管理、文件编辑、程序编译与运行控制、外围设备触发等。而且，解析测图仪的实时程序和应用程序也由它管理和支持。因此、选择计算机应注意选择好的操作系统。

（二）摄影测量软件

这是专门为摄影测量目的制作的软件，其功能在于建立被测像对的数学立体模型，并利用这个模型完成各项量测任务。它分为实时程序和应用程序两类。

1.实时程序

实时程序体现数字导杆作用，它是通过必要的坐标变换计算后在伺服机构作用下推动有关的部件运动的程序系统，其具体计算公式已在上文中作了介绍。

为了保证操作员在立体观察和量测的过程中看到完好的立体模型而不致察觉到模型有闪跳，从视觉生理学的要求，这种实时计算的速度应大于每秒30周，即必须以极高的频率

实现重复计算。在各类解析测图仪上通常可达到30～100周/秒，譬如C—130实时程序的频率为50周/秒。

由于实时程序时间要求强，而且要在每个周期中为应用程序的执行腾出时间，因此实时程序必须设计得十分精巧，数学模型要正确，通讯效率要高，优先结构要严密。

通常，实时程序由厂家用汇编或机器码语言写成，并经过优化。它不需要人工操作，而是在一时钟的控制下，自动按一定周期启动和执行，这已在图13-3-4中介绍。由于实时程序由厂家设计，用户一般难以修改。

2.应用程序

应用程序是用来完成用户各种要求的摄影测量作业任务的软件。这类程序一般用高级语言编写，在工作过程中由作业员操作运行。各仪器厂家提供的应用程序均能完成各种常规的摄影测量作业，但彼此并不完全相同。用户可以对应用程序进行修改和补充，也可以自行编写新的应用程序。与实时程序相比，应用程序的时间性要求不那么强，但它同样要求精确、正确、结构优化、执行快速。

目前的各种解析测图仪均包含下列的基本应用软件。

（1）内定向

在解析测图仪上像片是任意安置在像片车架上，像片架无 k 旋转螺旋，像片坐标与像片车架坐标间的关系依靠内定向软件来建立。通过量测 4 ～ 8 个框标点，用最小二乘法解算就可以求出内定向元素，供实时程序中的坐标变换使用。

（2）相对定向

该程序保证相对定向半自动地进行。程序启动后，能自动依次地驱动车架到达六个标准点位，作业员只需消除观测点处的上下视差，该点的左、右像片坐标便自动记入计算机。全部点观测完毕后，计算机就用最小二乘法解算相对定向方程，并显示相对定向元素和各点的残差，由作业员判断是否需要重测。

（3）绝对定向

该程序紧接相对定向之后，用以解求绝对定向元素。程序执行前，先要输入地面控制点坐标值，该值亦可由解析空中三角测量加密求得。操作过程中立体切准控制点，记入控制点观测的模型坐标。然后用最小二乘法解算定向方程，输出定向参数和控制点余差，同样由作业员决定是接受该结果或需要重测。

（4）一步定向（单模型光束法严密求解）

利用单模型光束法严密求解方法，可以将相对定向和绝对定向合并进行。此时，先输入地面控制点坐标，然后，同上法量测标准配置点和控制点。量测完毕后，用最小二乘法严密平差方法，输出外方位元素和所有点上的余差。从理论上讲，一步定向比分步定向好。但是，当控制点有小粗差时，所建立的数字交会模型的质量可能会受到影响而下降。这种方法在高精度和高质量的摄影测量作业任务中，尤其是在近景摄影测量任务中常常被采用。

（5）模型存贮与恢复

该程序可以把确定模型的各个参数以及有关数据存贮起来，以后需要时，可以利用这些参数精确地恢复出原来的模型，面无需重复定向。如果像片在仪器上未动，关机后重开

机时，可直接得到原来已建立的模型。如果像片已取下，或放到另一台解析测图仪上去，则只要进行像片内定向，则可以利用已存贮的参数便可恢复原来的模型。这正是解析测图仪的一个优点。更明确地说，凡进行过空中三角测量的像片获得了像片外方位元素后，在解析测图仪上测图时，均可利用这个程序省去在仪器上的相对和绝对定向操作。

（6）点观察

该程序能够根据输入的点号，找出已存贮的该点的像片坐标、模型坐标或地面坐标，并自动将仪器驱动到指定点的观察点位，从而实现对该点的检测、修测或在其附近设置点组。这不仅可提高作业速度，而且有利于质量控制和提高量测结果的可靠性。

（7）数字地面模型（DTM）采样

在这个程序控制下，测标可以沿着XY平面上任意给定的轨迹移动，而作业员只需控制Z方向（一般均安排用右手轮的转动）使测标切准模型并掌握扫描的开启和停止。扫描观测的数据可按规定的格式记录下来。扫描的方向可以沿X坐标或Y坐标方向，也可以沿任意直线方向或沿不规则曲线扫描。记录间隔可以是按距离或按时间。记录方式可以是自动记录，也可以是按距离或按时间到达下一观测位置后由作业员键入或用脚踏开关控制。

按照一定大小的格网采集DTM数据时，格网的边长大小取决于DTM的精度要求。也可以采用渐进取样的方法，先对一个粗格网进行采样，然后通过对采集数据的分析，当地面坡度变化大于某一阈值时，需进一步用细格网补充采样，如此反复，故取名渐进取样法。

（8）面积、体积和矢量计算

在该程序状态下依次观测一系列的点，计算机便可计算出任意两点间的矢量及由若干个点所包围图形的面积和体积。

（9）空中三角测量（在线和离线）

解析测图仪可以进行在线空中三角测量，也可利用其电子计算机的后台处理进行离线空中三角测量。当执行在线空中三角测量程序时，凡量测本模型与前一模型公共点时，仪器能根据上一模型量测中已存贮的坐标，自动到达该点位上，以便于作业员立体照准和量测该点。一个模型量测结束后程序自动进行相对定向，并利用某种方式来发现和剔除观测粗差，作业员可及时修正和重测。

通常整区的空中三角测量区域网平差不包括在线空中三角测量中，而只是用剔除了粗差的全部区域网观测数据转入后台计算。此时利用已在解析测图仪软件包中存放的区域网平差程序。这种大型程序系统一般不是由工厂自己研制，而是由有关大学或研究所提供的。

（10）机助绘图和数字测图

由于解析测图仪与电子计算机相结合，所有测绘结果均先要以数字形式存于计算机中，然后才用来在数控绘图机上绘图。因此在整个测图过程中可以利用计算机来控制和辅助测图工作。凡用于此目的的软件即为机助绘图软件。也可以将解析测图仪与数控绘图仪脱开，而利用电子计算机及其图形屏幕直接测制存贮于计算机中的数字地图。此时对软件要求较高，一般应有一个较好的数据库系统来支持数字测图工作。这类软件统称数字测图软件。

数字测图软件有较强的图形编辑功能，通过图形编辑后，数字测图结果可在数控绘图机上输出为图形产品。

为了进一步扩大解析测图仪功能和提高作业的自动化程度，在各类解析测图仪上总在不断地研制和开发新的应用程序。目前阶段重点开发的应用软件可以列举如下。

（1）在线影像匹配和影像相关

该软件是用来从加在解析测图仪上的一对CCD摄像机获得数字影像，通过在线影像匹配和影像相关的算法，自动确定左、右片上的同名影像，以代替人眼的立体观测。关于系统的设置和软件的原理将在《数字摄影测量》课程中详细介绍。

（2）自动采集数字表面模型

在线影像匹配和影像相关的软件基础上，可以实现数字表面模型（包括地表面的数字高程模型和近景目标的数字物体模型）的自动采集。在此程序中的数据处理原则与前述渐近取样相反，是从大量的、密集采集的数据点中剔除不可靠的粗差点，可采用稳健估计原理从细到粗，建立一个高质量的数字表面模型。详细讨论亦将在《数字摄影测量》课程中进行。

（3）利用解析测图仪的半自动或全自动转点

在本书第三章中§3.2已介绍了利用解析测图仪转点和利用高精度在线数字相关进行转点的方法。前者为半自动方法、后者为全自动方法。根据这些原理可以编制相应的软件。利用这种软件，既可减少或免除地面标志，又可避免在像片上转刺点，从而达到高质量、高速度的同名点辨认和转刺。

（4）近景摄影测量处理软件

近景摄影测量在解析测图仪上进行作业是最为理想的，这是因为解析测图仪不受主距、倾角、摄影方式、成像几何的限制。常规近景摄影测量在解析测图仪上作业，可利用标准软件，只要将Y坐标与Z坐标轴对换。大交向和全景摄影像片的处理，非量测像片的DLT处理，所研究物体三视图制作等则需要开发和引入相应的软件。具体方法将在近景摄影测量课程中讲述。

（5）遥感图像的解析处理

随着遥感技术的发展，各种遥感图像的空间分辨率正在不断提高，空间影像的测图应用将逐步变成现实。例如Spacelab和LFC（大像幅相机）的框幅式图像、SPOT全色片图像、三行CCD阵列数字影像以及侧视需达图象等均可在解析测图仪上进行处理。对于空间框幅式图像可直接利用现有解析测图仪的标准软件，但要注意地球曲率和大气折光问题，最好要用严格的坐标系变换（见第四章）。对于CCD线性阵列传感器影像的解析摄影测量处理原理将在下文第十五章中讨论。对于其它遥感图像的解析处理将在《遥感图像处理原理和方法》一书中讲述。

最后，在结束本节的讨论时，再扼要地将解析测图仪的程序结构用图13-3-11表示出来。

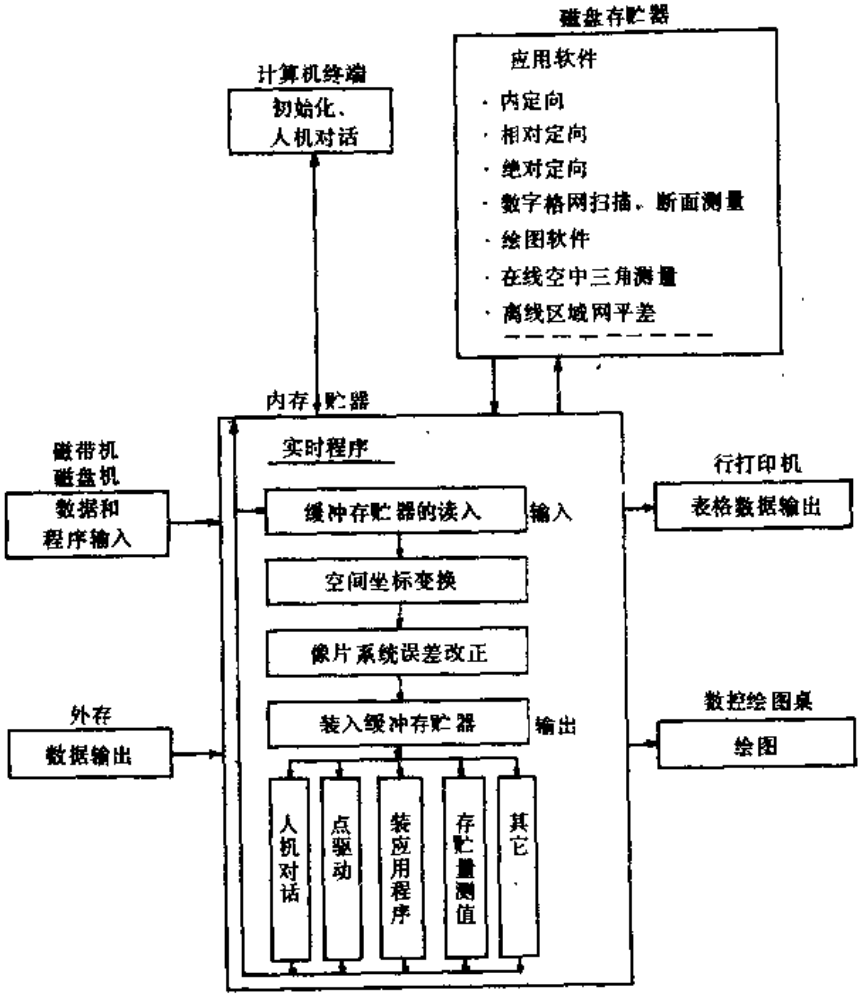


图 13-3-11

§13.4 数控绘图桌和图形影像叠置系统

数控绘图桌可以视为解析测图仪的一个组成部分，但从数字测图意义讲，它自身又可独立地视为在计算机控制下的图形输出设备。至于图形影像叠置系统则是解析测图仪的非标准配件，由用户选择订货。在这一节中对它们作简要介绍。

一、数控绘图桌

数控绘图桌是功能较强的电子绘图设备，在电子计算机的控制下输出所需要的图形。因此是众多类型的绘图机中的一种。

（一）绘图机的分类

绘图机的类型很多，精度各不相同，从0.3mm到0.025mm。绘图的幅面大小也各不相同，必须大于图幅面积的绘图机才可用于测绘中，绘图机的速度也各不相同，速度最快的可以达到90 m/min。从输出方式可将绘图机分为两类：一类是扫描绘图机。它是一种栅格

式的图形输出装置，实际上是一种数字影像的输出设备。它逐个像素、依次地输出灰度值。当作为线划图输出设备时，像素的灰度仅分为两级（0，1），即输出二值影像。另一类是向量式跟踪绘图机。它是向量式的图形输出装置，绘图笔按规定的方法、一步一步地跟踪绘出相应的线条来。摄影测量仪器中的数控绘图桌均为平台式的跟踪绘图机，如瑞士威特厂的TAZ和TA10，克恩厂的GP1和联邦德国欧波同厂的DZ—5，6，7和PIani-TABT102等。

（二）跟踪绘图机的工作原理

跟踪绘图机由两个相互垂直的传动系统来驱动绘图笔的运动，驱动电机则由电子计算机控制。绘图笔在两个驱动电机作用下的运动形成在八个方向上的基本动作（见图13-4-1）。再加上由计算机控制的绘图头的抬笔和落笔，共有十个基本动作。正是通过这十个基本动作，便可以组合地绘出各种复杂的图形、直线、曲线以及数字和文字注记来。例如图13-4-2所示的便是在绘图机上输出一条直线的放大情形。它是由一系列基本动作组成的折线：$+\Delta X$，$+\Delta X+\Delta Y$，$+\Delta X$，$+\Delta X+\Delta Y$，……。由于步距$\Delta X=\Delta Y=0.05\sim0.02$mm，是很小的，人眼不可能分辨出有折线的任何感觉，看到的是一条很好的直线。所以，这种数控绘图仪与通常的机械传动或电传动的绘图桌是不一样的。

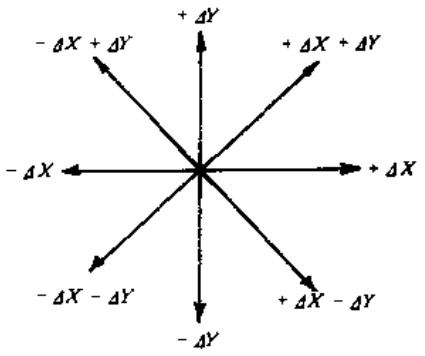


图 13-4-1

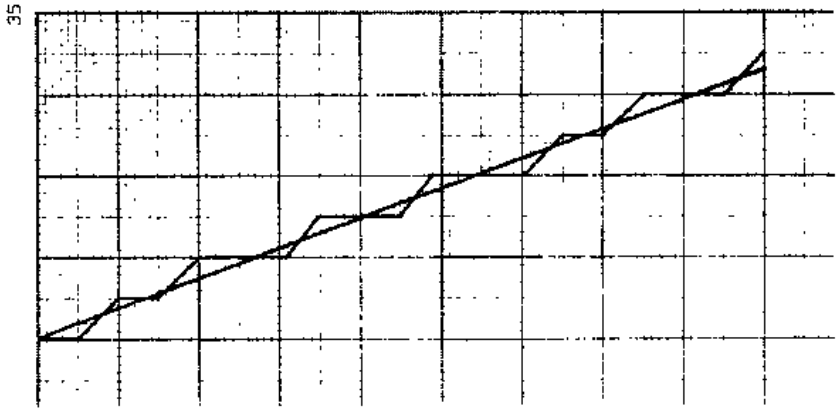


图 13-4-2

（三）用作绘图机传动系统的驱动电机

在数控绘图机中常用的驱动电机有步进电机、伺服电机和直线电机。这些电机的结构不同，性能也不一样。

步进电机是一种将电脉冲转变为相应的角位移（转动）的电动机。当外加一个脉冲信号，电机转动一步（一个固定的角度），因此具有计量作用。步进电机由定子和转子组成（见图13-4-3），定子上有三对磁极AA'，BB'，CC'，它们的轴线间夹角为120°，每一对磁极

上有一相绕组（图中未表示出），转子上没有绕组。在定子和转子上都有对应的等齿距的小齿，定子各磁极上的中心小齿都通过相应的磁极轴线，而转子上只均匀分布着40个小齿。当AA'的绕组通电时，其它两相不通电，在磁场作用下，转子的某一对小齿（如图中的1和1′）一定要通过轴线AA'，转子才能处于平衡状态。这时磁极AA'与BB'轴线（夹角为120°）之间所对应于转子上小齿数为

$$\frac{40}{3}=13+\frac{1}{3}$$

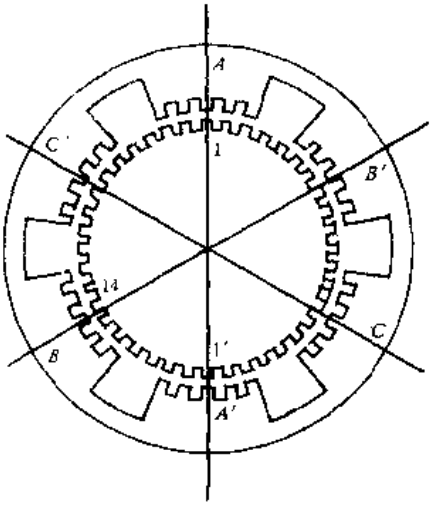


图 13-4-3

由此知B相磁极中心轴线沿ABC方向超前转子上第14号小齿的$\frac{1}{3}$齿距。这时若B相通电，而A相断电，14号小齿要对准BB'轴线，转子就要转动$\frac{1}{3}$齿距，此时所对应的步距角为$\frac{360°}{40\times3}=3°$。因此，每改变一次通电的相极，转子就正（或反）转一个步距角3°。如果该电机直接驱动一螺距为2 mm的丝杆，该步距角3°所对应的绘图头的平移是为$\frac{2\text{ mm}\times3}{360°}=\frac{1}{60}\text{mm}\approx0.0167\text{ mm}$。

各类步进电机型号不同、步距角也不一样，但基本原理是相同的。

伺服电机和普通电机一样，它的定子是由永久磁铁和励磁线圈构成，而转子是一块极薄的印刷线圈板，因此它的转动惯性很小，能接受频繁变化的模拟信号。它的转速由模拟信号的电流大小控制：电流大则转速快、电流小则转速慢。由于模拟信号是连续的，所以绘出的图形光滑。伺服电机的速度比步进电机快，每分钟可绘十几米到二十米。缺点是不能像步进电机那样有定位特性，故一般都在伺服系统中采用闭环控制来提高定位精度。

直线电机绘图机是本世纪70年代的产品。它是将一般电机中的定子和转子沿径向剖开，然后将定子和转子展开成平面。于是转子的转动变成了移动，故又称为动子。由于电磁感应，定子将动子（与绘图头一起）吸附在它的表面。但从动子的上表吹出高压气流，使之与定子间有一层气垫（约0.1mm）。由于它无需中间传动，故速度很快，可达90 m/min。

*（四）绘图的软件系统

电子绘图机进行数控绘图，绘图桌的一切动作均由软件控制，由各种不同功能的程序组成一个绘图的软件包，构成绘图的软件系统。只有具备了一个好的绘图软件包才能充分发挥绘图桌的功能。通常可以将绘图软件包中的程序分成三类：

（1）基本绘图子程序。这是一切绘图程序的基础，主要指控制绘图机动作的子程序，如移位、抬笔、落笔和换笔（包括更换颜色和粗细）等。也包括如数字和字母注记、直线插补等一些公用的基本程序。

（2）功能绘图子程序。这是由若干基本子程序组成的，用来完成某一独立的绘图功能的子程序块。例如用分段三次多项式插补法绘制光滑的曲线以及等高线高程注记等等。

（3）应用绘图程序。这是根据用户的需要为各种应用目的编制的专用绘图程序。例

如，根据数字高程模型绘制等高线图、等坡度线图、坡向图、断面图及立体透视图等。

所有的数控绘图仪一般均有基本绘图子程序，“智能化”程度高的绘图仪具有某些功能绘图子程序。而应用绘图程序则由解析测图仪生产厂家提供或由用户自行编写。

下面就某些基本子程序的功能与原理作一简单的介绍，以体会一下绘图程序的编写方法。

1.离散数据点的输出

在测制地图过程中要以离散点形式输出三角点、控制点、地形特征点、高程注记点等。而且，离散点形式的输出也是一切图形和曲线输出的基础。

假设给出一个点列$\{P_i\}$，其中$P_i=(x_i, y_i)$，$i=1, 2, \cdots\cdots, N$。要求按照这些点的坐标在绘图桌上绘出这些点来。在此过程中应考虑到两个问题：（1）点列的坐标系与绘图桌的坐标系不同，需作平移、缩放和旋转等变换；（2）两个坐标系的单位不同，绘出的坐标一般以毫米为单位，坐标值可以包含小数，但绘图头的移位是以步距ΔX，ΔY为单位，且永远是整步数。

为此，先进行点的坐标变换，将点列的坐标化为以步距为单位。然后按下列步骤绘出这些离散点：

（1）记下绘图笔当前的位置：W_{X_i}，W_{Y_i}；

（2）根据下一点变换后的坐标（以步距为单位）X_{i+1}，Y_{i+1}，求出绘图笔从当前位置到新位置的移动步距数：

$$\begin{cases} N_{X_i}=INT(|X_{i+1}-W_X|+0.5)*SIGN(X_{i+1}-W_X) \\ N_{X_i}=INT(|Y_{i+1}-W_{Y_i}|+0.5)*SIGN(Y_{i+1}-W_{Y_i}) \end{cases}$$

式中，$INT(X)$表示X取整，$SIGN(X)$表示取X的符号。

（3）调用移位—落笔—抬笔子程序，得到该新点在图上的位置；

（4）再记下当前绘图笔的新位置：

$$\begin{cases} W_{X\,i+1}=W_{X_i}+N_{X_i} \\ W_{Y\,i+1}=W_{Y_i}+N_{Y_i} \end{cases}$$

然后返回（2）去，依次绘出其它各点。

2.任意曲线或直线的输出

如上所述，在数控绘图桌上输出的曲线或直线都是由折线逼近的，一般可以采用以下两种方法输出：

（1）计算出曲线或直线上一系列十分密集的离散点的坐标，再按离散点的方式输出曲线（或直线）。当要求输出连续曲线或直线时，当到达曲线上起点后，绘图笔落下后不断地移位即可，在该线绘完后方需抬笔。密集离散点的获得称为点的插补。由于任意的平面曲线段均可以用参数方程表示：

$$\begin{cases} X=X(t) \\ Y=Y(t) \end{cases} \qquad t=t_0, t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n$$

一般可根据曲线上少量样点求出参数方程的参数，然后用不同的t_i（步长为Δt），依次计算出点列$P_i\{X_i, Y_i\}$，同样要化为以步距为单位，接着即可输出点列。步长Δt的选

择原则应使相邻两点的坐标差$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$和$\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i$与绘图机的步距相当。一般般可允许$|\Delta X_i| < 1.4\Delta X$，$|\Delta Y_i| < 1.4\Delta Y$，从而以保证曲线的光滑。

关于曲线的拟合、逼近与插补将在《计算机绘图》和《数字摄影测量学》中作详细讨论。

（2）应用“正负法绘图原理”。一般说，一条平面曲线$f(X、Y) = 0$将平面分成两部分，形成三个点的集合：第一个点集是由满足$f(X、Y) = 0$的点子组成的，即我们的平面曲线；第二个是由$f(X、Y) \geqslant 0$的那些点所组成的点集；第三个点集是$f(X、Y) < 0$。所谓“正负法绘图”就是利用一定的判别条件，使得绘图笔在步进过程中，永远围绕着$f(\overline{X}、\overline{Y}) = 0$左右移动、以逼近所要求的曲线。例如用此原理绘制曲线方程为$X^2 + Y^2 - 9 = 0$的圆时，可得到如图13-4-4的结果。

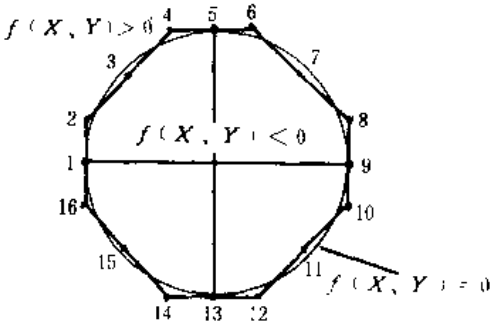


图 13-4-4

点号	X	Y	$f(X、Y)$
1	-3	0	0
2	-3	1	1
3	-2	2	-1
4	-1	3	1
5	0	3	0

（五）解析测图仪常用的数控绘图桌

目前，与解析测图仪配套使用的数控绘图桌主要有瑞士威特厂的AVIOTAB TA10，TA2L和TA2，克恩厂的GP1等。联邦德国欧波同厂原来一直自制DZ5，DZ6，DZ7系列数控绘图桌，后因质量未过关，转而向威特厂购买TA绘图桌，并标以PIani TAB商标与其解析测图仪相配套。

图13-4-5为TA各种不同型号的数控绘图桌TA10、TA10S、TA10BL，TA2，TA2L。它们的结构是一样的，在交叉型滑轮上，一个水平配置的横梁在两根齿条上运行（主运动），该横梁上的绘图笔架在一根齿条上运行（次级运动），仪器有较高的分辨率、绘图速度和加速度，具体性能指标列于表13-1-1。

各类TA数控绘图桌的主要性能　　表 13-4-1

仪器型号	TA10	TA10S	TA10BL	TA2	TA2L
1.测图面积					
双测图头	1210×1000mm²	705×1000mm²	1800×1670mm²	1218×1200mm²	1838×1218mm²
四测图头	1144×1000mm²	638×1000mm²	1800×1600mm²	1152×1200mm²	1638×1152mm²
真孔板纸托	三种位置	宽度可调节	无	三种位置	三种位置
板面倾斜调节	从0°到75°	无	无	从0°到75°	无
透射光	可调节	可调节	无	可调节	可调节

续表

仪器型号	TA10	TA10S	TA10BL	TA 2	TA 2L
2.测图性能 最大轴向速度 加速度	250mm/s 2 m/s²	250mm/s 2 m/s²	500 mm/s 2 m/s²	300mm/s 5 m/s²	375m/s 5 m/s²
3.绘图精度 量测系统分辨率 可寻址分辨率 静态重复性精度	0.01mm 0.02mm ±0.02mm	0.01mm 0.02mm ±0.02mm	0.02mm 0.04mm ±0.04mm	0.01mm 0.02mm ±0.02mm	0.0125mm 0.025 mm ±0.025mm
4.尺寸与重量 宽 深 高 重 量	1580mm 1060-1830mm 780mm 321 kg	1500mm 1430mm 780mm 225kg	2400mm 2380mm 780mm 440kg	1730mm 1680mm 800—1050mm 420kg	1750mm 2170mm 850 mm 450kg

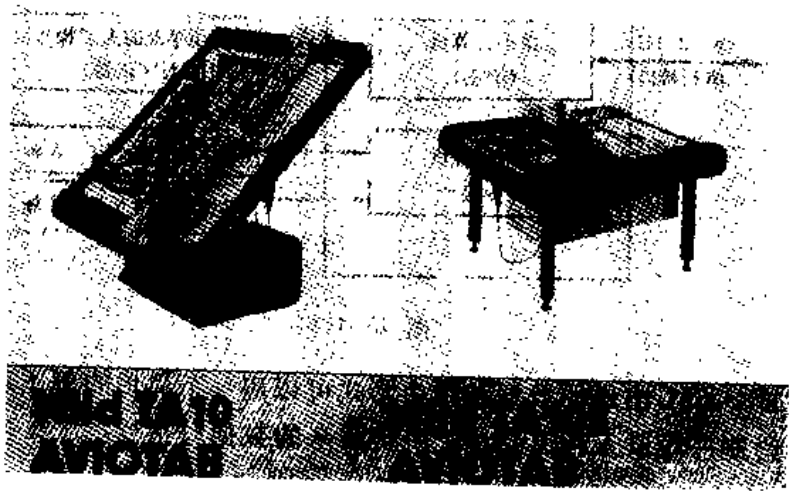


图 13-4-5

TA绘图桌的软接口的数据格式为ASCⅡ或二进制格式，其基本绘图软件适合于各种计算机（Calcomp绘图程序）。其硬接口为RS232C（110/150/300/600/1200/2400/4800/9600波特），通过硬件或软件方式实行串行异步数据传送。输入缓存器为512字节。

TA绘图桌的标准功能包括：（1）参考点可自动定位，并可人工安置和重新定位；（2）人工变化绘图面积大小（窗口功能）；（3）反复停、启不损失精度；（4）可选择和起落1—4个绘图笔；（5）运动方式三挡：启停、正常和快速运动，可人工控制；（6）具有数字化功能，逐点地将图板坐标送入电子计算机。

TA绘图桌的结构和工作原理可用图13 4-6表示。通过标准的RS232C串行接口与解析测图仪的电子计算机主机相连。自身有两个微机作为绘图桌的控制：一个控制绘图，另一个控制 X 和 Y 轴的伺服电机。由于TA绘图桌的智能化程度较高，可以直接引用许多基本绘图子程序。

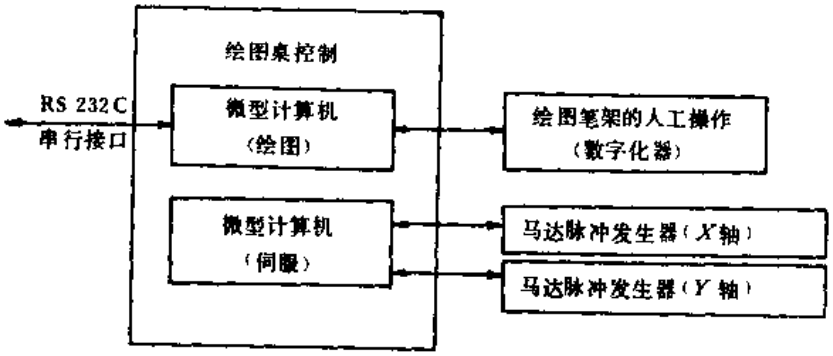


图 13-4-6

由串行接口RS232C输送的数据和指令形式可以用一个简单的例子表示。图13 4 7表示用TA绘图桌绘制一小段人行道及注记所传送来的数据与指令。

```
U  11500  11500
D  10000  10000
L  09850  10150  04500  0040FUSSWEG
```

说明：U——抬笔，并将笔架移到所指定的位置（11500，11500）
D——落笔，将笔架移到所指定的位置（10000，10000）
L——从起始位置（9850，10150），沿45°倾斜方向以字体大小为4mm的规格写出字符串FUSSWEG

图 13-4-7

字母和数字都译成ASCⅡ码传输，坐标单位为20μm，在TA2中，每个坐标以16比特字长的二进制存贮在微型计算机中，因此TA2所表示的坐标范围是：

$$2^{16} \times 0.02\text{mm} = 1310.72\text{mm}$$

绘图计算机由所绘点的坐标插补出该直线段的中间点坐标。该机还有一个字符发生器，将由接口传送来的ASCⅡ码符号转换成由线段组合而成的不同字母或数字。

解析测图仪主机除了与RS232C接口相连外，还要有软件产生图13-4-7中所列举的指

令。在主程序中可以调用这类子程序。对于上例可如下调用子程序：

CALL PLOT (23.0, 23.0, 3)

CALL PLOT (20.0, 20.0, 2)

CALL SYMBOL (19.7, 20.3, 0.4, 45.0 'FUSSWEG')

含义为：

PLOT (…, 3)：抬笔，将笔架移到指定位置（23.0, 23.0cm）；

PLOT (…, 2)：落笔，将笔架移到所指定的位置（20.0, 20.0cm）；

SYMBOL：从所指定的位置（19.7, 20.3cm）开始，沿着45°倾斜方向以0.4cm大小规格的字体写出字符串FUSSWEG（人行道）。

另一种与克恩厂解析测图仪相连用的电子精密绘图桌为GP1型号（见图13－8）。

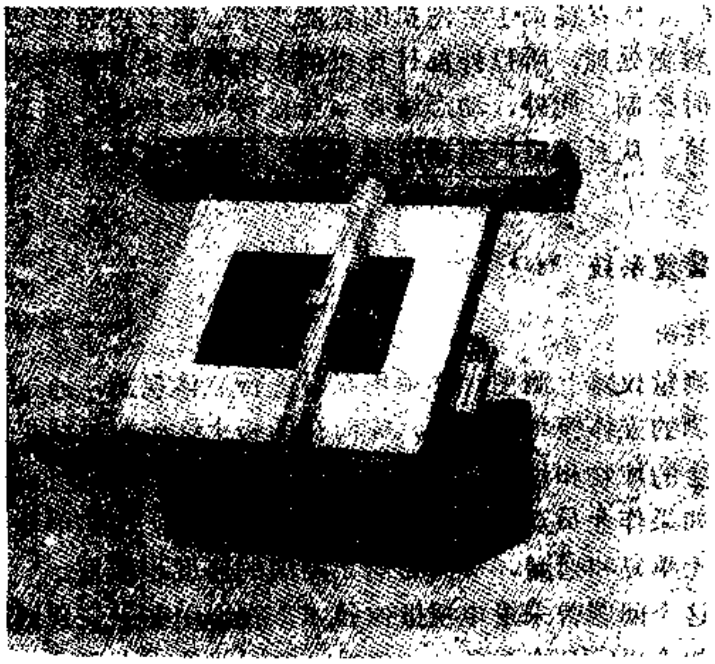


图 13-4-8

克恩厂GP1绘图桌可以通过标准的RS232C1423接口与任何装有标准编码器的模拟立体测图仪相连，也可以直接与克恩厂各类型号的解析测图仪相连。此外，它亦可作为许多电子计算机的图形输出终端，作为智能化程度较高的绘图仪，它提供面向用户的软件库、绘图软件和在线编辑程序。

GP1绘图桌的尺寸为1450×1250mm^2，可利用的绘图面积为1365×1150mm^2，桌面可倾斜45°，采用荧光灯管照明。传动系统及定位用带有编码器反馈回路的直流伺服电机。伺服电机的分辨率为20μm，可寻址的分辨率为40μm，重复精度为20μm、绘图头运动中最大加速度为0.6g，即6m/s^2。

GP1绘图桌自身有三个微处理机来控制：绘图处理机$P4$为PDP11/23，矢量发生器$P5$和手控盒处理器均采用Intel 8085（见图13-4-9）。数据缓冲存贮为动态双缓存系统，与主机的连接为标准串行RS232C/423接口。

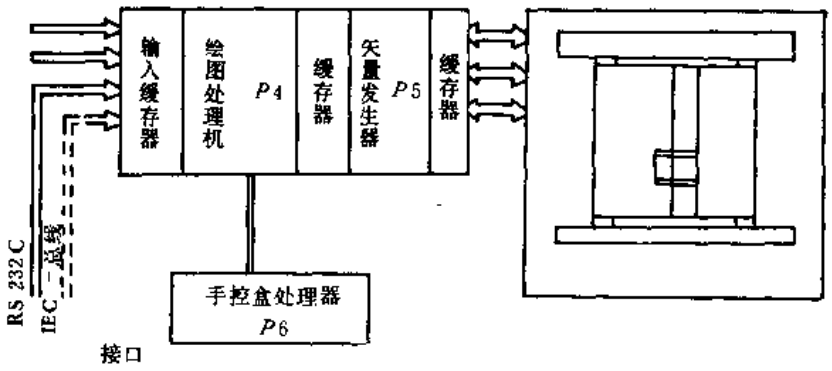


图 13-4-9

这样的微处理机配置提高了绘图机的智能水平。由于内装的DECPDP11·23计算机能完成强化计算和数据处理，所以外部计算机的工作量将显著减小。而矢量发生器则专用来作伺服系统的实时控制。此外，动态缓存系统在各个处理机之间工作，能存贮正在绘图处理的最近64个矢量，从而能反向驱动绘图车架。该绘图机还可用摄像系统方便地监视绘图过程。

二、图形影像叠置系统

（一）问题的提出

作业员在摄影测量仪器上测图时必须用双目进行立体观测，通过手轮和脚盘的动作，使测标紧贴在所量测的立体模型表面上，从而在图板上绘出测量结果来。如果作业员想要看到他在图板上所绘的地物和地貌，他必须转身去看图面，在有些仪器上甚至要移动座位。这显然很不方便，如果作业员双目不停地进行立体观测时，往往不知道现在测量的结果与已测过的内容间有无重复和遗漏，从而影响了测图的速度和质量。

人们为了解决这个问题曾采用电视摄像技术，在绘图桌上安置摄像机，而在操作台上增设一显示屏幕（如克恩GP1绘图桌）。但是，这时仍要求人眼离开目镜观测系统去观看屏幕。屏幕上的图形并未与目镜中影像叠在一起，仍解决不了对重复和遗漏的快速检查，作业依然不太方便。这样就提出了研制一种将图形（绘图桌上的或数字地图已存贮的或欲更新的老图上的图形）和影像（在观察系统中看到的左或右片影像）叠置起来的装置的要求。

（二）图形影像叠置系统的基本原理

解析测图仪是计算机控制的测图系统，其主要特点之一是可以将已测的地物地貌以数字形式（坐标加属性）存贮在计算机中。因此，可以通过软件处理，利用物、像点间的共线方程将这些数字图形变换成左（或右）像片上相应的数字图形，并存入相应的存贮器中。将量测测标所在位置周围的变换后数字图形显示在高分辨率的CRT屏幕上，再通过专门的光学系统导入观测系统左（或右）片光路中。这样，在观测者的目镜视场中就形成了像片影像与已绘图形相叠置的视觉效果。这便是图形影像叠置系统的基本原理。

由于作业员通过手轮或脚盘不断地在模型上进行量测，所以视场中的影像将不断地变

化。为了保证地图内容总能与视场中的影像正确地叠置在一起，CRT屏幕上显示的图形必须连续地、实时地跟随像片架的移动而变化。这意味着对图形影像叠置系统有很苛刻的要求。

（三）图形影像叠置系统的用途

图形影像叠置系统具有以下几方面作用：（1）在量测过程中进行测图检查；（2）可以借助系统的各种编辑功能在测图过程中或测图后进行质量改善；（3）使现存数据、包括地图目视化；（4）通过显示参数和操作指令提供作业员信息。

它可以在测图、地图修测、DEM数据采集、以及利用地图和像片进行规划、设计等工作中获得广泛应用。比如说，在测图过程中它可用来检查其完整性、正确性和精确性；在模型之间和相邻图幅之间实现精确的线状地物连接；通过新摄像片和已有的数字化地图数据的叠置比较进行有效的、方便的地图修测；在数字高程模型渐近取样过程中显示已采集样点，并可将计算的等高线叠置到立体模型上以检查DEM的精度；在铁路和公路设计中可将在地图上设计的线路叠置到像片影像上以进行必要的分析。

从此处列举的这些应用充分体现了图形影像叠置系统的优点。但这个系统的引入要增加和发展必要的硬件和软件，其中包括大容量存贮、快速计算和实时动态CRT显示等，所以价格比较昂贵。

（四）现有的各种图形影像叠置系统

联邦德国欧波同厂最先提出在解析测图仪上设置称为Videomap的图形影像叠置系统。最初仅仅将所测地图的有关部分图形叠置到右片光路中（见图13 4-10），用于C系列和P系列解析测图仪器上。

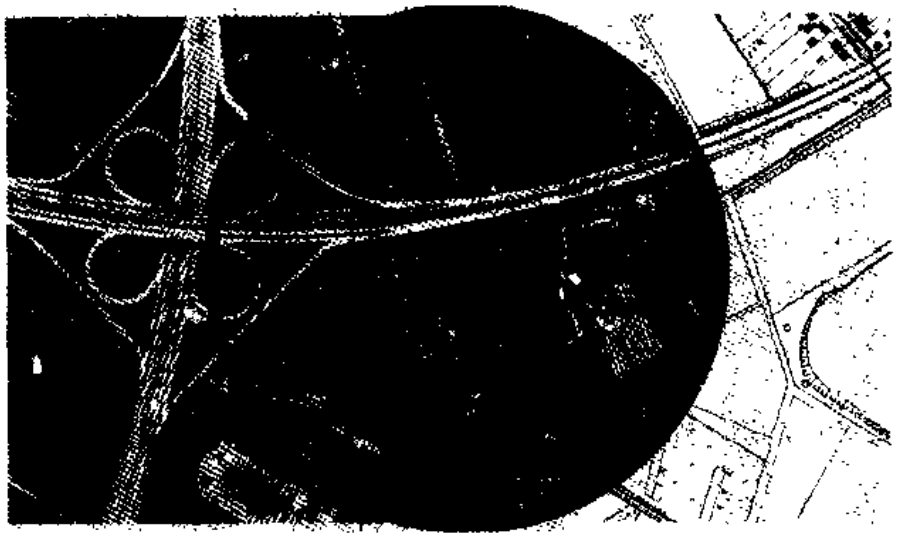


图 13 4 10

自1988年来，一种经改进了的Videomap2型装置已与PHOCUS软件和P系列解析测图仪连用。主要改进在于具有编辑功能、内存扩大、具有单眼和立体两种叠置方案并明显地加快了速度。其主要技术参数包括具有768K字节的图形内存贮器可存放262000个矢量和

131000个字符，作业员信息内存为256个字符。CRT分辨率为32μm。图像刷新速率为100Hz，即每秒可换100次图像。

瑞士克恩厂在1988年日本京都大会上也展示了装在DSR系列解析测图仪上的称为KRISS的克恩栅格图形叠置系统（Kern Raster Image Superimposition System的缩写）。其硬件结构见图13 4-11。用该系统可实现数字化存贮数据或已有的数据库内容的直接在线栅格影像的叠置。KRISS有单像和立体叠置两种，每种又分50μm和25μm两种不同的分辨率，可供用户选择。

该系统在DSR—15解析测图仪上的实现可参见其结构框图（图13-4-12）。

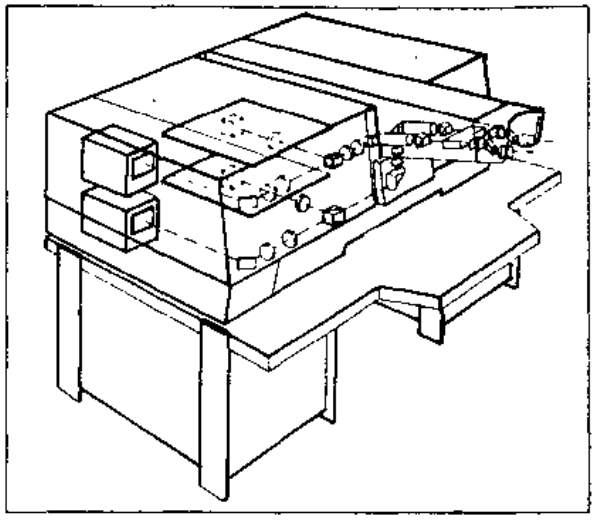


图 13-4-11

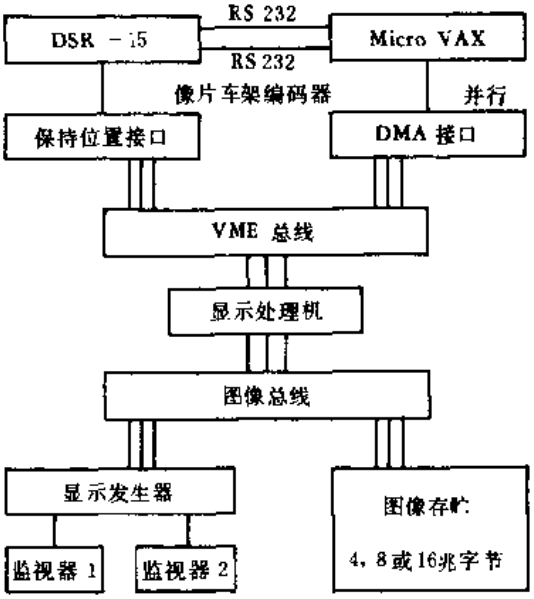


图 13-4-12

KRISS与DSR15的连接通过一保持位置接口，显示处理机为带有68881协处理器的微机Motorola68020，MicroVAX与显示处理机之间的通讯是通过一快速并行的DMA接口。栅格化、实时LOOP监视和透视变换是局部地进行。由于DSR15的光学系统是固定的，它允许所插入的图像位于前端。因此，光学调节如用Dove棱镜旋像或用ZOOM系统变焦均不破坏几何关系。而模块化的软件使KRISS能方便地与应用软件包MAPS200和DTMCOL装配在一起。

瑞士威特厂在其最新产品System9上也装了同样的图形影像叠置系统。

§13.5 解析测图仪的检验

与其它任何一类测图仪器一样，解析测图仪作为高精度的数据量测和处理系统也需要进行必要的检验。

除了仪器厂家在生产元件和装调仪器中的检验外，对于解析测图仪用户而言，在下列两种情况下需作仪器检验（1）安装投产前，必须对仪器进行全面检验才能决定是否验收

和投产使用；（2）作业中定期检验，以了解仪器运转情况和稳定性。每次检验结果都必须列表统计，作出完整的记录。从统计的数值规律可以对仪器作某些诊断。例如，显著的变化表明需作仪器维修和重新调整，长时间累积的缓慢变化则表明某项配件有磨损，有待调整、修理或更换。

用户需要作的最基本检验可以概括为仪器精度和光学质量两个方面。前者将决定仪器的几何精度；后者的多数项目虽不直接引起几何误差，但它造成影像质量的降低，也会影响观测精度。

一、准确度、精密度和稳定性检验

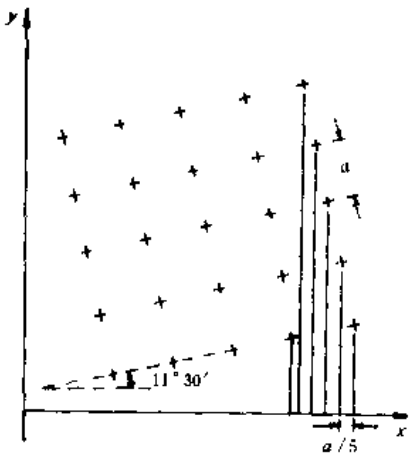
这三项检验均与仪器精度有直接关系。准确度是指对某一个量的多次观测中，观测值对该量真值的偏离程度，它主要取决于系统误差的大小。观测值偏离于真值愈小则准确度愈高。精密度指在对某一个量的多次观测中，各观测值之间的离散程度，它主要取决于偶然误差的大小。稳定性指的是仪器误差在长时间运行过程中保持不变的性能。

解析测图仪的仪器误差主要来源于像片车架，左、右像片车架可以分别用同样的方法检验。用户一般仅作总体精度检验，用解析方法估算出仪器的线性系统误差。

国际摄影测量与遥感学会第二委员会的一个工作组所推荐的检验方法被认为是标准检验方法。

该方法建议利用一种标准的精密方格网板，从上面选出25个均匀分布的格网点，格网点间隔$a=5\text{cm}$。网板面要有微米级的平度，玻璃要光洁，至少有1/4英寸厚，以保证不变形和稳定。所选25个格网点刻划清晰，易于切准，其坐标已有精确鉴定值，中误差应在0.1μm以下。玻璃格网板的尺寸一般为200～215mm见方。

量测时将格网板置于像片盘上。为了保证对整个分划尺的各个位置均能进行检验，应使格网线相对于仪器车架的x，y轴有11°30′的夹角（见图13-5-1），以使欲测格网点的仪器坐标均匀地分布在量测分划尺上。用单片观测方法对全部25个点进行重复量测，然后将格网板旋转90°，180°，270°角，即在$K=11°30'$，$90°+11°30'$，$180°+11°30'$和$270°+11°30'$四种情况下求出四组量测值。



$$\Delta x=\Delta y=a\cdot\sin 11°30'=\frac{a}{5}$$

图 13 5-1

根据每组量测值可列出下列误差方程式：

$$\left.\begin{aligned}-v_{x_i}&=aX_i+bY_i+e_x-x_i\\-v_{y_i}&=cX_i+dY_i+e_y-y_i\end{aligned}\right\}\qquad(13-42)$$

其中X_i，Y_i为已知的格网点坐标，x_i，y_i为像片架量测坐标。由于量测了25个点可列出50个方程式，故用最小二乘法解出上面的系数a，b，c，d，e_x和e_y。这六个参数中包含了格网板的旋转和平移，并非全部是仪器系统误差。因此，要从这六个参数根据下式求得反映仪器线性系统误差的参数：

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \frac{(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}{(ad-bc)} \\ S_y &= \frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(ad-bc)} \\ \theta &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-ac-bd}{ad-bc}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (13\ 43)$$

其中S_x、S_y反映了仪器x，y方向量度比例尺的差异，而θ反映了仪器x，y导轨的不垂直程度。对于同一个像盘，这三个参数对于格网板的不同安置情况是共同的，因此，可取四组结果的平均值。

改正了线性系统误差后，各个格网点上的残差反映了仪器的非线性系统误差和偶然误差。此时应先求出各点线性系统误差改正后的坐标残差（利用式（13-42））V_{x_i}，V_{y_i}，如果残差的平均值与零有显著差别或残差的绝对值偏大，则可用下列不完全四次多项式来解求非线性系统误差参数：

$$\begin{cases} U_{x_i} = Ax_i^4 + By_i^4 + Cx_i^3 + Dy_i^3 + Ex_i^2 + Fy_i^2 + Gx_i + Hy_i + J - V_{x_i} \\ U_{y_i} = A'x_i^4 + B'y_i^4 + C'x_i^3 + D'y_i^3 + Ex_i^2 + F'y_i^2 + G'x_i + H'y_i + J' - V_{y_i} \end{cases} \qquad (13\ 44)$$

改正了线性和非线性系统误差后，由各点残差u_{x_i}，u_{y_i}求得的坐标单位权中误差主要反映仪器的偶然误差（包括观测员的偶然误差），它反映仪器的精密度。由此可见，在仪器检验时应选派有经验的、观测精度高的作业员进行量测，以免引入不必要的观测员偶然和系统误差。

上述将线性和非线性系统误差分别解求的方法按最小二乘法平差原理是不够严格的。但是，它比较实用。这是因为线性系统误差是主要的，非线性系统误差一般较小，通常引用式（13-42）、（13-43）即可。此外，直接一次用所有线性、非线性系统误差参数，可能引起求解的不稳定。

如果要更精确地测定解析测图仪的线性，非线性系统误差，则应增加观测的格网点数从5×5格网到11×11格网，即a由5cm减小到2cm，此时的误差方程式可将式（13-42）代入式（13-44），直接得到一组误差方程式（其中同类项应合并）。也常常采用下列双三次多项式求解20个未知参数：

$$\begin{cases} v_{x_i} = a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3x_iy_i - a_4x_i^2 + a_5y_i^2 - a_6x_i^2y_i + a_7x_iy_i^2 \\ \qquad + a_8x_i^3 + a_9y_i^3 - (X_i - x_i) \\ v_{y_i} = b_0 + b_1x_i + b_2y_i - b_3x_iy_i + b_4x_i^2 + b_5y_i^2 + b_6x_i^2y_i + b_7x_iy_i^2 \\ \qquad + b_8x_i^3 + b_9y_i^3 - (Y_i - y_i) \end{cases} \qquad (13\ 15)$$

从中分离出像片任意安置所带来的不同内定向参数（原点平移和坐标旋转），便可求得仪器的全部系统误差参数。

[注意]当系统误差参数引入较多时应对它们进行必要的统计检验，并剔除不显著的或彼此强相关的参数（详见《误差处理和可靠性理论》一书）。

在仪器检验中求得的各系统误差参数均应存入电子计算机中。在解析测图仪实时工作时，可以利用相应的软件来改正这些仪器系统误差，而模拟测图仪却做不到这一条。因此，解析测图仪用软件改正系统误差的特点，使其仪器精度较模拟测图仪高出30%左右。而且，人们可以放宽对仪器机械部件的精密度要求（即允许存在系统误差），从而降低造价。

目前市售的解析测图仪量测像点坐标的读数可达到1μm，由改正后格网点坐标残差求出的单位权中误差一般为2～3μm或更小。

周期性地检验可以评价仪器的性能是否稳定和外界环境的变化对仪器精度的影响。

二、光学系统质量检验

光学系统检验的项目包括：分辨率、视场聚焦、照明度、目镜放大率，ZOOM系统放大率、光学准直、旋像、测标大小、视场畸变等。其中除光学准直和聚焦两项外，其它各项一般都是稳定的，只须在仪器安装调试阶段作一次性检验。检验方法概述如下：

（1）用分辨率图片测验视场分辨率；

（2）在像片盘上置一刻度尺，量测视场直径；

（3）在测验分辨率的同时进行物镜调焦，使图片在像片盘任何位置均清晰；

（4）用光度计测定照明度；

（5）在像片盘上置一细格网片，在紧挨目镜后置一同样的细格网片，比较两格网像可求得放大率。同理可用于ZOOM系统放大率检查；

（6）在光瞳中心置一圆目标，圆的直径等于允许的误差限值，移动车架、旋转Dove棱镜，调节Zoom系统、调节焦距，如果在任何情况下测标都不超出圆目标范围，则认为符合要求。

如果在解析测图仪上加上CCD数字摄像机，则对光学系统的检验要求更严，其中如照明度等将会直接关系到数字影像的辐射特性和灰度值。此外，像片车架坐标系与灰度影像的坐标系也必须事先加以检测。

除了上述基本检验外，还有动态性能检验、软件诊断等。在购买仪器装调过程中应向厂方提出以获得保证。为了用户正确维护和使用仪器，应向厂方要求提供详尽的使用说明、检验说明和维护手册等。

§13.6 常用解析测图仪介绍*

本节扼要介绍在我国使用较广泛的国内外解析测图仪。

一、联邦德国欧波同厂的Planicomp系列解析测图仪

（一）C系列解析测图仪

1976年，联邦德国欧波同厂在赫尔辛基第十三届国际摄影测量大会上首先展出了

---

* 本节介绍的各种解析测图仪较多，教师可视需要选讲其中一、两种类型即可。

Planicomp C—100型解析测图仪，标志着解析测图仪从少量研制阶段转入成批生产的商用阶段。C—100解析测图仪有较强的功能，能完成所有的摄影测量任务，称为全能的解析测图系统。1980年之后，考虑到各种不同用户的需要和降低仪器的成本，Planicomp解析测图仪在C—100型基础上又增加了几种不同的系列产品C—110、C—120,C—130等型号。用户可以根据不同任务和售价加以挑选。我国航测生产单位多选购C—130型。

Planicomp解析测图仪是从物方坐标（通常为模型坐标）出发进行实时坐标变换以自动获得像片车架坐标和绘图桌坐标，从而实现量测和绘图工作。该类仪器光路固定，像盘移动，便于加入CCD摄像机和Videomap图形影像叠置系统。仪器一贯选用Hewlett Packard公司的HP系列计算机，该计算机硬、软件性能较好，但价格相当昂贵，最近，欧波同公司也解决了直接与IBM PC机相连用的问题，以求扩大其市场。

C系列解析测图仪的系统组成部分可以用图13 6-1表示。几种不同型号仪器的光机部分基本相同，其中C—130的光路中没有配置Zoom变倍系统，而只有8倍和16倍两种倍率的目镜可供更换，不同型号的Planicomp解析测图仪之间的主要差别是所配备的计算机不同，并由此导致性能和价格上的差异。有关Planicomp C系列解析测图仪的比较见表13 6-1。

Planicomp C系列仪器的比较表　　表 13-6-1

仪器型号	C—100	C—110	C—120	C—130	C—140
计算机	HP1000小型机	HP1000A微型机			
处理器	F处理器	A900	A700	A600	
磁盘	大磁盘机（20兆）	小盒式磁盘（16.4兆～130兆）		（25兆）	（15兆）
放大倍率	7.5～30倍（连续变化）			8倍或16倍	
特点	计算速度快，功能全可带向量计算机硬件		可进行一些后台计算	只能完成基本摄影测量任务和DEM采样	
价格	高				低
用途	（1）常规摄影测量作业； （2）大规模区域网平差； （3）DEM采样及内插加工； （4）加CCD摄像机作影像匹配； （5）非常规摄影测量； （6）数字测图 （7）研制和执行用户自编程序		（1）常规作业 （2）独立模型法平差 （3）DEM采样及内插加工 （4）非常规测图 （5）数字测图 （6）用户自编程序	（1）像片或模型量测 （2）航带法平差 （3）DEM采样 （4）图解和数字测图 （5）为Z2采集数据	
名称	全能解析测图系统		解析测图站	解析立体测图仪	

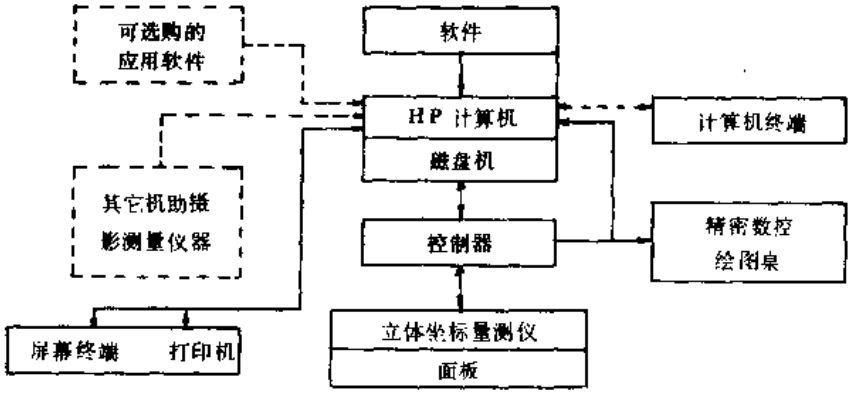


图 13·6·1

下面以C—100解析测图仪为例介绍PlanicompC系列仪器的硬件与软件系统。

图13 6 2表示C—100的系统配置情况。作业员操纵手轮和脚盘提供模型坐标，计算机

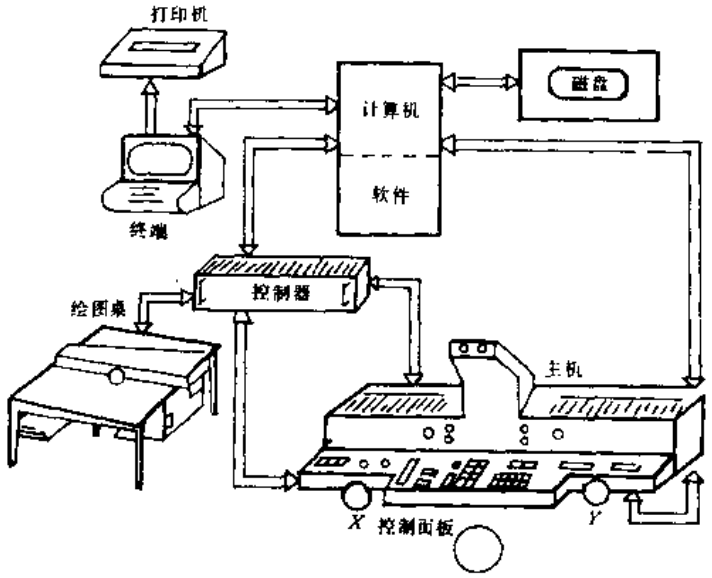


图 13 6 2

根据从控制面板发给的各种信息和已往求得的各种参数，分别算出像片盘和绘图笔的位移值；又通过控制器使像片盘移动和绘图笔绘图。摄影测量面板所发出的信息直接传递给计算机，调用各个程序或控制主机操作。通过屏幕显示终端可实现人机对话，并控制快速打印输出。利用摄影测量控制面板是C系列仪器的一主要特点。

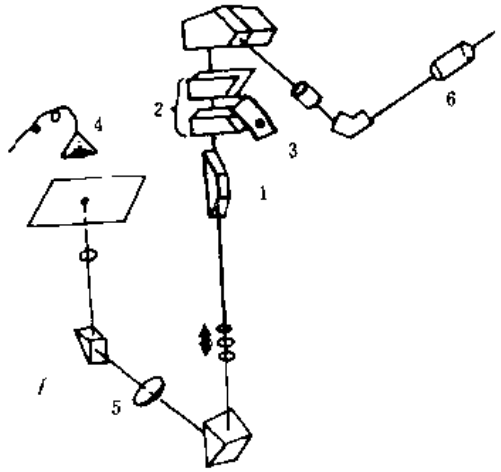
1. 硬件系统

Planicom pC—100的硬件主要由量测部件、控制部件、电子计算机和终端设备组成。

量测部件：

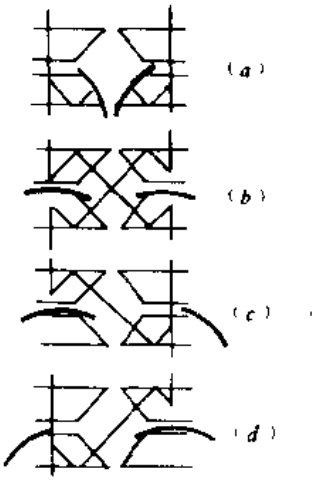
即基本光学机械设备的结构，包括两个彼此独立的、伺服驱动的在X和Y方向上运动的像片车架和一个固定不动的量测和观察系统。像片盘尺寸为24×24 cm，丝杆螺距2 mm，轴偏码器每周发出2000个脉冲，故定位分辨力为1 μm。像片车架最快移动速度为35 mm s，仪器格网测定精度为±2～3μm。

仪器的光学系统不作x，y方向运动，图13 6 3是左光路示意图，光路中有Dove棱镜用以消除旋像，原先仅有固定放大率为8倍和16倍的可换目镜，后来也设置了Zoom变倍系统。光路中还有一对棱镜组用以构成正立体、反立体、双眼看右像和双眼看左像四种观察状态，如图13 6-4所示。



1. 旋像棱镜；2 棱镜组；3. 遮光板；
4. 聚光灯；5. 测标镜；6. 目镜

图 13-6-3



(a)正立体观察；(b)反立体观察
(c)双目看右像；(d)双目看左像

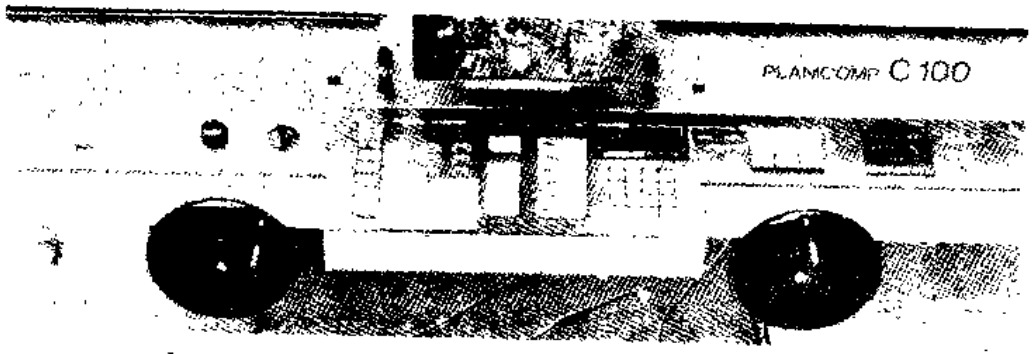
图 13-6 4

控制面板：

位于光机部件前面，它提供了作业员与仪器各部分间的联系和对仪器作业的控制。图13-6-5为控制面板示意图，最左边为仪器工作状态键.中间为程序操作键和点操作键，右边为观察状态和驱动方式键。最右端为读数显示器。

仪器工作状态键包括主机工作状态指示灯，计算机联机按键和绘图桌工作状态按键。控制面板左边还有车架运动速度调节器和快动杆。

程序操作键盘上的相应按键可直接调用参数选择程序和各种定向（内定向、相对定向、绝对定向和图板定向）程序，或调用优先级为A和B的应用程序。此外，还有显示程序状态和用作逻辑决策的按键。



C-100 PLANICOMP 控制面板示意图

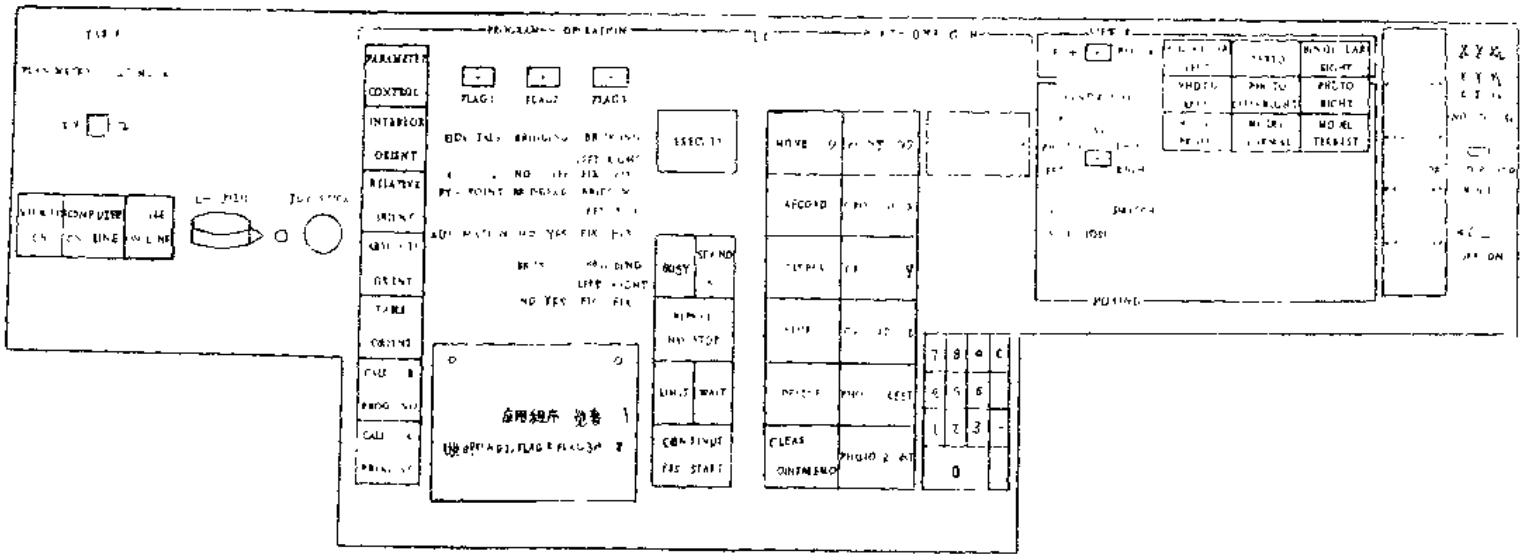


图 13-6-5

点操作和数字输入按键可用来实现移动到某点、记录、显示或存贮某点模型或像片坐标，以及点删除，清除点存贮器等等。用数字输入键可输入程序代码、点号、坐标、符号的数字代码等。键盘中的“C”表示清除，“S”键表示修改字符。

观察状态键盘上可选择正、反立体，双目看左片，双目看右片或立体观察。驱动方式键盘可选择立体模型、单像或双像坐标仪方式、地面摄影测量模型或断面测量方式。脚踏开关作用键为二向板键，它与右脚踏键一起发生作用。当脚开关扳键居中间位置“HAND WHEEL FAST”时，当踩下右脚踏键，则手轮同时驱动左、右像片盘的速度比不踩下右脚踏键时的驱动速度快四倍左右；如果脚开关的扳键扳向左（或右），即在‘PHOTO LEFT’（或‘PHOTO RIGHT’）位置时，只要踩下右脚踏键，则像片架驱动方式均按脚开关扳键所示的像片车架驱动左（或右）像片架，而不管像片架驱动方式按键所选择的是哪一种驱动方式。只有松开脚踏键后，像片架驱动方式按键才起作用，它可选择左片移动、右片移动及两片同时移动（左＋右）。

最右端的坐标显示器可显示地面坐标、模型坐标或像片坐标，并设有开关。

电子控制设备：

是基本光学机械设备与计算机间的接口。包括模 数及数/模转换电路、闭环控制电路、时间脉冲发生器等。

C系列的各型号仪器均可配置Videomap图形影像叠置系统，它与软件Planimap相配合，将数字测图在计算机中存贮的带编码的三维目标坐标，通过中心透视变换为像片面上表示的数字地图，将它存贮在Videomap控制部件的图形存贮器中，按32μm分辨力，图形存贮器可容纳500mm×500mm大小的像片范围。其中与目镜视场内容相匹配的32mm×32mm大小的图形从图形存贮器传送到显示存贮器，每1～3秒传送一次。显示存贮器内容以极高频率传送给一高分辨率向量CRT并显示为线划图（视频影像）。再用一光学系统将它缩小2.8倍反射进入左目镜视场中，从而实现它与摄影影像的叠置（参见图13 6 6）

当像片车架移动时，Videomap的显示存贮器内容和视频图像能做到实时地随之改变。

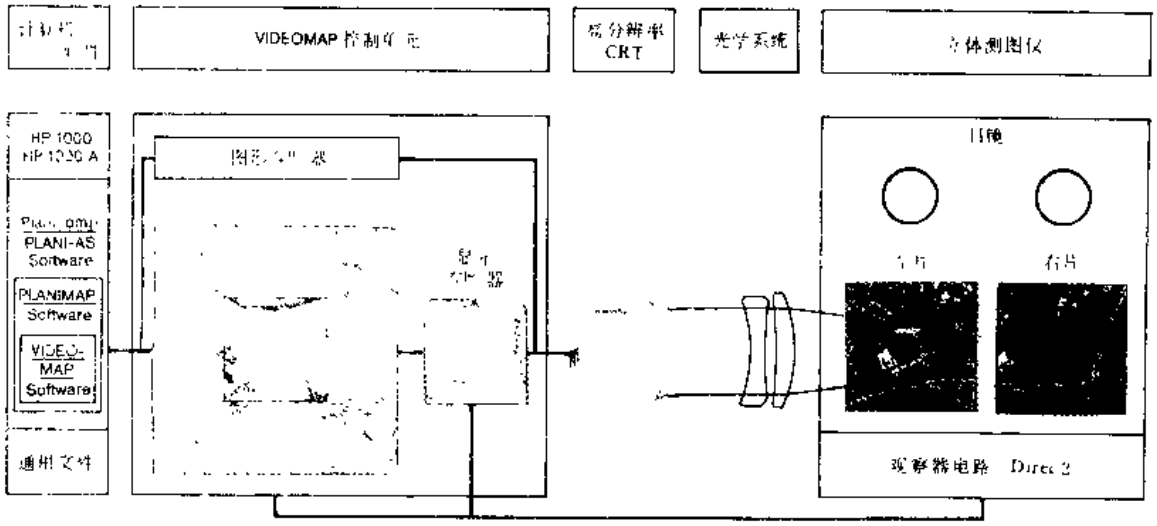


图 13 6 6

Planicomp C系列解析测图仪使用的数控绘图桌曾有过DZ—5、DZ—6和DZ—7三种型号，但由于性能不稳定，该厂决定买进威特厂TA绘图桌使用，并取名PlaniTAB，目前有两种型号：PLANITAB T110和PLANITAB T102（图13-6-7）。后者比前者有更大的幅面、更高的速度和加速度以及更方便的操作，但前者有好的价格功能比。这两种绘图桌的技术参数列于表13 6 2

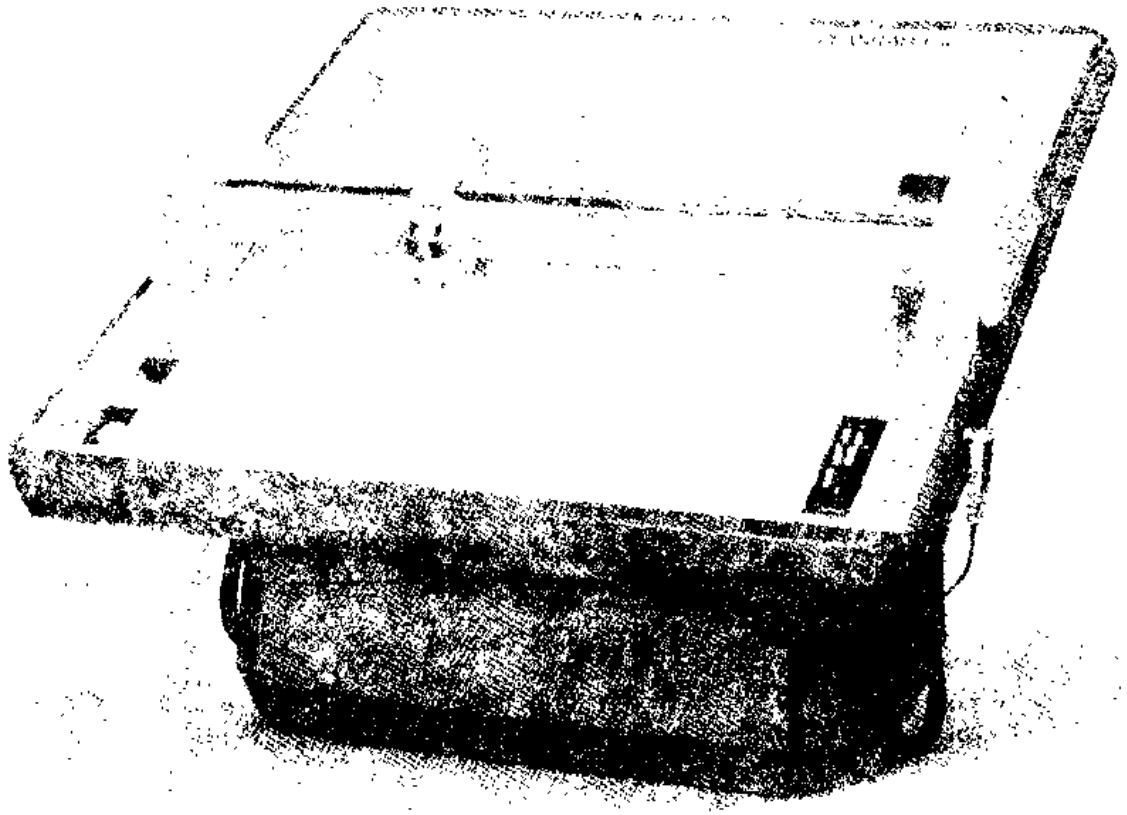


图 13 6 7

PLANITAB绘图桌的技术参数　　表 13-6 2

项　　目	PLANITAB T110	PLANITAB T102
图面尺寸 双绘图头	1000 mm × 1192 mm	1200 mm × 1200 mm
图面尺寸 四绘图头	1000 mm × 1144 mm	1200 mm × 1154 mm
桌面倾斜	0到75°、手动	0到75°、电动
桌面高度	78.5cm，固定不变	80到105cm、电动
速　　度	250 mm/s	300 mm/s
加 速 度	2 m/s²	4 m/s²
加速到最大速度	0.13s	0.08s

（续表13 6 2）

项　　目	PLANITAB T110	PLANITAB T102
分 辨 率	0.01mm	
静态重复性能	0.02mm	
平均静态定位精度（坐标）	0.04mm（20℃）	
直线偏移	0.015mm	
固　　件	绘图速度优化，5线型，ASC—11字符组	
接　　口	RS232C串行异步接口，HP1000A；HP12005B终端接口，HP12040B多路接口	
软　　件	HP1000A；Planimap非PLTAB -AS和GRAPHF2子程序库	
照　　明	可调节	
抽真空系统	二挡：全部：800×1200mm　550×620mm	
绘 图 头	双或四绘图头：电磁托架，压力5—500P，绘图工具为铅笔、自动铅笔、圆珠笔、墨水笔、刻针、刻刀并带正切控制器及对中显微镜	

2. C--100软件系统

C—100的软件包括HP计算机操作系统支持下的在线服务程序、在线应用程序和离线计算程序（见图13 6 8）。

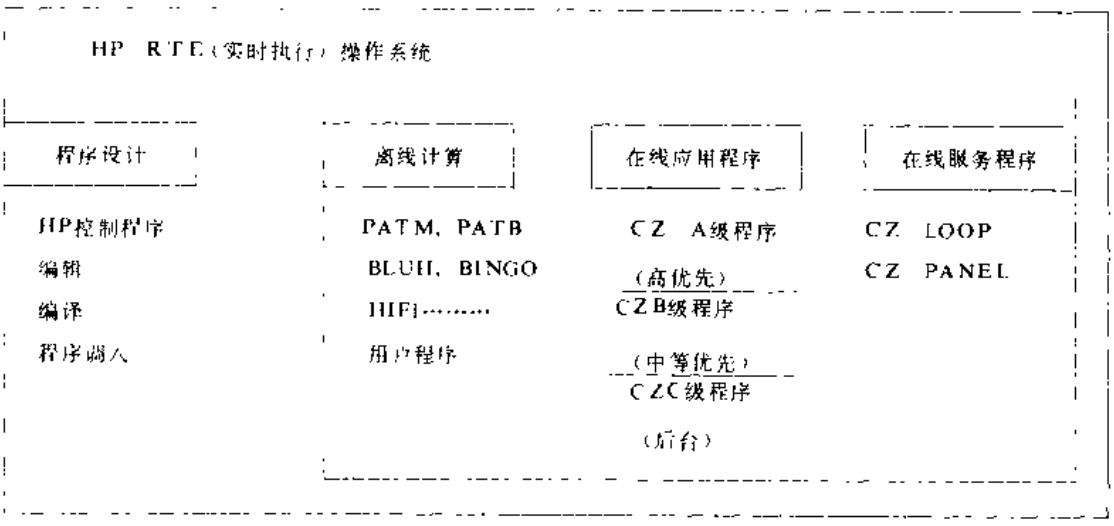


图 13 6 8

操作系统控制和支持所有的其它程序，是由计算机厂家提供的，它控制所有的计算机操作，如内存管理、程序执行和终端设备控制，还包括编辑、语言转换（编译）和程序输入等。

C—100的在线服务程序由LOOP程序和PANEL程序及大量的公用服务子程序组成。LOOP程序完成在模拟仪器上用机械导杆完成的投影交会任务，即实现数字投影交会的实时程序。PANEL程序用来监控摄影测量控制面板，按作业员在面板上的操作调入和启动相应的应用子程序。公用服务子程序集中了服务程序中所要用到的各种子程序，如各种典型的数字运算，绘图桌的各种规则性操作(由三点画圆弧、两点连直线、曲线光滑等)，文件管理与输入输出等。

C—100的应用子程序包有80多个应用程序，均用Fortran语言编写，以实现摄影测量系统的各项功能。这些程序分成*A*、*B*、*C*三个优先级。*A*级为短程序，包括数据操作、简单量测操作以及绘制符号和注记等量测支持和数据管理程序，具有最高优先级。*B*级程序为费时的定向或量测程序，是摄影测量作业的主要程序，包括内定向、相对定向、绝对定向、一步定向、图扳定向、数字地面模型量测、记录断面数据、计算机控制下的在线测图、利用Planimap软件的数字测图、仪器检校等程序。当*B*级程序执行时，*A*级程序可以使之中断，而执行*A*级程序完毕后，*B*级程序才能继续执行。*C*级程序可在后台处理，譬如图纸准备或航带平差等，需作进一步数据处理的其它程序或用户自己写的应用程序也在后台执行，称为离线计算。在线服务程序和公用子程序用汇编语言写，以加快执行速度，而应用程序用高级语言写，以便于修改，并给作业员提供方便。

（二）P系列Planicomp解析测图仪

P系列Planicomp解析测图仪P1、P2和P3是联邦德国欧波同厂在1988年日本京都会议前夕推出的第三代解析测图仪，在本章的§13.1概述中已作过简单介绍。这里就其主要特点作进一步说明，并介绍与之配套使用的PHOCUS软件系统。

1. P系列解析测图仪的设计目标和特点

由于数字测图、数据库和地理信息系统技术的发展，欧波同厂为P系列解析测图仪提出下列设计目标：

——能独立存在并带有面向未来高级软件系统的摄影测量工作站或数据采集系统的解析测图仪；

——改进其光机观测系统，使其充分考虑到人类工程学的要求，选择更为作业员喜爱的驱动方式；

——选择和设计智能化控制单元，并完成实时像片盘车架控制以减轻主计算机的负担；

——通过标准数据输入输出接口使计算机有相对独立性，便于与不同类型微机连用；

——将简单的机助测图软件Planimap重新编写为适应于PHOCUS全能摄影测量与制图软件系统的数字测图软件，使其具有更大的灵活性和与各种数据库系统联系的方便性。

总的设计思想是从常规的解析测图观点逐步转变为服务于地理信息系统和地形数据库的交互式数字测图的摄影测量数据采集站。

因此在研制P系列解析测图仪过程中，最关键的工作是研制PHOCUS全能摄影测量

与制图软件系统，用它来支持P系列解析测图仪。

按照上述设计思想，欧波同厂推出了三种不同型号的P系列解析测图仪，即：功能强大的全能型解析测图系统P1，基于C系列量测主机的P2型解析测图仪和价格低廉的P3型解析测图仪。

P1型解析测图仪（图13-6-9）的特点在于将位于后部的像片盘车架置于框架之中并配有大面积的工作台面（作业面积达到200×65cm），观测光学系统臂则牢固地突出于中央部分。像片盘的尺寸为330×240mm²，操作员可目视像片车架。如此大的像片盘既可以测绘两个标准像幅的相邻模型，或一个LFC大像幅立体模型，也可以同时处理若干个小像幅的近景模型。位于视准轴光线之中的变倍光学系统ZOOM的放大倍率为5到20倍。在放大倍率为5时视场直径为40mm。相互分离的光学输入输出接口便于插入VIDEOMAP图形影像叠置系统和CCD数字摄像机。

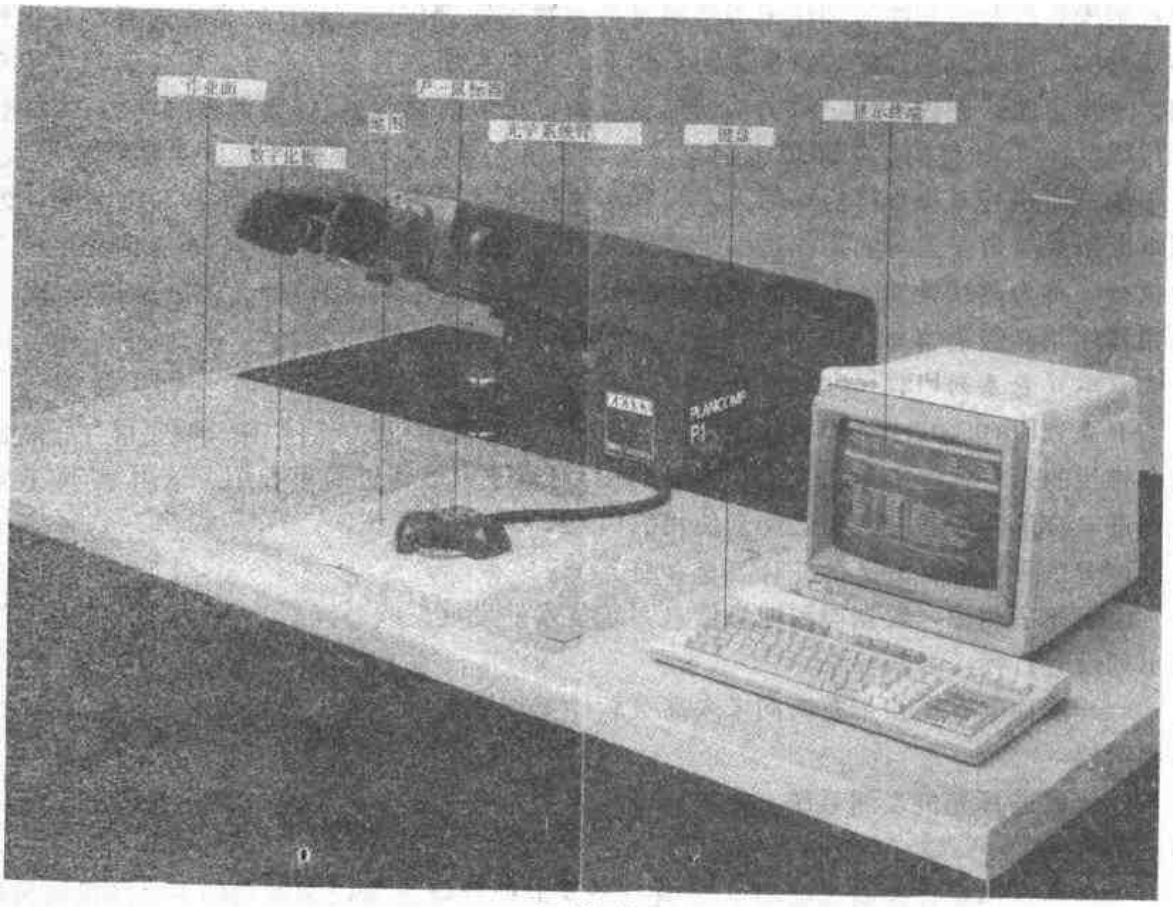


图 13-6-9

高分辨率的尺寸为800×400mm的数字化图形板嵌放在P1的工作台面上，配上P鼠标器即可方便地控制仪器的运动、量测和各种作业过程。手轮、脚盘及脚踏开关可作为选购件由用户决定是否购买。

实时坐标变换等计算和控制工作由专门的P处理器来完成，仪器主计算机可沿用HP1000A系列机或采用DEC公司的VAX系列的工作站计算机。它也能与PC微机连用。

P1解析测图仪的软件由PHOCUS标准软件和与之配套的仪器专用P软件组成。同样，区域网平差和数字高程模型等可作为选购软件，供后台计算用。由于PHOCUS软件实际上是一个数据库系统，因此P型解析测图仪中的PLANITAB精密数控绘图桌已不是标准配件，用户根据需要考虑是否选购，因为此时数据采集与图形绘制是两个相互独立的过程。

P2型解析测图仪（图13-6-10*a*）专门设计为改造C系列解析测图仪之用。它的主机为C-120体系，其它C系列仪器也可进行改装为P2型解析测图仪。因此，P2型解析测图仪的像片盘尺寸为240×240mm，ZOOM放大倍率为7.5～30倍。

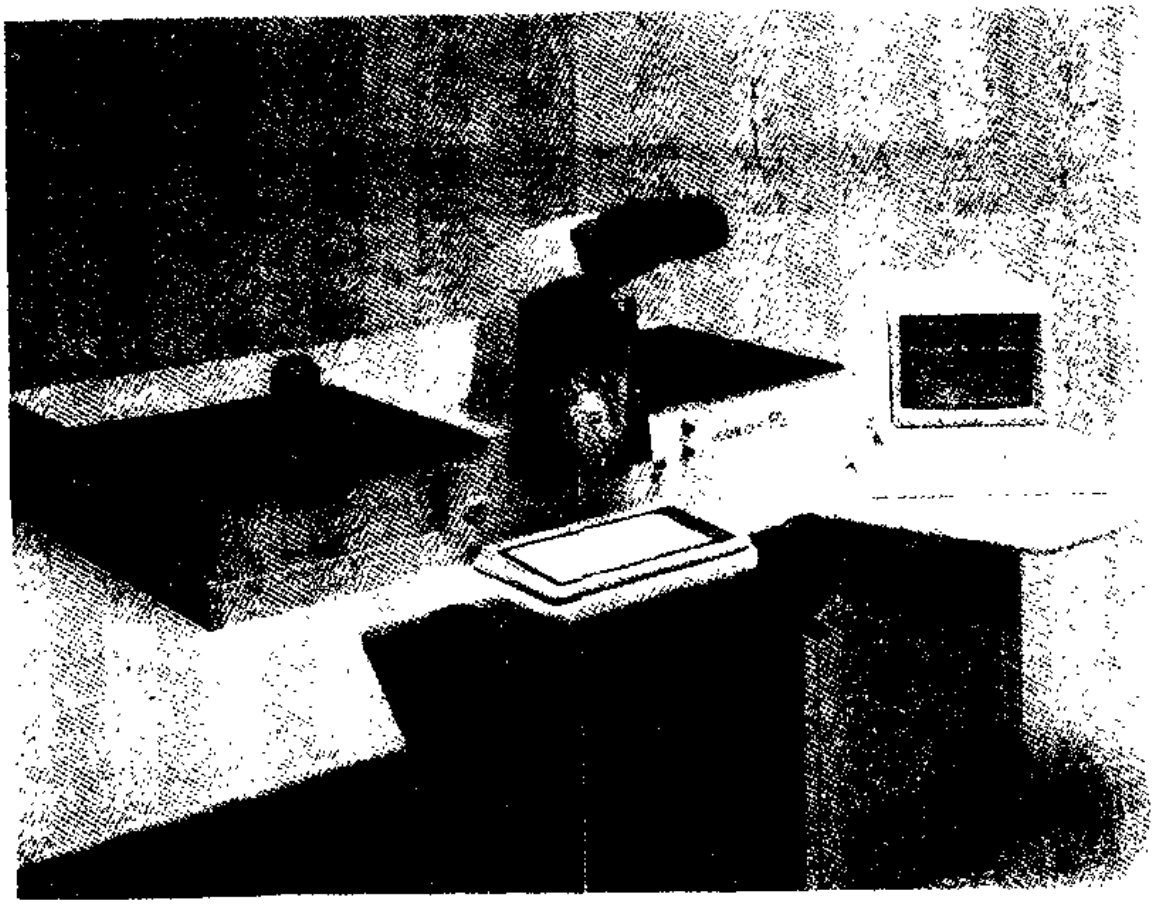


图 13-6-10*a*

P2型量测主机不同于C系列量测主机是去掉了原来的摄影测量控制面板，在PHOCUS软件的支持下，在P2的工作台面上安装有终端和指令面板。它们不仅支持数字测图而且启动所有测绘程序。手轮、脚盘和脚踏开关仍是输入用的标准设备，在P2上没有P鼠标器。

P2解析测图仪的主要输入手段是PHOCUS面板（图13-6-10*b*），它位于目镜下面作业员的面前。作业员发出的命令可自由地设计成任一菜单上的按键。一个菜单大约包含100条命令。通常的菜单有：标准菜单（MENU STANDARD），编辑菜单（MENU MEOD1E，2E），数字测图菜单（MENU MEOD1D，2D）等。

P2解析测图仪的软件中包含PHOCUS数据与PLANIMAP数据之间的转换软件。如果已购买的C系列解析测图仪需要改造为P系列仪器的话，则可方便按P2设计方案改造。因

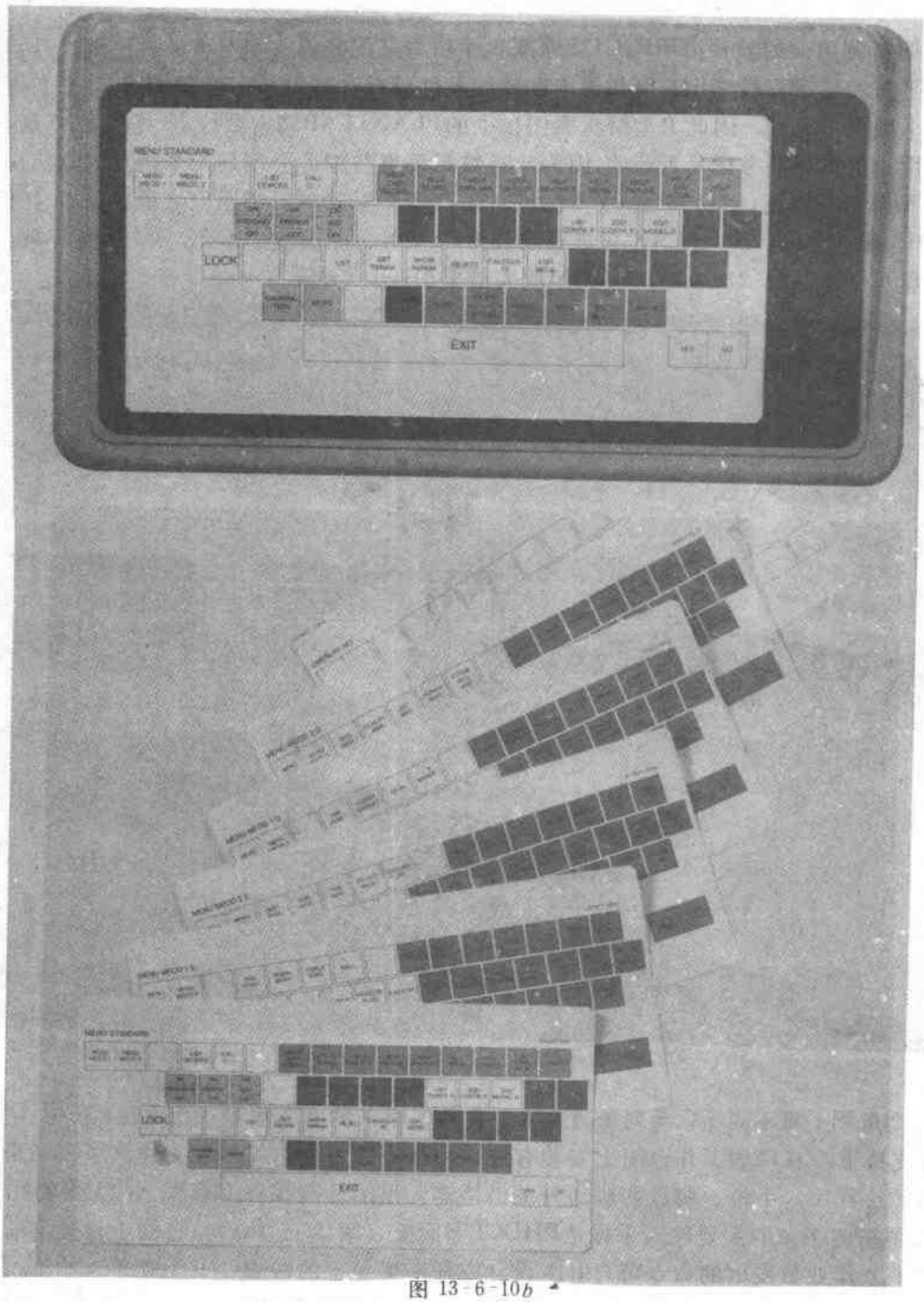


图 13-6-10b

此，可以认为P2解析测图仪是C系列与P系列仪器之间的架桥产品。

P3解析测图仪（图13-6-11）与P1，P2相比，其价格低廉，基本上等同于一台模拟型精密立体测图仪的价格。该仪器与C系列仪器从外形结构看差别较大。P3仪器的观察部件

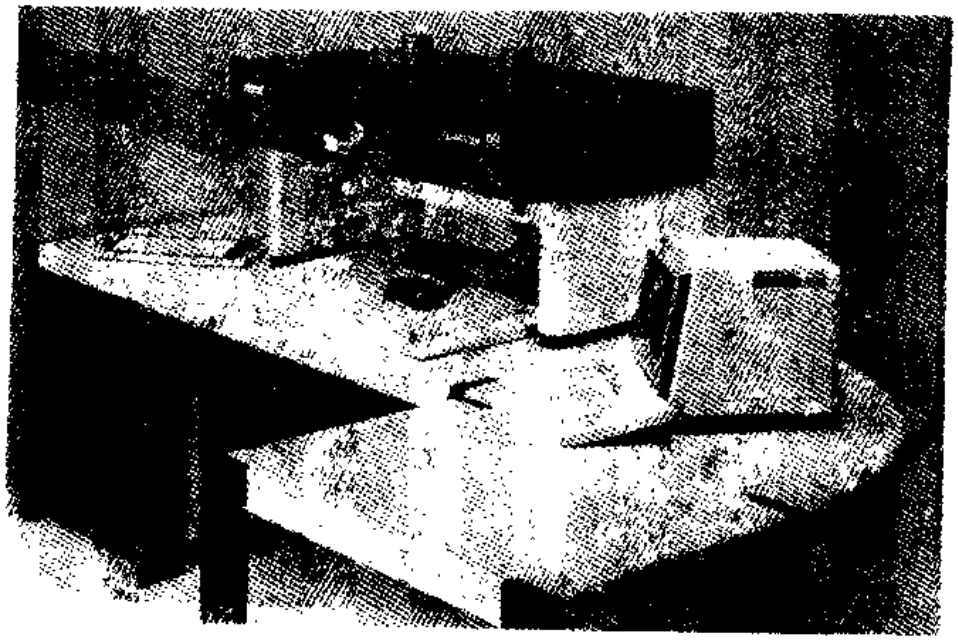


图 13 6 11 P3解析测图仪全貌

竖立在仪器桌面上，其高度可调节，结构十分简单紧凑。桌面上的高分辨率大幅面数字化板，其量测范围达到594mm(X)×420mm(Y)，分辨率为0.025mm 它与摄影测量的P鼠标器结合使用可实现相对的模型运动和绝对的点位测定。P鼠标器可方便地在菜单盘上输入各种命令。

由P处理器组成的控制单元用来实现观测部件与系统计算机的连接，它完成数据转换、实时计算和伺服控制，以减轻主计算机的负担。这是P系列解析测图仪的共同特点。因此，P系列仪器并属于分布式计算机的解析测图仪。

2.高分辨率数字化板与P鼠标器

为了保证P系列仪器的简便操作，在P1和P3两种型号仪器上采用了一种基于工业用的高分辨率数字化图形板及其上的供摄影测量作业用的P鼠标器的自由手动导向和命令操作系统（图13·6 12）。

在P鼠标器上除了有十字丝光标外，还有XY快动键和Z的快动与微动键。它不用脚盘安置高程，而是用鼠标器上的姆指手轮来微调Z行程。为了避免在绘制等高线时无意地改变高程，这个姆指手轮可置无不起作用。

为了粗略定位，P鼠标器上相应地安置了六个坐标方向上可同时作用的快动键。

程控的渐近运动特性使P鼠标器的平面运动更为方便，它能以微米的精度安置点位。

P鼠标器另一个方便于用户的特点是在地图或像片上进行测标绝对定位用的MOVETO按键。一旦地图或像片在数字化图形板上铺好并定向完毕后，所选点位即可方便地用此按键来安置。

P鼠标器上还有三个可编程序的功能键：最左边的一个通常用于量测或一系列量测的开始，最右边的一个用于量测的结束，中央的键可编程用于如SNAP或DELETE LAST

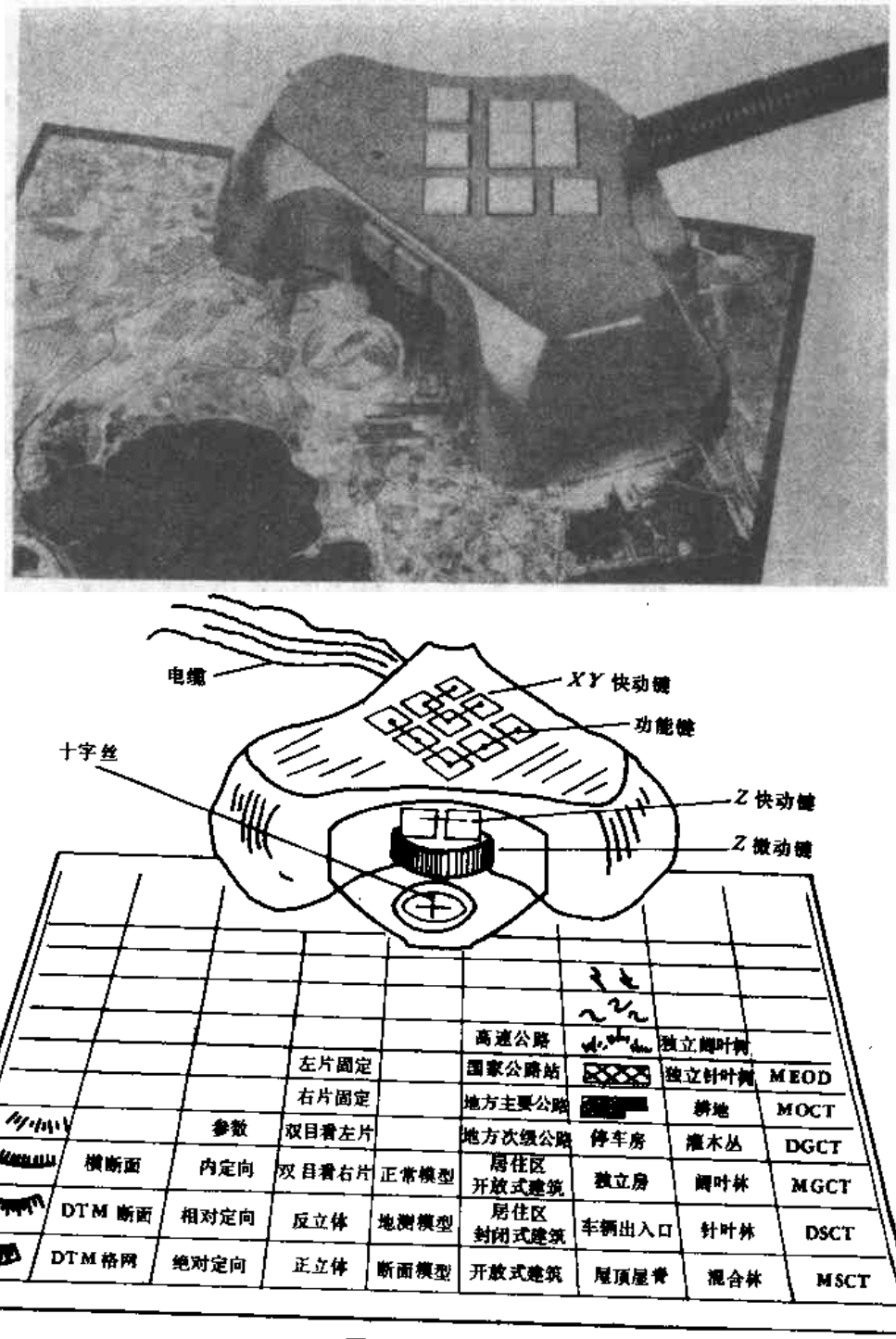


图 13-6-12

ROINT等功能。

此外，P鼠标器上的光标可放置于数字化图形扳上的菜单扳上调用程序或功能键，它既包含原来C系列解析测图仪上的面板操作，也包含了BC2解析测图仪的菜单式键盘。用户可以利用PHOCUS软件所包含的功能按实际需要来定义最佳菜单。

3. P处理器与主计算机

在P系列解析测图仪中利用智能化的P处理器来减轻主机的负担，实时地完成坐标变换和伺服控制，起到数字投影器的作用。

P处理器包括一个16位的Intel 8086微处理器和一个8087协处理器。主计算机通过IEEE488接口对数据和参数进行交换。P处理器中用PASCAL写的固件具有如下控制功能：

——状态的监控；

——从图形扳、手轮、Z姆指手轮、运动键和脚盘上读取输入增量；

——对所有的输入量加权求和；

——通过若干坐标变换来计算所需的像片车架运动量，以实时地保证物像间的共线方程关系；

——将运动增量传送到伺服驱动装置上，伺服系统为闭环直流电机，最大移动速度在每个驱动方向上为35mm/s；

——以矢量或绝对方式计算和安置目标点；

——监视P鼠标器和脚踏开关；

——单点量测；

——按曲线、行程、高程或时间增量来进行连续量测；

——在主机进行探询之前中间存贮所量测的数据；

——记录模型、像片、像片车架或图形板坐标；

——存储由主计算机传输来的参数组。这些参数是由应用程序、如内定向、相对定向及绝对定向过程中求得，且为实时计算所需要。

P处理器有一组大约由50条指令构成的用于与工作站计算机连接的指令组，用于传输不同的定向参数、观测和运动方式、量测条件、选择状态的方法及量测信息的传输。

这一组指令已提供资料以便用户自己编扩P软件或用其它工作站计算机，如PC微机为P系列仪器编写应用软件。

4. PHOCUS软件系统

解析测图仪是在70年代中期进入航测生产单位的，最初是用于空中三角测量和数字地面模型量测，同时也用于直接测图。所以，把数控绘图仪视为解析测图仪的必要组成部分。随后，人们开始逐步利用计算机存贮和处理数字量的特点，引入机助测图的概念和相应的软件，如C系列解析测图仪的Planimap软件。但这类软件仍是直接绘图为主要目标，图形数据的数字采集、加工和存贮都有暂时性和局限性。通俗地说，它相当于火车站的小件行李寄存处而不是贮放物资的仓库。

随着数据库技术和地理信息系统技术的发展，需要对解析测图仪采集的数据进行进一步编辑处理，并使之长久保存提供给数据库和地理信息系统使用。因此，机助测图被数字测图所取代，解析测图仪的第三代产品应运而生了。

PHOCUS正是这种基于数据库管理的一种用于摄影测量和制图数据收集、处理和检索的结构式的可扩展的人机对话软件系统。它反映了当今作为工作站软件方案占主导地位的

趋势。过去都是把绘图程序嵌入解析测图仪软件中，而现在，解析测图仪程序乃是全能的PHOCUS软件系统中的一个选用软件包。

PHOCUS的核心是一个处理几何和字母数字数据的数据库系统。数据的采集和存贮仍按照结构化的型式，并可根据规定的选择标准处理和输出数据。

PHOCUS的数据结构提供了下述级别的数据分类等级：

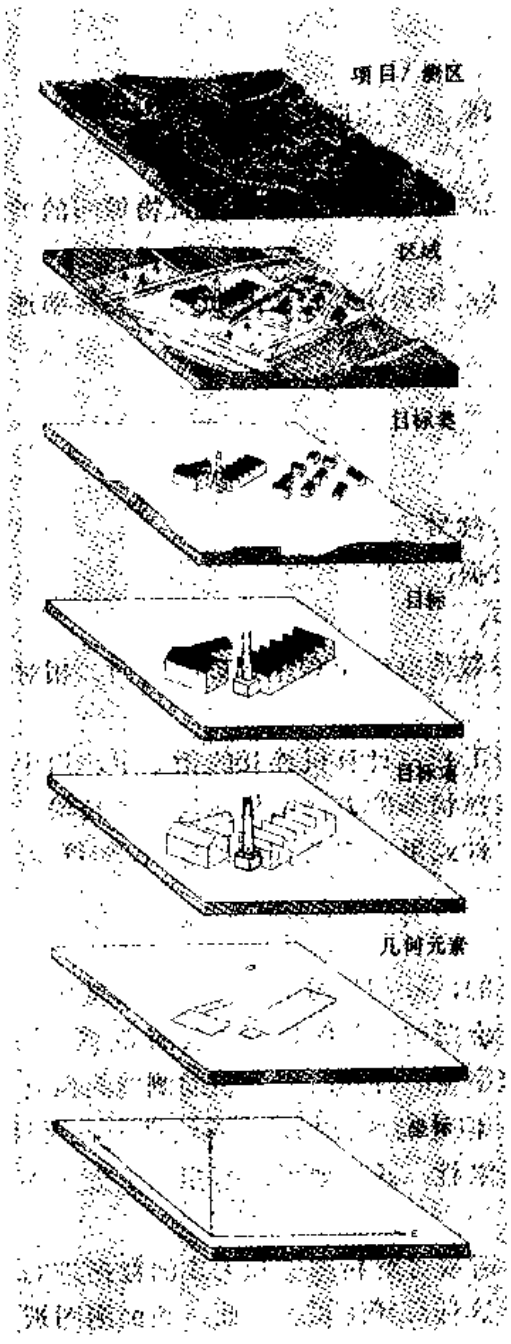


图 13 6 13

级　别	例　子
项　目	1:10000地形图或一项管道工程
区　域	居　民　地
目标类	建　筑　物
目　标	公共建筑物
目标项	道　路
几何元素	道路底层平面图
坐　标	底层平面图

具体例子见图13-6-13。

所谓项目(Project)是能够且必须以任何任务定义使其在主要元素方面不同于其它项目的任务。它可以是一幅地形图、一幅多用途地籍图或是一项管道工程。一个项目可以分成几个区域，这样就可以将在一定时间内暂时不需要的区域内的数据存储在磁带或一个可交换的硬盘上。如一个项目包括几个小居民地或一个中等城市时，就可以这样处理。

在一个区域内可再细分为目标类，将主要方面相类似的数据存放在一起。例如居民地中的建筑物就可作为一个单独的目标类。每个目标类下又包含若干个目标，如在建筑物这个目标类别下，可以有诸如公共建筑物和住宅建筑物等不同的目标。

目标项是一个更低的分类级别。如公共建筑物又可以包含若干个目标项：主建筑的平面图、停车房、通道和建筑物编号等。最后，每个目标项可以包含若干个带坐标的几何元素。

PHOCUS的这种数据结构可容纳目标和目标项之间的拓扑关系。这就是说，属于不同目标或目标项的结点和边沿在数据库中仅存贮一次，并作为公共元素处理。

按照工作站的概念，PHOCUS是由一个与硬件无关的标准软件包和若干个与硬件有关的附加软件组成的软件系统。标准软件包含PHOCUS操作系统、项目管理程序、数据库系统和图形与数字输出的程序。与硬件有关的软件如P软件（用来控制P系列解析测图仪进行数据采集）和D软件（用来控制数字化桌采集数据）。目标的几何位置和属性均存贮起来，以后的图形输出不受数据采集的影响。

由于PHOCUS的数据结构是面向目标而不是面向图形的，所以不需要变更目标数据就可以简捷地完成图形输出。用户可以通过图形码表（GCT）、符号结构表(SCT）和符号执行表（SET）为特定的地图定义图形码。

PHOCUS数据库具有很强的编辑功能。它能根据对几何图形、拓扑关系及属性各种要求准则对目标、目标项，几何元素和点进行编辑。即使在数据采集过程中，也可对现有数据进行编辑。主要编辑功能举例示于图13-6-14中。

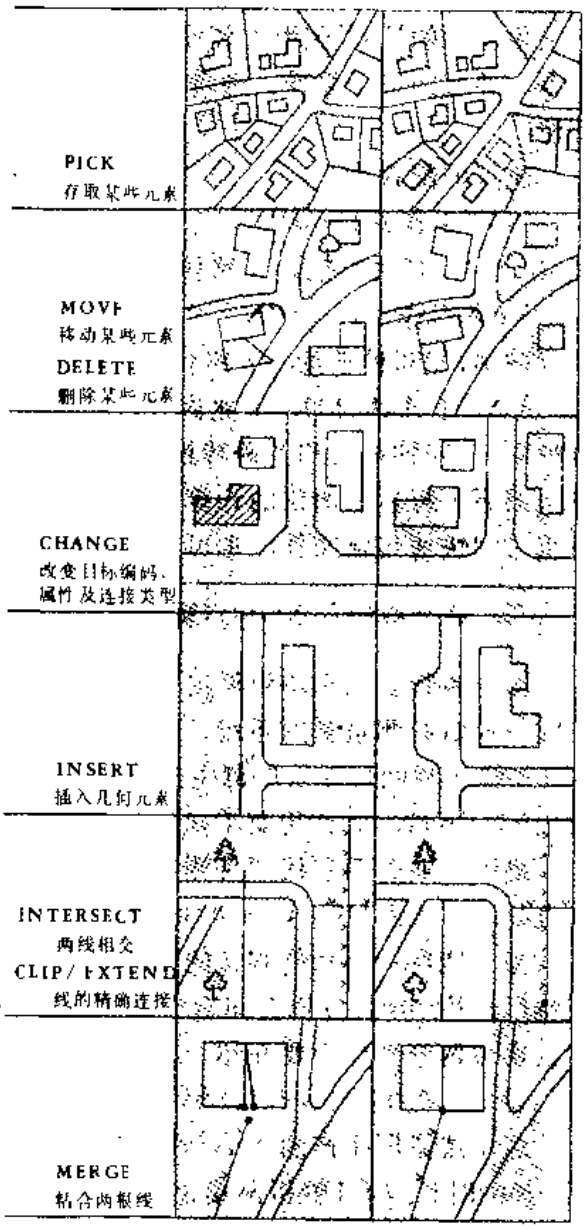


图 13-6-14

PHOCUS是一个开放式系统。它提供数据接口、通讯软件和用户编程模块，有两种数据交换方式：利用PHODAT进行变换或直接在两个数据库或文件间进行变换。现已具有的变换功能有：

PHOCUS—PLANIMAP

PHOCUS—ISIF（Intergraph公司）

PHOCUS—EDBS

PHOCUS—SICAD（西门子公司）

PHOCUS—DXF（AUTOCAD）

PHOCUS—DLG（美国地质调查局）

PHOCUS—ARC/INFO（ESRI）或DLG

概括地讲，PHOCUS是介于摄影测量和制图数据采集与大型数据库及地理信息系统之间的一种中介产品。它既是一个面向目标的小型数据库，又能支持摄影测量与制图数据的在线采集编辑和图形输出。

5. P系列解析测图仪的主机选择

P系列解析测图仪的系统计算机(即主机）可根据用户的需要选择。

从C系列仪器沿用下来，Hewlett Packard公司的HP1000计算机系列，具有多用户实时操作系统RTE A4.1，VC+实用代码的A100，A600，A700和A900处理机，2～8兆内存，40～551兆温盘，盒式磁带机、多路

转换通道、终端，打印机和IEC接口，这些计算机及外围设备均能为PHOCUS操作系统所支持。

建议的配置为：HP1000Micro14微机，A400处理器（2兆内存，81兆温盘，四路转换通道）用于数据采集；HP1000Micro27微机，带有A700处理器，硬件浮点处理器，2兆内存，81兆温盘，八路转换通道；或HP1000Micro29微机，带有A900处理器、硬件浮点处理器；3兆内存，130兆温盘，八路转换通道，用于多用户操作。

P系列解析测图仪也可以与DEC公司的VAX系列的VAX工作站计算机连用。此时一般采用32位的VAX图形工作站计算机，VMS操作系统，Micro VAX Ⅱ处理机，5～16兆内存，并有图形子系统，硬盘、磁带驱动器、多路转换通道，打印机、IEC接口和以太连接网。

建议的配置为：

VAX工作站11/GPX，5兆内存，71兆磁盘，19″彩色屏幕的图形子系统，分辨率为1024×864，16种彩色，4路转换通道。或

VAX工作站11/GPX，9兆内存，151兆磁盘，19″彩色屏幕的图形子系统，1024×864的分辨率，256种彩色，8路转换通道。或

VAX工作站3200，8兆内存，456兆磁盘，19″彩色屏幕的图形子系统，1024×864的分辨率，256种彩色和8路转换通道。

P系列解析测图仪的计算机易于与其它计算机相连接，其中LINK1000用于HP1000A计算机之间快速传输文件，也可以并入地区计算机网络和与IBM/PC兼容机相连。

二、瑞士威特厂Aviolyt解析测图仪

瑞士威特公司在1980年汉堡国际摄影测量大会上首次展出了Aviolyt AC1/Aviotab TA2机控摄影测量测图系统，它相当于C—100同类型的全能解析测图系统。随之又生产BC1型解析测图仪专供航测生产为主要目的的低成本仪器。在此基础上改用DG30计算机取代NOVA机，并使用菜单式键盘，大量生产BC2型解析测图仪。

最近，随着第三代解析测图仪的问世，威特厂又进一步改善其仪器性能，用分布式计算机处理方式和DG Dasher386/IX32位微机工作站来改进BC2，从而推出了BC3型仪器。

为了能在一个功能强大的空间信息系统的数据库管理系统下进行摄影测量数据采集，威特厂与Prime计算机公司合作研究，推出了称之为System 9的全新系统。下面就上述各种主要仪器分别作简要介绍。

（一）Aviolyt AC1，BC1和BC2解析测图仪

瑞士威特厂生产的Aviolyt解析测图仪也属于物方坐标型仪器，其原理与欧波同厂的C—100相同。AC1解析测图仪属于高精度全能型解析测图仪（图13-6-15），于1980年首次展出。

Aviolyt AC1采用线性编码器为量测元件，分辨率为1μm，量测精度也达到±1μm，采用了DG公司的Nova4/X16位计算机，内存为128到256K字节，外存硬盘可达12.5兆字节，硬盘为1.2兆字节。绘图则由Aviotab TA2完成，在TA2中装有微处理机。AC1在结

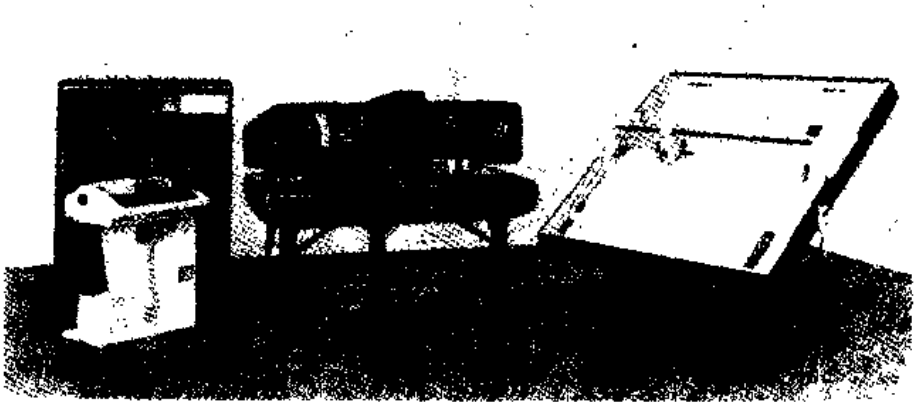


图 13-6-15

构上满足阿贝原理，所以属于高精度量测仪器。

1982年，威特厂推出BC1解析测图仪。它主要是结构作了简化，电子计算机及软件配置均同AC1一样。

售销量大的Aviolyt解析测图仪是BC2型，它是在AC1/BC1基础上经过适当改进而发展起来的，主要是在计算机选型上用当时功能较强的DG30计算机取代了Nova4 型计算机、并连用TA10绘图桌。BC2的量测精度为±2μm，与C—130精度相当。它的主要特点是利用了数字绘图软件DMAP和PFKB5菜单式功能键盘来方便而快速地进行数字测图、下面扼要地介绍一下BC2解析测图仪的总体结构、硬软件配置及菜单式功能键盘等。

1.BC2解析测图仪的总体结构与硬件设备

BC2解析测图仪的外貌示于图13-6-16中。其总体结构可用图13 6 17表示。

作业员可以通过三种方式来变动模型坐标左、右手轮和脚盘；X、Y平面内的自由手推架或X、Y、Z快动操纵杆。变动的坐标增量以数字形式输入电子计算机，经过实时软件处理形成左、右像架坐标，驱动像片车架和测标。

BC2主机面扳上有一8位数字的显示器，无论是模型坐标、像片坐标、像片车架坐标，地面坐标或绘图桌坐标均可通过面扳上的相应按键实时地显示出来。

DG30微型计算机用来实时地控制测标和绘图头，并实时数字导杆交会。它控制所有的摄影测量作业并处理各种各样的应用软件。该机字长16位，具有硬件浮点处理，512KB内存（最大可扩充至1.5MB），可带1～2台368KB的软磁盘机和1～2台15MB或38MB的硬磁盘机。

BC 2有四个独立的像片车架。左、右像片盘仅作y方向移动，而左、右观测物镜作x方向运动。这样做可以减小仪器在基线方向的尺寸，但它给CCD摄像机的安装带来困难。

为了避免马达散热和机械磨损对量测精度的影响，BC2遵循驱动机构与量测机构分离的原则，像片车架采用了四个线性编码器、编码器的分辨率为1μm。

图13-6-18为BC2的光学系统，它备有环形和光点两种测标，颜色可调换，通过观测物镜得到像片影像和测标的清晰构像，然后通过光导纤维管把它引入光路，在目镜中观测。这样可避免光源热量对量测系统的影响。

图 13 6 16

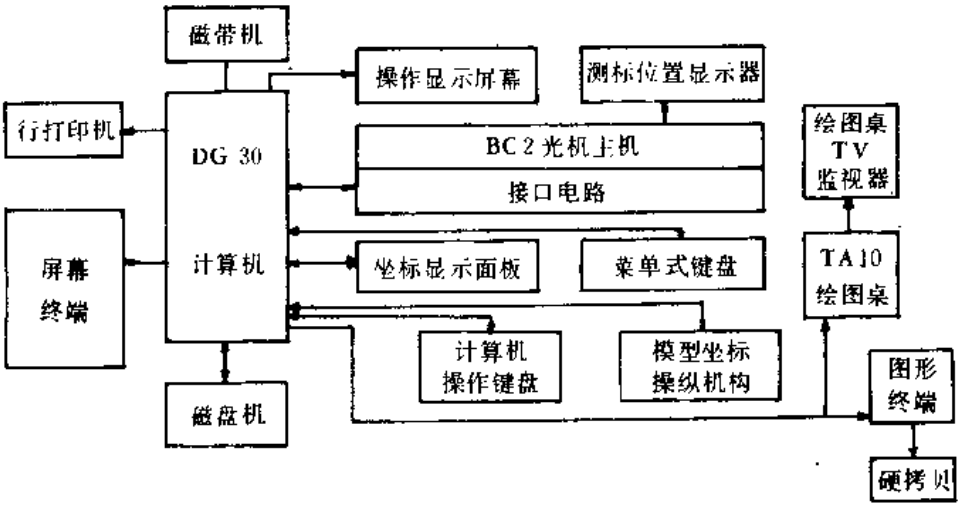


图 13 6 17

BC2的观测系统一般配置6倍的观察目镜，视场为30mm，用户亦可选购9倍目镜。对高精度量测可提供6～20倍的ZOOM变倍系统。Dove棱镜旋像范围为35°至135°。观测光路可调节为几种不同状态：（1）正立体（左眼看左片，右眼看右片）；（2）反立体（左眼看右片，右眼看左片）；（3）双眼看右片；（4）视像翻转（如同正负片对换）。

为了操作方便，BC2解析测图仪把DG30标准配置的终端分开放置，其操作键盘置于主机前，显示屏幕置于仪器左侧。在作业过程中，键盘用以输入指令与参数，而可以被调用的程序清单、下一步操作的提示，问题提示和出错信息都显示在屏幕上。各种记录数据亦可有选择地显示出来以供检查。

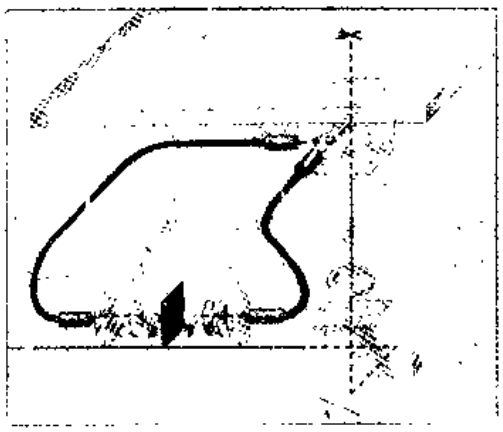


图 13 6 18

BC2与C-100系列仪器不同，它没有摄影测量操作面版，各种摄影测量作业均通过调用相应的程序清单。在作业中，屏幕上将根据需要出现主清单和子清单，并有较详细的说明和提示。对于初学者，有助于了解和学会使用这些程序。但对于熟练的作业员，这种逐步调用和显示清单的方法不如面板上直接操作方便。但BC2上有菜单式功能键盘，来加速数字或机助测图过程，其结构和原理将在下面讨论。

BC2上装有测标位置显示器，将右像片放在其安片框中，可以看到一个能在像片上移动的亮点，且它与右测标同步移动，因此它代表了测标在右片上的位置，为此，放入像片后应先作必要的内定向。

BC2的DG30计算机可以连接行打印机，磁带机，TA10（或TA2）数控绘图桌，图形

终端（Tektronix4107或4109）与硬拷贝机等输入、输出设备。也可加第二个字符终端，以提供在作业中同时进行编辑程序及运行应用程序。

2. BC2解析测图仪的软件

DG30计算机配备有RDOS和ADS两种操作系统。BC2采用RDOS操作系统，标准配置Fortran5语言供用户编制程序。

BC2的实时程序在完成数字投影任务的同时，还可以进行物镜畸变，软片仿射变形、地球曲率和大气折光差等像差改正。实时程序每秒执行75次。

为了方便用户，BC2的系统软件采取下述三个措施：（1）采用清单（或称菜单）形式，将所有的功能列为清单显示出来；（2）采用树枝状结构，作业员可沿着系统设计好的渠道，通过人机对话方式，一步步地进入自己所要选择的作业状态，而且在屏幕上有较全面的提示和解释，它虽不如面板操作快，但比较可靠，不会发生错误操作，对初学者有利；（3）该系统允许用户通过USIP应用程序，补充自己专门用途的程序。

BC2解析测图仪系统软件中各程序的功能可以简述如下：

（1）INP数据输入

该程序用于输入摄影机校正数据，定向参数，格网点标准坐标，控制点及特征点地面坐标。输入的数据存于磁盘文件中，可以显示、打印或调出修改。

（2）PLI绘图准备程序

该程序具有展绘公里格网、图廓、控制点，建立线划库和符号库等功能。

（3）CMO校正模式

该程序用作仪器检校，有两种功能：

第一是仪器校准，确定仪器的校正参数，这一工作是利用像片盘上刻的9个相互间距为90mm的十字丝进行的。根据9个点的坐标量测值和标准值，计算出仿射变换的6个参数，提供给实时程序作系统误差改正用。

第二是标准状态监测，检查仪器的工作状态是否发生变化。为此，量测上述9个十字丝（或精密格网扳）的坐标，然后用仪器校准得到的参数对坐标加以改正，再与标准值比较。根据较差的大小可判定仪器状态是否稳定。如较差超出规定限值，则用新测坐标重新计算仪器的准系统误差参数。

（4）MMO单像坐标仪量测模式

此程序模块用于单张像片量测或双眼观测单张像片，这是在线量测程序。程序可以通过量测四个框标进行内定向，也可实现从像片车架坐标到像片坐标的变换，并加入像片仿射变形改正。

（5）TMO三角测量程序

该程序可以使BC2作为在线形式的立体坐标量测仪使用。它可用于对单模型、航带模型进行快速及无粗差的测量，特别在实时计算中可用统计方法检测粗差。在航带模型的测量中，从正立体到反立体观察内转换器自动转换，从而实现模型连接的自动传递。

每个立体像对的量测包括三个阶段：预置、定向和量测。定向包括内定向和相对定向，测量完毕后，像片坐标和模型坐标（含投影中心坐标）能自动存贮到磁盘上各自像片坐标

号码和模型坐标号码名下。每个模型最多允许200个点，每张像片最多允许300个点。

（6）PMO测图模式

这是用于立体测图的模块，也是BC2上最大的一个模块。用作立体像片对的数字（图解测图。它也分为三部分：预置、定向和测图。

预置阶段输入该模型测图所必需的各种数据。定向阶段首先进行内定向，相对定向和绝对定向。相对定向和绝对定向也可合起来进行一步定向（或称外部定向），求解左、右片共12个外方位元素。此时要量测相对定向标准点和控制点坐标。定向是一个迭代过程，当残差符合作业要求时便可结束。

如果绘图桌需要在线地绘图，可作图板定向，所有的定向完毕后，打印机上可输出量测值、残差和定向参数。

PMO可按照所选择的测图方式对立体模型进行量测和测图，大体有以下六种方式：

①直接绘图：当BC2的主机与绘图桌联机使用进行立体模型的量测时，绘图桌将直接绘出所测的所有内容，如等高线、地形轮廓、地物符号及数字和文字注记等。BC2联机测图与一般模拟测图仪测图的不同之处是，它可以通过机助测图软件，使测图过程中的许多辅助操作自动化，例如自由选择线型（分散记录点的直线或曲线连接，或绘图笔随测标同步运动），自动绘制平行线、多边形区域自动闭合，自动绘制各种依比例尺和不依比例尺的地物符号，以及封闭区的自动晕滃等。

②数字测图：数字测图的目的是生产数字地图。在矢量形式的数字地图中，一切地图内容均转换成一系列的地面点坐标（X、Y、Z）及若干属性编码的形式。地图信息用数字形式表达与存贮后，可在任何时候调用，可通过数据库系统或绘图程序的编辑功能在图形终端上进行编辑加工后获得数字地图，并且可使用数控绘图桌绘出或刻出所需要比例尺的地形图。就这个意义讲，每台解析测图仪不需要一定配有高精度数控绘图仪。数字测图和计算机地图编辑将免去人工绘图和清绘的手工劳动过程，并有利于建立地学数据库和进行地图更新。

③单点量测：逐个地量测立体模型中的某些点，如高程量测中的地性线上的点、山脊、山顶、谷底、鞍部、地形变换处的点等。或在坐标地籍中的界址点等。

④机控量测：为适应作业需要，在量测点的X、Y、Z坐标过程中，测标的运动部分由计算机控制（点位移动），部分由人工操纵完成（切准地表面），从而加快速度，提高效率。例如，在断面测量中，一旦断面方向确定后，仪器的测标可在计算机控制下自动沿此方向移动。此时作业员只要操纵Z坐标使测标切准模型表面。除了这种“单个断面”程序外，还有“平行断面程序”可以自由选择断面间距。

为了采集数字高程模型和为正射投影仪OR—1提供像片断面数据，BC2还提供“格网量测程序”。当起始点、格网方位角和格网间距ΔX，ΔY确定后，程序将自动沿格网线采集格网点的高程。在格网点之间的测标运行速度随地面起伏大小而不断调节。在每一格网点上的移动要停顿一小段时间，以便照准达到所需的精度。也可采用定时或定距离采样，可连续动态跟踪，也可静态量测。记录方式多种多样，可以记录像片坐标、模型坐标、地面坐标或绘图桌坐标。

⑤在线计算：该程序的目的是为了在量测的同时进行距离、角度、弧度、重心、面积和体积等计算。这对于勘察设计部门是特别有用的

⑥用户程序：BC2允许执行用户按USIP应用软件自行编制的测图作业程序。

（7）DMO诊断模式

该程序的作用是检查仪器的硬部件，如观测系统，面板按键与开关，面板显示，交互终端，行打印机和绘图桌的功能是否正常。如有问题则输出差错的部位与性质，以便排除故障或进行检修。

（8）OUT数据输出

该程序用于把各种量测所记录的文件和数据转换成可输出的形式，可选择的输出途径有屏幕显示、打印输出、记录到磁带中或由绘图桌图解绘图等。

（9）ATI空中三角测量输入模块

该程序用以将TMO程序所记录的文件和数据转换成可输出的形式（ASC II码）转记到磁带上，供进一步进行空中三角测量（ATM，PAT—MF，PAT--B）用。如有必要，亦可在屏幕上显示或打印输出。

BC2解析测图仪为了完成更多的摄影测量任务，可以选购一些与系统相互独立的一些计算程序。当测图仪基本设备以点形式使用时，下列应用程序可以执行

①空中三角测量程序，如ATM，PAT-MF均为独立模型法区域网程序，后者明显优于前者，且有自动剔除粗差功能。又如PAT--B光束法区域网平差程序，具有自检校改正系统误差功能。CRIAN程序则可根据空中三角测量加密成果计算像片方位元素。

②正射像片数据准备程序，称为SORA—C。它可由DTM数据内插形成OR—1正射投影仪在制作正射像片时所需要的断面数据（像片坐标）。

③等高线内插程序。BC2上装有CIP程序，它可由规则或不规则分布的数据点连成不规则三角形格网，然后用有限元法内插规则格网点高程。天然目标和人工目标的断裂线以及地形结构线均可作边三角形边参加内插。还有其它程序用来计算体积，绘制透视图等。该程序由威特厂自己研制。

上文提到的USIP程序为用户程序接口，利用这个程序可以Fortran语言编写作业员自己特殊需要的绘图作业程序，并将它置于PMO系统软件中。

3.菜单式功能键盘和DMAP软件

在C系列解析测图仪上的数字测图和机助测图是利用Planimap软件和计算机屏幕上的菜单进行的，作业员必须在计算机键盘上做许多人机对话和键入动作。为了更便于机助测图和数字测图，在BC2解析测图仪上利用了菜单式功能键盘在DMAP软件支配下工作，从而对用户更加友好。

BC2解析测图仪上设置了PFKB5菜单式功能键盘，见图13-6 19所示。

键盘由64个按键组成，左边40个为地物目标键，右边24个为功能键。只要用手指轻轻按动按键，计算机即执行相应动作与任务。右边的功能键是固定的，它执行程序化的功能。例如在线编辑（删除地物，删除点），测图参数的初始化和修改（初始化），线型（直线，曲线），机助绘图功能（同步、平行、直角、晕滚及多边形边线的闭合）等。左边40个是

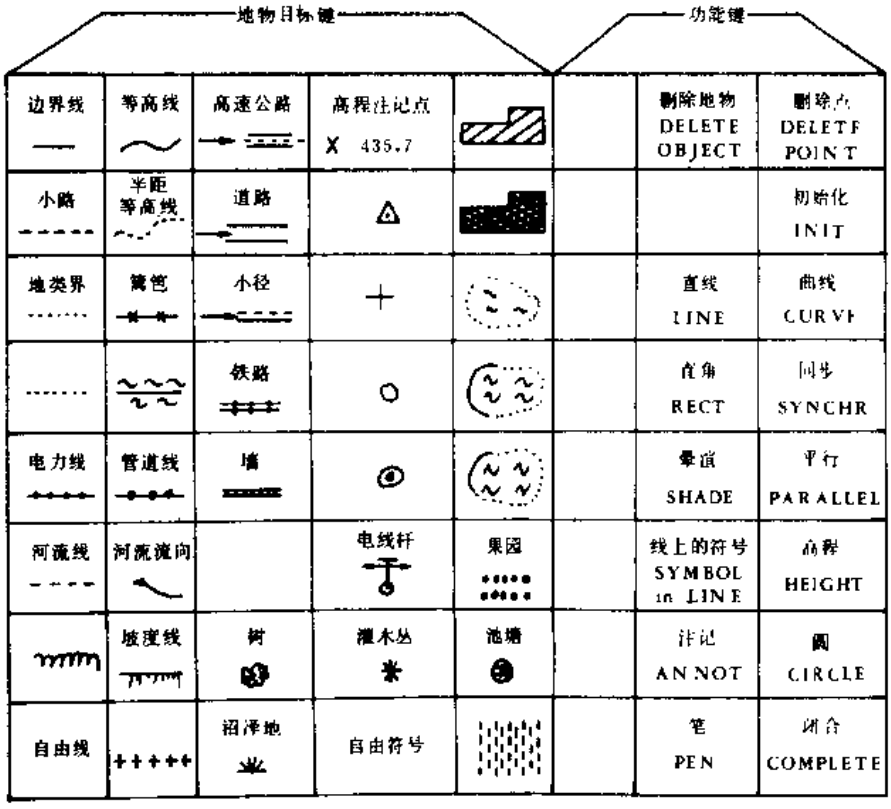


图 13-6-19

用户绘图符号库的调用键。每个键实际对应与一个程序。调用右边的24个程序键和使用主机前的键盘，即可生成各种图式符号的扫描程序，并贮存在用户绘图符号库内，库内的程序可根据使用情况按40个分组（组间可以部分重复），每组有一个编号。组内则按1～40编号，并编排成与菜单式键盘对应的表格、绘上直观的图样。作业时按测区情况，选取需要的组号，这样就可以通过PFKB5上的按键实现各种符号的自动记录与描绘。

DMAP是威特厂研制的新型图解或数字测图用的软件系统。它可广泛用于机助和机控摄影测量作业中。DMAP有三个不同的模块：初始化和系统建立，机助测图和数字测图。

在系统初始化中要建立符号和线型符号库。BC2上可达到999个符号，200个单线型、200个多线型符号。系统初始化还包括测图纸张上的准备如绘制图幅边框，公里格网，图名、坐标系，控制点及各种必要的注记。

在系统初始化中还要根据测图需要选定所要用的哪一组40个地物目标键，以便在测图中使用PFKB5菜单式键盘。

在线机助测图模块用于在线地从TA10（或TA2）绘图桌上输出完整的图件。在测图同时，数据亦可存贮在硬盘上。在测图过程中可以改正记录误差和进行编辑。在该程序模块中拥有制图所需的所有子程序，包括：

——符号子程序：可自由选择大小和方位；

——线型子程序：绘制单双线的直线和曲线；

——严格正交性子程序：用最小二乘平差法保证建筑物的严格正交性；

——闭合图形内晕渲子程序：利用从线型库中选取的平行线、或用符号来填充所要晕渲的区域，坡度和间隔可自由选择；

——注记子程序：自由选择字体大小和方位。

——多边形和曲线子程序：能自动回到闭合多边形或闭合曲线的起点，当从直线过渡到曲线时有完美的切向过渡；

——高程注记点子程序：自由选择数字大小，坡度和方位；

——测图窗子程序：可在任何位置上规定一个长方形测图窗口，测图仅在此窗口内进行，但不影响硬盘上数据输出的完整性。

上述功能的示范结果见图13-6-20。

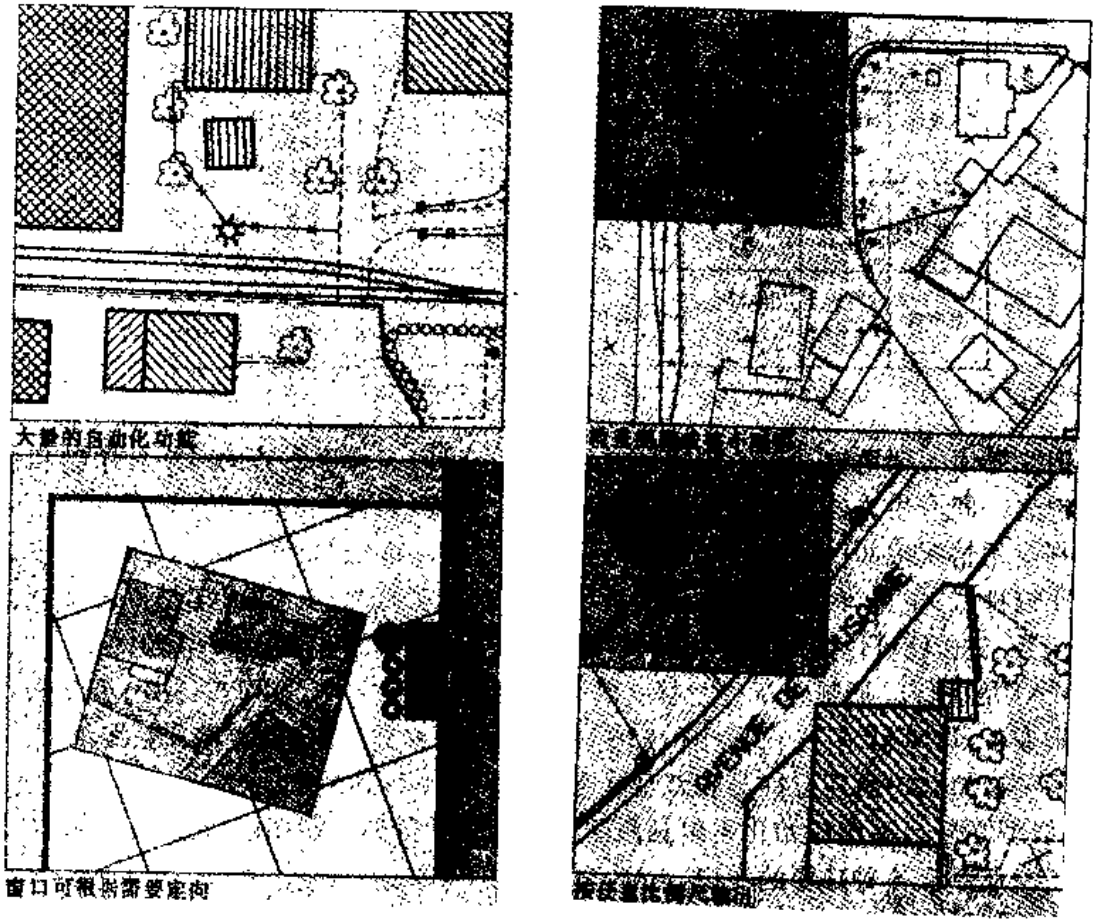


图 13 6 20

DMAP的第三个软件模块是数字测图模块。它能在BC2的数据采集过程中同步地建立两个二进制文件，两个文件间用指针连接。数据点文件中存贮每个点的XYZ坐标，其特征码（包括地物码和/或数据类型）和状态信息（点型、点连接的类型）。图形文件包含所有的图形参数，在量测和记录时作业员可以将他们设置到所量测的地物上或者利用PFKB5菜单式功能键盘简单地键入。

这两个文件可以输出到下列终端设置上：

* 字母数字监控器（用于控制）；

* 彩色图形监控器（用于编辑）和硬拷贝设备（以便存档保存）；

* 行打印机（以便保存）；

* 磁带或磁盘（以便存贮和传输）；

* 威特TA2和TA10绘图桌（带或不带图形特征码的绘图，或仅用于检查测图质量）。

数字测图与在线机助测量的质量相同，甚至更好，这是因为数字测图中发现的错误和删去的元素不会被测绘出来。而且，数字测图的结果可根据用户的不同以不同比例尺输出，或送到交互式图形系统和数据库，这些也是它的明显优越之处。

从以上讨论可见，P系列解析测图仪的数字测图功能乃适当吸取了威特厂BC2的长处。

（二）BC3解析测图仪

BC3承接了AC1，BC1和BC2三种产品的设计思想和制作工艺，吸取了第三代解析测图仪和数据采集工作站的新概念，采用了计算机技术的最新成果，主要在以下三方面作了重大改进：

首先，BC3一改以往三种产品所遵循的所有计算处理工作都由主计算机完成的集中处理的原则，采用了分布式处理的先进思想（可以说是引用了克恩厂DSR11的分布式计算机配置思想），即用Intel80286和80287作为实时处理器。它利用共线方程和已求出的像片方位元素，实时地计算左、右像片的影像坐标，并用伺服控制处理器Intel80188去指挥伺服系统驱动左右像片盘和观测系统的运动，最终形成和维持实时作业中的数字导杆的正确交会，获得无上下视差的立体模型。分布式处理使主计算机有更多的时间和空间去处理其它计算任务，而且由于实时计算处理的独立性，给整个系统和计算机的改进和扩充提供了更大的机动灵活性。

其次，BC3所选用的主计算机为32位微机，用Intel 80386作中央处理器并配以80387作硬浮点协处理器，其运算速度远比DG30快。其内存可按需要从4MB扩充至16MB（兆字节），硬盘可选择159MB容量，采用UNIX操作系统，同时兼容MS—DOS操作系统。除了基本配置占用了五个PCB（印刷电路板）插槽外，还配置了五个PCB插槽，为系统的扩展留下了充分的余地。

第三，在BC3的测图软件中采用了新的数字测图软件，它在386微机和高分辨率彩色图形终端的支持下实现联机编辑功能，也即是在数据获取的同时进行数据处理，作业员从屏幕上实时地监视着动态显示的图形，根据需要调用某些功能进行地形和拓扑学关系的检核，及时地进行处理和编辑，并将编辑处理过的数据存储起来。最后，一幅完整的测图数据可以图形方式全部或局部放大地显示在图形终端上，以便进行最后的脱机编辑修改，确认无误后，再输出到绘图桌上绘出图来。绘图和数字测图的数据采集是两种并行不悖的由计算机多用户系统所支持的任务。

下面就BC3的硬件和软件配置分别作扼要介绍。

1. BC3的硬件配置

BC3解析测图仪总貌见图13 6-21，其硬件配置如图13 6 22所示。

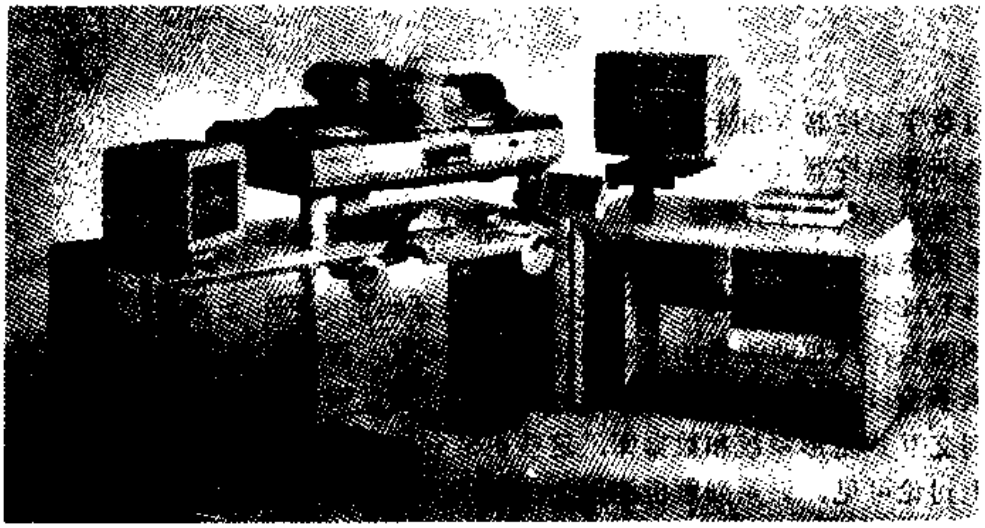


图 13 6 21

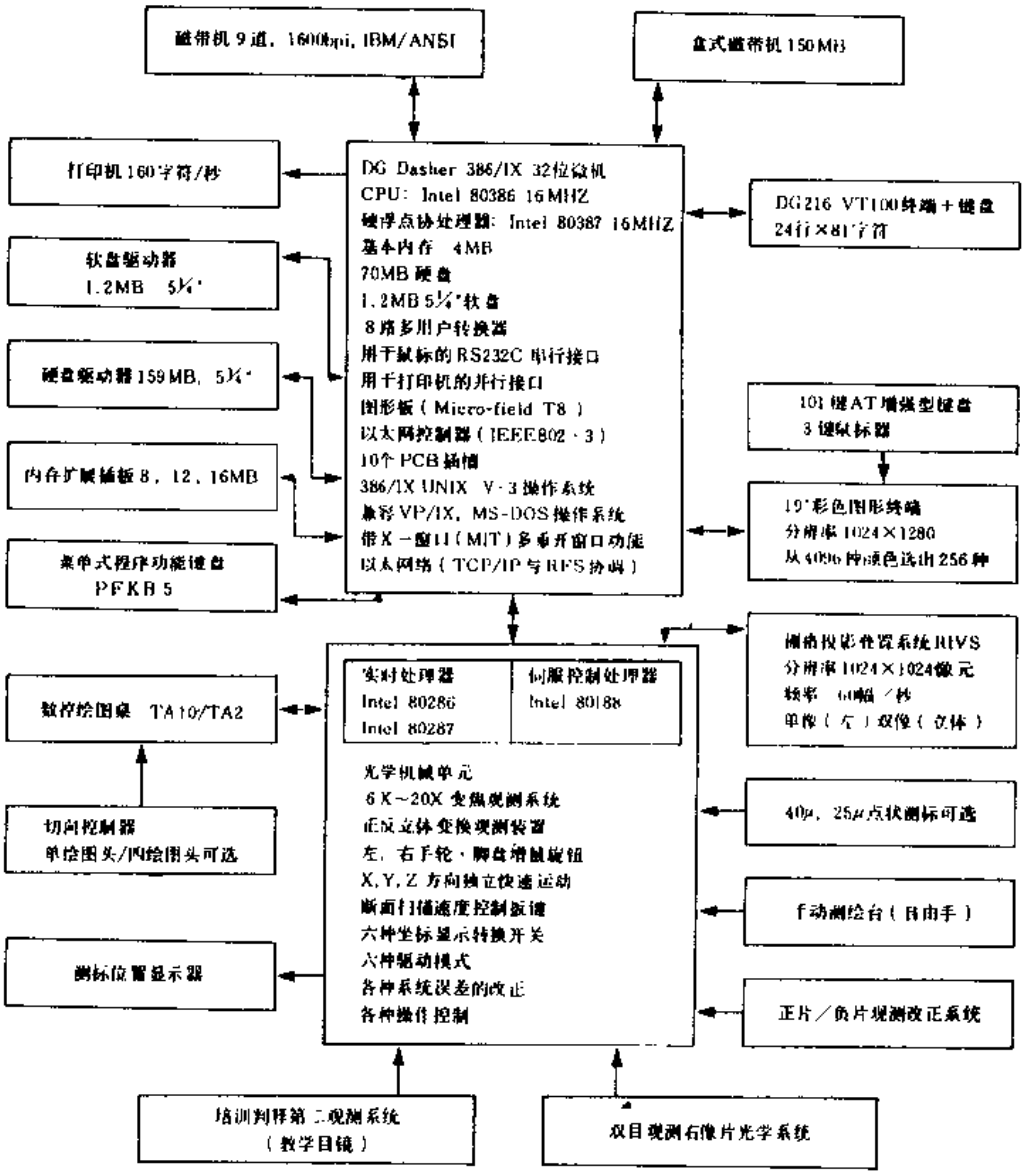


图 13-6-22

BC3硬件包括四大部分：立体观测主机，与立体观测主机有关的配选件，DG DASHER/386计算机和TA10/TA2数控绘图桌。

立体观测主机包括像片盘车架，像片量测系统、光学观测系统和电子控制部件。像盘面积270×270mm²，可放像片最大尺寸为240×240mm²，仍然是像片在Y方向运动，光学照准部件在X方向上运动。像片量测系统采用可归零的线性编码器，分辨率为1μm驱动系统采用闭环直流伺服系统。25点格网量测精度优于±2μm。变焦系统左右独立，放大倍率为6～20倍。点测标直径为40和25μm，环状测标直径为110μm（内径）和130μm（外径）。杜威旋像棱镜可使左右影像分别在150°范围内旋转。BC3设有增量旋钮，当作为立体量测仪及定向时，它用来调整b_y，若用户启动了BC3的高程调节键则用它来安置高程显示的零点。BC3功能键位于坐标显示面板上，它一共有五个功能键，除上述高程调节键外，还有记录键（选择手动或自动方式进行记录），释放键（自动定位中释放左右像片盘），退出键（终止或中断量测程序退回到高一级菜单中去）及下一点键（删除当前点号以便输入新的点号）。BC3上也使用了菜单式功能键盘PFKB5的方便数字测图。立体观测主机其它性能均与BC2相同。

与立体观测主机相配套，用户还可选购下列配件：正片/负片光学变换装置，双目观测右片光学变换装置，第二观测系统PIO6教学目镜，手动测绘台，测标位置显示器。这里要提到的是威特厂在BC3上也有了可用来将地图与影像叠置的栅格投影叠置装置RIVS。它能把已测绘过的地物地貌或其它图形作为存储的信息显示在图形监视器上，然后再投射入观测光路之中与视场中的影像相叠合。RIVS系统每秒可建立60幅独立完整的图形，因此它是与测绘连续同步的。这与蔡司厂Videomap，克恩厂的KR1SS系统是相似的。

BC3采用的主机为DG DASHER/386，它是美国通用数据公司生产的32位微机。其主要性能与指标已在上文中介绍。这里补充讲几个特点。

首先介绍其大屏幕高分辨率的彩色图形终端。它配上相应的图形卡和操作系统以后，可以将屏幕分割成若干个窗口同时独立地运行多个程序（见图13-6-23），它的光标由带有三个键的鼠标器控制。这样就可以让一个作业员在进行常规作业显示菜单的同时进行图形编辑，也即是在采集数据的同时对数据进行处理，使真正的联机编辑成为现实。

其次，BC3上的附加字母数字终端，由于采用了实时处理器和伺服控制处理器，使主计算机有更充分的时间和空间来从事其它的工作。前台处理的是与BC3有关的任务，后台可同时处理其它任务。

BC3上的数控绘图桌可选用TA10或TA2，其性能指标已在上文中叙述。

2. BC3的软件配置

BC3的系统软件是在BC2基础上发展起来的。它为模块形式，呈树状结构．采用菜单技术。系统软件包括以下程序模块：

（1）基础软件包。其中INI为量测系统初始化模块，用于设置模型号、像片号，摄影机号以及与此相关的一系列参数，并输入像片改正方式参数等。DIO为文件管理模块，用于数据的输入、编辑、增补和输出。CMO为仪器的检校及检校状态监控模块，与BC2上的相同。DMO为诊断程序模块，对系统内所有部件及计算机的外围设备进行故障诊断，

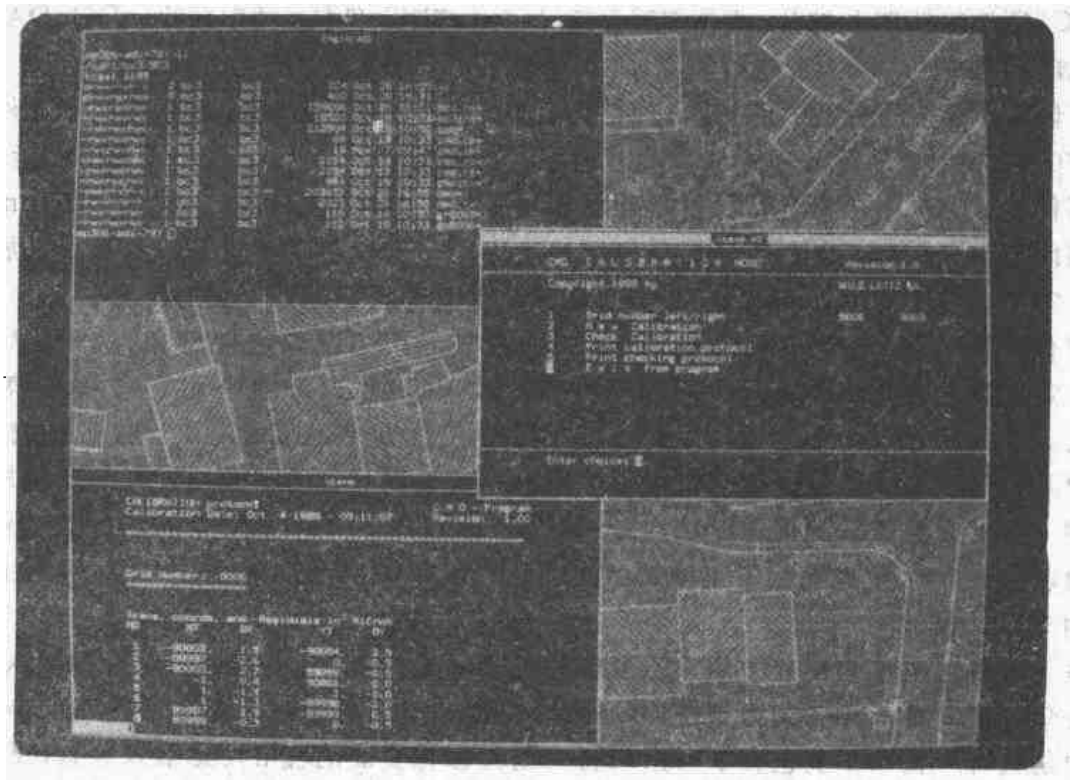


图 13-6-23

指出故障所在。

（2）ORI定向软件包。用于垂直、倾斜，交向的立体像对的定向。程序允许每片量测最多8个框标，每个像对最多30个定向点。

（3）DTM数字地面模型的数据采集模块。该模块提供了以多种方式来获取DEM数据：可由单个断面，平行断面、规则格网，任意断面和任意格网上采集数据。采集数据时可由人工控制逐点记录，也可以用编程的方法按时间或距离间隔由仪器自动记录。记录的可以是像片坐标，断面坐标或大地坐标。采集数据时，断面扫描速度可以由作业员手动无极控制，速度在0.3mm/s到10mm/s之间。

（4）MAP数字化测图和编辑软件包。这个软件由两个程序模块组成：

——MAPCE为数字测图数据获取和联机/脱机编辑模块。此模块将获取的数字测图数据按面向目标分层的数据库结构存取，分为地物类，地物分组型，线型和点型。数字测图的命令输入仍利用PFKB5菜单式功能键盘。数字地图的编辑工作在图形终端上进行。编辑功能包括对成组的地物或线段进行删除，移位、放大、旋转，复制等；删除内部或外部的窗口；取消前面的命令；部分或全部恢复先前删除的地图要素；按要求对线段的连接作几何上的调整；对地物分组；对已有的地物进行“啮合”；删除，配置或改变文本或符号；改变属性（特征码，线型或绘图笔）；改变描绘比例尺；决定输入文本的各种参数；选定窗口并变焦放大；选用投影平面（X，Y；X，Z或Y，Z）；图形管理等。

——MAPLB为生成图形程序库模块。它包括CSY(符号库生成)，CLN(线划库生成)，

CFL（地物库生成）和FK5（PFKB5菜单式功能键盘的命名）等子程序。

（5）PLOT绘图模块。包括四个子程序：GRD用作底图的准备工作，如绘制格网和图廓整饰；PCP用来绘制控制点；PMP绘制成批点；PLI输入连接绘图桌的参数。

（6）ATP空中三角测量数据采集模块。此模块可进行项目管理、文件管理、文件编辑、量测、联机检查模型连接以及独立模型法与光束法平差输入文件等工作。此模块可分别量测左右像片框标，按定向点、三角点和加密点分别冠以不同的代码以便分开处理。点号由10位组成，每个模型可达1000个点。可进行相对定向并可随时被“冻结”，可进行绝对定向及对模型中的单点进行量测。所有的模型参数可存贮起来以便重复量测和单模型安置。

（7）基本附加软件包。如ORIZB可将相对控制条件如基线长度，相机倾斜角，已知的平面或距离值加入到立体模型像对的定向计算中。DIGTA用于在数字化板或绘图桌上对控制点或成批点数字化。MONO则用于单像方式下量测像点坐标。POINT能根据已知点号快速地进行重复量测，用于精度检测中。此外还有XMIT/BC3—BC2用来按串行异步连接在BC3和BC2之间进行数据传输。

显然，上述系统软件的功能要比BC2有所改善和扩充。

BC3的应用软件均是微机型的，如PATM—PC，PATB—PC和SORA—PC。TIN则是用于内插DEM不规则三角网的计算程序。它带有等高线内插子程序，计算单点坐标和误差子程序，生成规则格网和计算体积与横断面的子程序。USIP仍为用户接口软件包。该软件包由BC3的系统软件子程序所组成，大部分用FORTRAN77语言编写，小部分用汇编程序。所有子程序均提供源码，以便于用户自己开发新的软件。

（三）SYSTEM9简介

SYSTEM9是由威特厂和Prime计算机公司合作研制的产品，它是一个功能齐全的地理信息系统，用来记录、管理、分析和显示地图数据并与环境、社会经济和其它基于土地的信息发生关系，具有从地形测图到土地利用规划与基本设施管理广泛的地理应用范围。

SYSTEM9的硬件包括各种基础数据的采集、编辑和存贮管理系统。如S9—D为地图或其他图件的数字化站，S9—E为编辑站能对电子速测仪，地图数字化和摄影测量采集数据进行编辑，S9—AP为解析摄影测量工作站，采用了威特厂的BC3解析测图仪，S9—A为字母数字查询工作站，S9—S为文件服务系统。为了支持系统9地理信息系统的工作，它还拥有大量外围设备和组成SYSTEM9网络。所采用的计算机为32位字长的Sun工作站和Prime WS3600系列微机工作站。

SYSTEM9的软件能提供硬件工作的独立性，使用的操作系统为UNIX4.2BSD版本，以提供很高的性能和极快的响应速度。目前它是在Sun3系列工作站上运行，也可在Prime公司的SPARC工作站上使用。

因此，从上面的介绍看出，SYSTEM9不应看作是一台解析测图仪，而是包括各种测量数据采集工作站的综合地理信息系统。

事实上，SYSTEM9是一个面向特征的关系数据库。它将各种地理要素如道路、河流、电力线，土地块等作为特征来表示和编址，并伴随其有关属性如名称、地址、材料等。在

SYSTEM9中，几何和属性位于一个简单的关系数据库中。而不像一般的传统方法那样分成两个文件，并需要在两者之间提供连接。

在SYSTEM9中，地图不是作为图画而是作为数据库处理的。所有地理特征连其属性用一个结构化的数据模型（图13-6-24）来表示，其位置、拓扑关系和属性的结合决定了所有的分析操作如显示、查询、绘图，打出报告等。

关于数字测图、数据库和地理信息系统的概念将在数字摄影测量等有关课程中详细讨论。

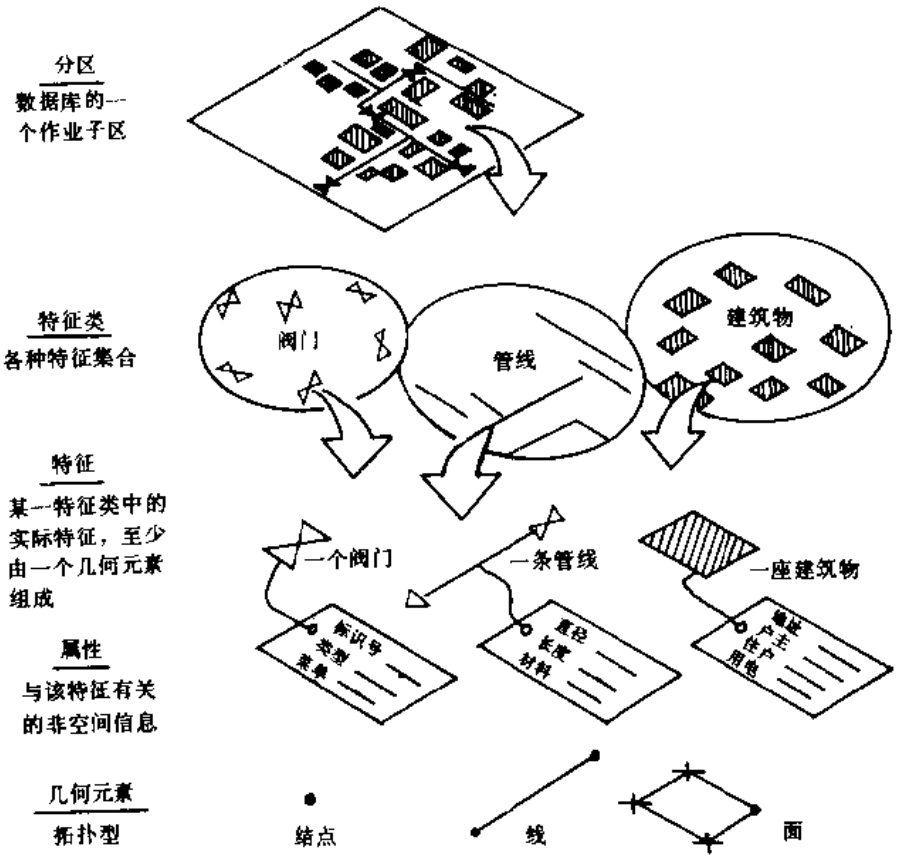


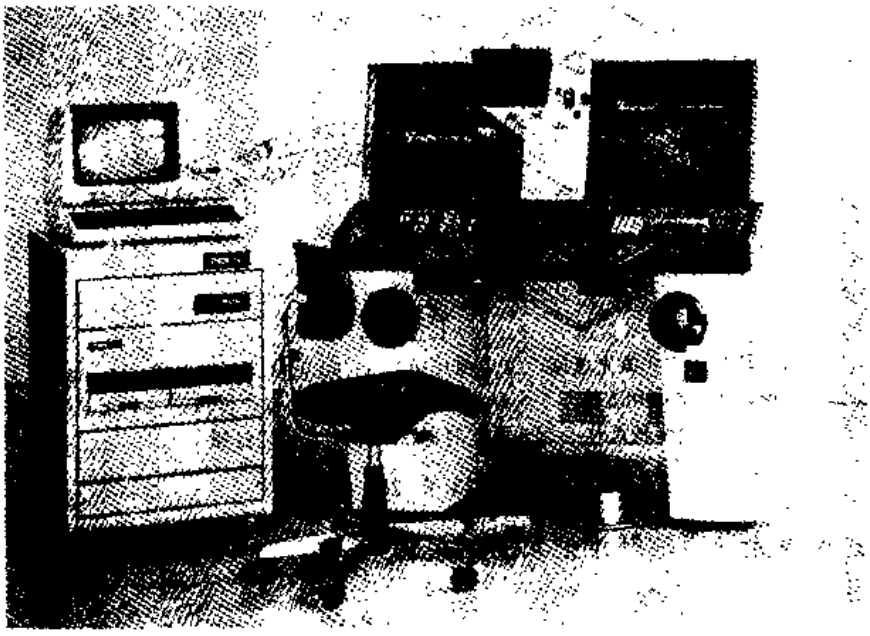
图 13-6-24

三、瑞士克恩厂DSR系列解析测图仪

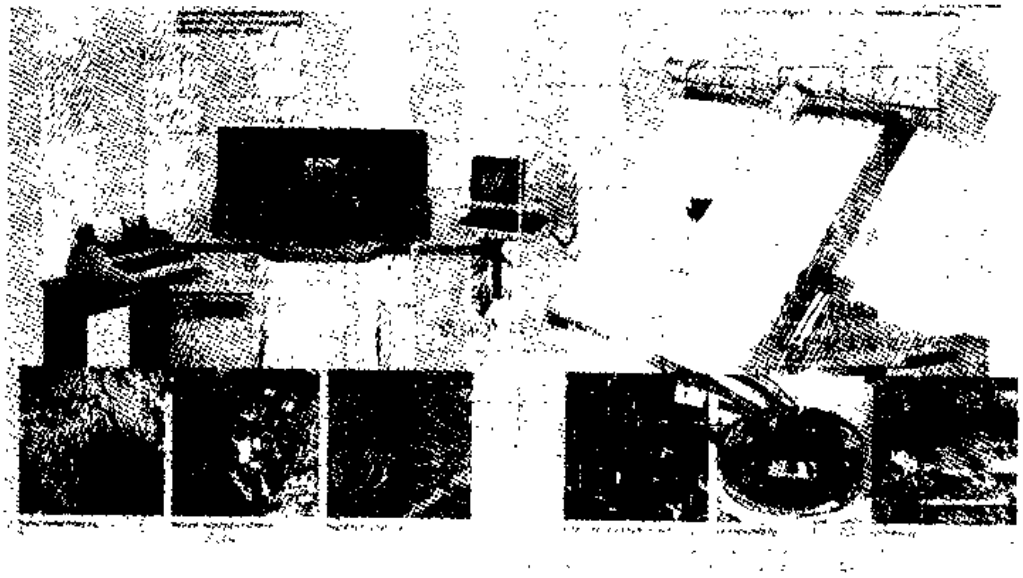
瑞士克恩厂在1980年汉堡大会上推出其生产的DSR1型数字立体测图仪和GP1绘图桌构成一种解析测图系统，随后又生产了DSR11型仪器。在1988年京都大会上，该厂同时推出了新一代的DSR系列解析测图仪DSR 12，DSR 14和DSR 15。在那次大会上，克恩厂还首次展出了属于数字摄影测量系统的DSP1数字立体摄影测量系统。下面分别对这些仪器的特点作简要叙述。

该仪器的特点是：

（1）用以放置像片的两个像片车架是上下叠置的，如图13-6-26所示。在两片中间留



(a)



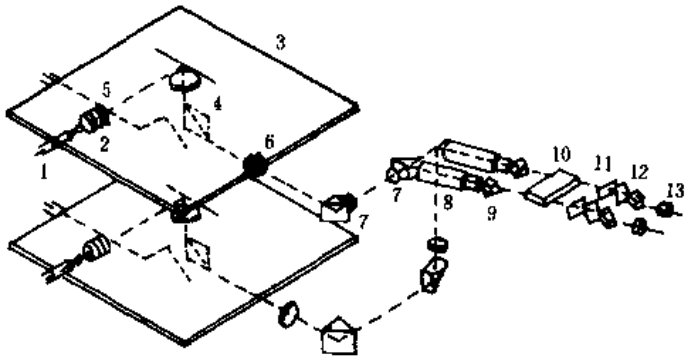
(b)

(a)DSR1解析测图仪；(b)DSR11解析测图仪

图 13-6-25

有足够的空间，用以安装观测光路、测标、激光刺点器，还可以安置影像相关用的CCD摄像传感器。两像片架分别可作 x，y 方向移动，丝杆上装有伺服马达和旋转编码器，它兼具驱动和量测的功能，像架坐标量测误差不超过 $\pm 3\mu m$，经计算机实时改正系统误差后，可以达到 $\pm 1\mu m$ 的精度（指格网板量测值）。

（2）观测光路中具有Zoom变倍系统（4.5～18倍）和旋像棱镜。像片的照明采用远



1—光导纤维；2—聚光透镜；3—像片架；4—分光镜；5—光圈；6—物镜；7—棱镜；8—Zoom透镜；9—Dove旋像棱镜；10影像转换镜；11—水平的斜视校正片；12—垂直的斜视校正片；13—目镜

图 13-6-26

距离光源，通过两束光导玻璃纤维把光引导至像片盘上，以避免光源发热对量测精度的影响。这与BC2相似。

（3）采用了多个微处理机的分布式计算机配置方法。图13-6-27为DSR11的分布式计算机配置示意图。

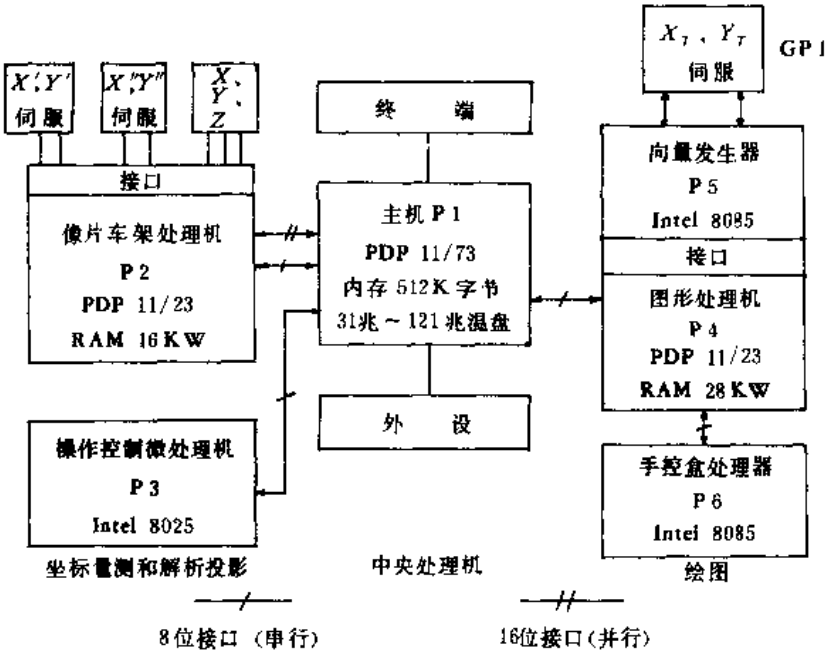


图 13-6-27

图中P1为主计算机，它贮存操作系统，由于是分布式计算机配置，主机可以很方便地加以更换。P2微处理机，担负数字投影解算和伺服控制的任务，P2的全部程序是由P1转置输入的。P3微处理器专管操作面板。P4，P5，P6用来控制GP1数控绘图桌绘图，已在§13.4节中讲述。

（4）在克恩DSR11操作系统中包含下列程序：

①GMENU：输入所需要的程序顺序；

②检校：DSR11精密格网量测；

③测区定义：作业员数据，测区参数（如航高等）；

④摄影机参数：存贮摄影机检校数据；

⑤内定向；

⑥相对定向；

⑦绝对定向；

⑧MAPS200：数字和图解测图，图纸准备，符号定义等。

在附加的克恩程序集中则包含下列程序：

①MAPR：批处理管理程序；

②AETR1：空中三角测量，在线模型连接并消除粗差，航带和区域网平差；

③BLUH：光束法区域网平差；

④CR1SP：近景摄影测量，量测和非量测相机；

⑤DTMCOL：按规则分布的点或断面产生数字地面模型；

⑥CONTUR：等高线计算；

⑦DSR11用户程序库：供用户自己编制程序使用；

⑧CAMGP1：控制GP1的绘图程序。

（5）在DSR解析测图仪上的图解输出一般仅作为测图检核用，其主要产品是按ASCII码存贮的数字地图。数据存贮有三种格式：一种是克恩CAM格式（计算机辅助测图），另两种为单点和多点记录格式。ASCII码形式的数字地图可以在MAPS300的克恩交互图形工作站上进行编辑、编辑完成后，再由GP1输出合格的图来。

（6）DSR11解析测图仪上可装上一对CCD（电荷耦合器件）摄像机实时采集数字影像，然后利用VLL铅垂线轨迹法进行数字影像匹配，实现自动立体量测。VLL方法将在数字摄影测量一书中讲解。

（二）新一代克恩厂DSR12，DSR14和DSR15解析测图仪

1988年在日本京都召开的第16届国际摄影测量与遥感大会上，克恩厂推出了基于不同的PC微机和微机工作站的系列解析测图仪，并使其产品从第二代解析测图仪向第三代过渡，即与地学信息系统INFOCAM或其它GIS系统相连接。整个系统的配置示于图13-6 28。

1.新型DSR系列仪器及其特点

由于DSR解析测图仪采用分布式计算机配置，使其主机的选用十分灵活，可以根据现代计算机的技术发展而更新。操作员可以用同样的方式来应用各种软件，无需考虑采用的是PDP，Micro VAX或PC微机。新型的DSR—12，DSR—14和DSR—15之间的主要区别在于其主机型号及其容量以及随之而来的与不同选购件连用的可能性。在DSR—15上，所有各种克恩厂的备选硬、软件均可使用。

（1）DSR—12解析测图仪

DSR—12仍使用PDP作主机，具有RT—11单用户或TSX多用户操作系统。

（2）DSR—14解析测图仪

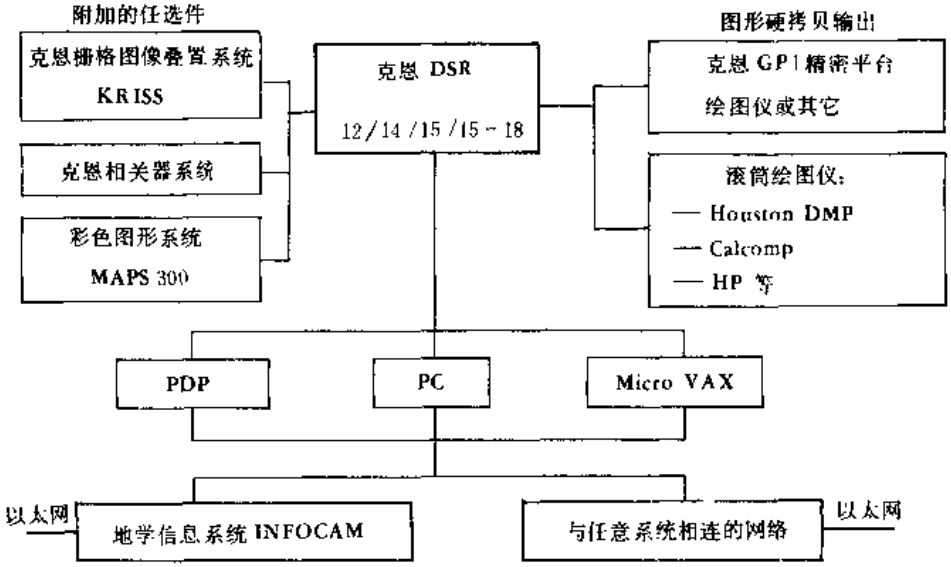


图 13-6-28

DSR—14用PC微机作为主机，型号为IBM—AT兼容机或80386型微机。由于DSR解析测图仪使用PASCAL语言，所以软件从DEC PDP到PC机的移植十分容易，程序可在PC—DOS/MS—DOS下运行。

（3）DSR—15解析测图仪

DSR—15的主机为DEC Micro VAX或VAX工作站。它们可以用来支持一台或多台DSR—15。利用有关的PASCAL编译带，DSR软件很容易移植过来。大的单位还可建立以太网络，使之包括摄影测量数据采集、编辑、绘图和地学信息系统。在DSR系统上采用DEC以太网。

上述三种解析测图仪示于图13-6 29中。

（4）DSR 15—18解析测图仪

DSR 15—18解析测图仪是在DSR—15上装上尺寸为25 × 50cm的大像幅像片架，以处理美国的LFC大像幅相机的像片。该型号仪器特别适合于地质勘探和森林经营等方面，它用Micro VAX作主机。

2.硬件特点

除了可以在广阔范围内选择主机这个特点外，新型DSR解析测图仪在硬件设计上注意到使用效率和对用户友好。这体现在仪器的外形结构与现代模块式组合家俱相配套，光学系统质量进一步改进，左右变倍系统可分别调节，采用了新的作业员面板，通过软接触操作，十分灵敏、方便、快速且便于选择特征码。

3.丰富多样的备选硬件和软件

为了适应用户的各种要求和提高自动化程度，更便于完成各种各样的任务，克恩厂为新型DSR解析测图仪准备了各式各样的备选件。

KR1SS是克恩厂研制的图形影像叠置系统，它作为DSR—15的选购件，可在实时运动中将图形与左、右目镜中的像片影像相叠合。它主要用于各种地图修测和测图完整性检查。

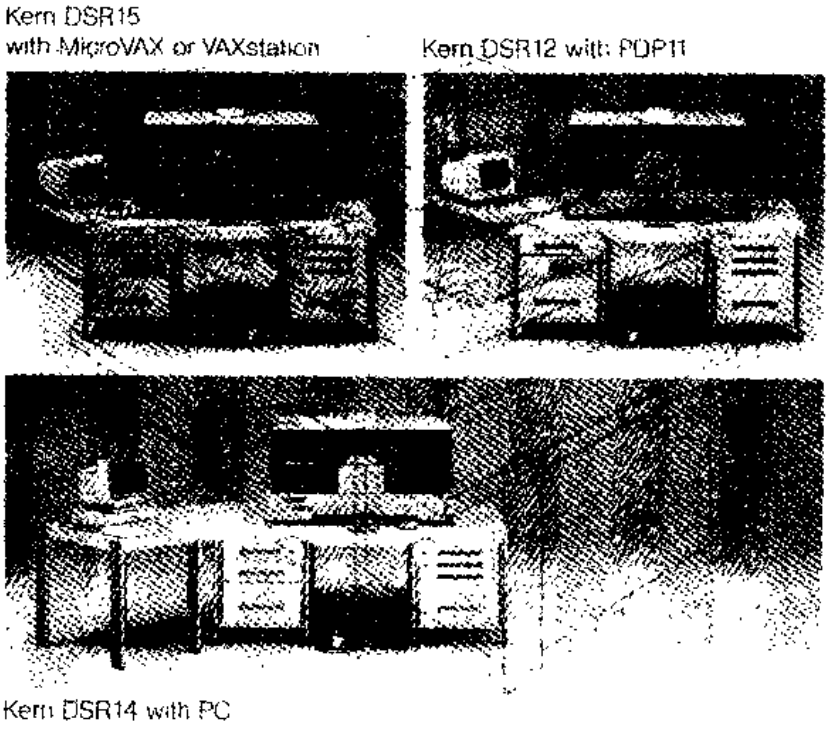


图 13-6-29

由于左、右目镜中均有叠置图像，故可实现立体叠置。关于KR1SS系统已在§13.4一节中讲过。

克恩厂在DSR—11上已经装过相关器系统（1984年巴西Rio大会）。在DSR—15上的相关器系统是第二代的，其特点是采用新的CCD摄像机，新的影像处理板（拥有双倍内存容量），有各个大学为之编写的克恩相关器软件以及用transputer进行快速并行计算处理。克恩相关器的硬件见图13-6-30，它由两个CCD摄像机和一块影像处理板组成。两个CCD摄像机装在像片车架的下方，使用分光器使摄像机传感器和目镜同时对准像片同一位置。内存容量为512KB，藉助于Transputer快速并行处理机来进行相关中费时的运算工作，从而大大缩短相关处理时间。

1990年在赫尔辛基F1G大会上展出的克恩相关器系统是装在DSR—15上，用的相关算法是Köbl动态规划算法。在相关器软件包中包含有许多摄影测量操作功能，如摄像机检校程序用来确定像片架坐标系与摄像机坐标系的关系，计算和存贮各改正参数供实际使用；自动仪器检校程序利用精密格网板检校DSR的量测系统；自动定向程序包括内定向中仅需人工量测两个点，余下的点可自动到位。相对定向和绝对定向中作业员照准点位作为精确相关的初值；数字高程模型自动量测程序（DTMCOR）代替作业员进行重复而枯燥的逐点量测工作。当某点高程不能测定（由于缺乏结构信息等）时，该点作为未测点记下由作业员在最后与其它加测点一起补测。可用它来处理航片、SPOT卫片、工业量测或用于医学影像；正射像片制作程序（KDOS）可获得数字化存贮的正射影像。此外，克恩相关器还可作为影像数字化器使用，相当于一架高精度平台式扫描仪。克恩相关器的框图见图13-6-31。

另一个备选件为克恩DOTXS断面程序包。它能根据设定的中心线（折线或曲线）自

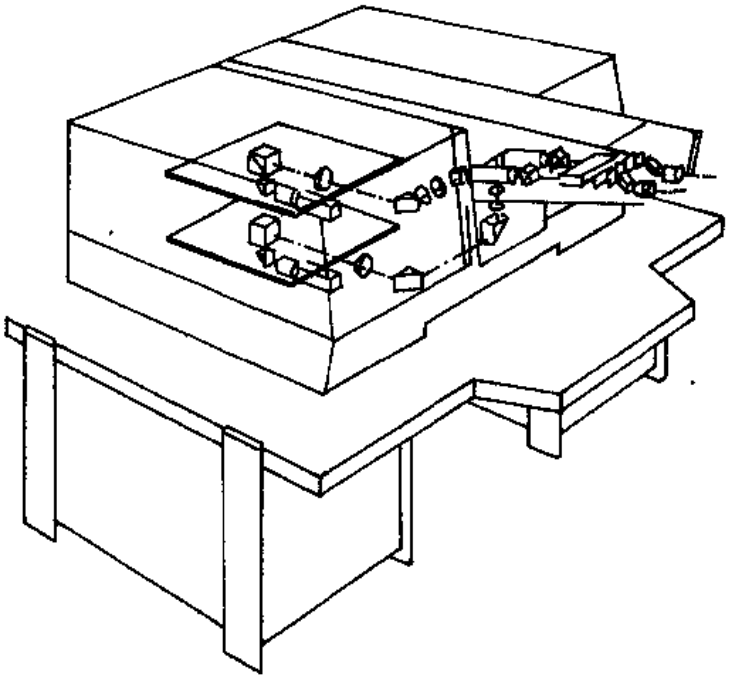


图 13-6-30

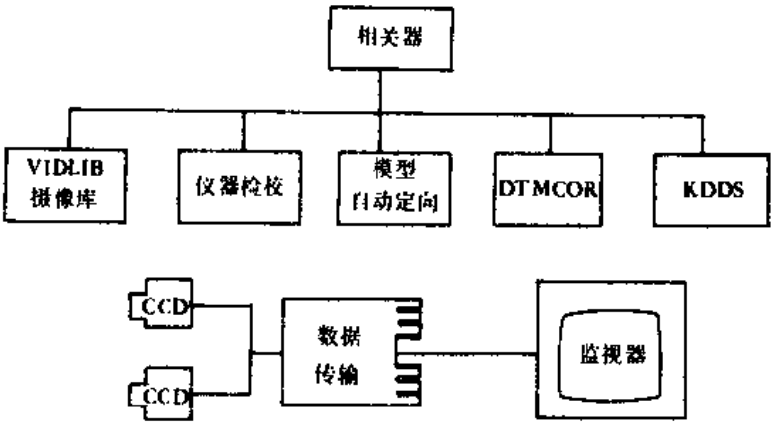


图 13-6-31

动进行横断面测量，并能顾及到地形断裂、水系和其它地貌特征。该程序集可与用于MAPS—200离线绘图的PLOTR程序，SCOP程序或其它DTM程序包相互连用，在各种DSR仪器上运行。

为了处理SPOT卫星像片，克恩厂与英国伦敦大学合作研制了克恩SPOT软件包，用于在DSR—12和DSR—15上量测SPOT立体模型。此时唯一的硬件变化是用更强大的PDP11/73代替P2处理机采用的PDP11/23，以完成较复杂的实时程序。一旦卫星模型定好向后，标准的摄影测量软件，如MAPS200或DTMCOL便可用来进行立体测图。

4. 用于解析立体摄影测量的摄影测量软件结构

克恩厂DSR系列解析测图仪的软件是用PASCAL语言写的，它对用户友好，程序标准

化，具有模块化结构和菜单系统，可与用户编写的程序集合使用，程序与硬件相互独立。图13-6-32列出克恩摄影测量软件结构，指出所包含的各种软件及功能。

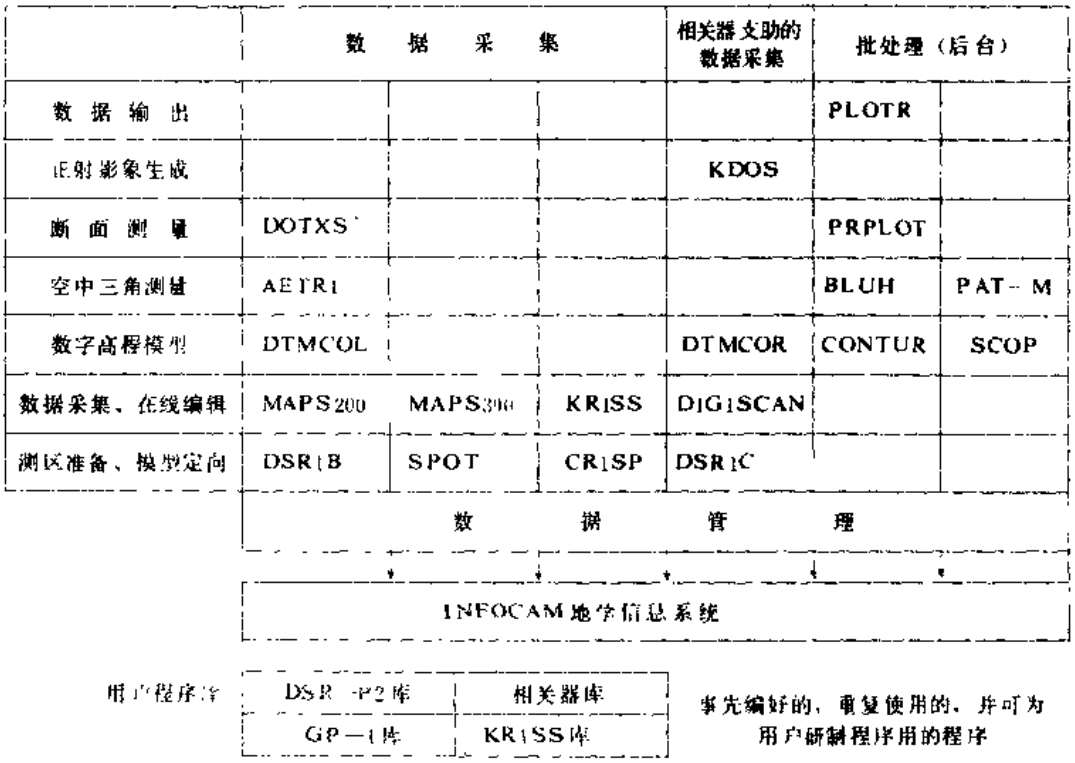


图 13-6-32

图13-6-32中各软件含义及功能分别为：

DSR1B ——仪器检校、控制点输入、摄影机参数确定和模型定向；

DSR1C——相关器支助下的模型定向；

SPOT——SPOT像片的轨道定义、坐标变换和模型定向；

CR1SP——利用光束法的模型定向，量测与非量测像机，多模型定向以用于近景摄影测量；

MAPS200 ——在线测图系统。数字数据记录、图形在各种设备上输出，图形在彩色屏幕上输出，并具有交互编辑功能；

MAPS300——彩色图形屏幕上的交互图形测图和编辑系统，可在线或离线方式；

DIG1SCAN——像素灰度级数字化和模拟量记录的扫描程序；

KDOS——数字正射影像生成；

DTMCOL ——数字高程模型的采集；

DTMCOR ——在相关器支持下数字高程模型的自动采集；

CONTUR ——等高线内插程序；

SCOP ——数字高程模型的建立、修改和管理；

AETR1——空中三角测量数据采集程序，多项式航带和区域网平差；

BLUH——光束法区域网平差程序；

PAT—M——独立模型法区域网平差程序；

DOTXS——用于断面测量和道路建设的数据采集程序；

PLOTR ——离线绘图程序，在各种绘图仪和屏幕上接数字摄影测量数据绘图；

PRPLOT—— 离线断面绘图程序。

在一些情况下，可以用Softcopy C软件拷贝，代替滚筒绘图仪或GP1进行在线绘图检查。此时，主机的纯字母数字屏幕用一图形屏幕取代之。数字地图将显示在此彩色屏幕上，可进行检查和编辑。这样一来只操作一个键盘即可显示数字地图、数字字母和菜单了。

5. INFOCAM地学信息系统

DSR解析测图仪可作为计算机网络的一个组成部分，而网络中有一个中央数据库。克恩厂INFOCAM系统提供摄影测量数据与数据库相集合的途径。它有必要的数据结构和数据管理能力，并有能力建立和读出中间文件。INFOCAM自身也可以作为一独立的计算机工作站。

INFOCAM是一个用来管理和记录与地理空间有关数据的图形交互系统。目前面向目标的数据库已戏剧性地进入以NODE EDGE（结点-边缘）结构为特点的纯拓扑数据库系统中。这种方法对于摄影测量数据、速测仪数据、点坐标、几何结构和有关的专题属性的处理是十分理想的。开放式的结构为数据库结构和用户接口提供了极大的灵活性。

ORACLE是一种由美国该同名公司提供的关系数据库管理系统（RDBMS）。INFOCAM可以上升到INFOCAM/ORACLE的水平，从而利用ORACLE来长期地存贮几何和专题属性，并用集合式的结构化查询语言（SQL）来保证数据一致性和多用户的环境。

作为地学信息系统，INFOCAM的结构可简单地示于图13-6-33中。

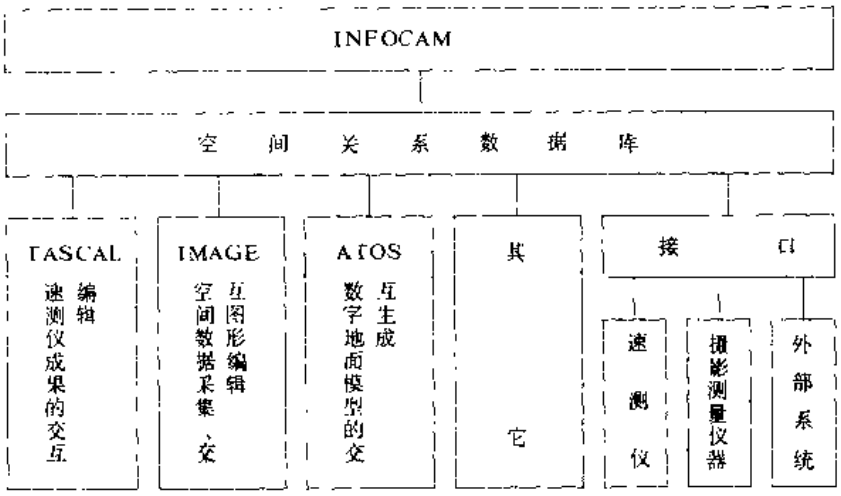


图 13-6-33

其中，共有三个独立的软件模块。TASCAL模块用来由速测仪观测数据计算和平差点位坐标，计算可交互式进行。除了测量功能外，还可进行光束平差、单点交会、导线和导线网平差以及由双观测值进行矢量计算。它与野外机助测量系统可进行数据通讯。IMAGE模块用来对空间数据交互式地进行结构化，并加以描述和显示。它可接受地图数字化数据、速测仪电子手簿数据和摄影测量仪器采集的数据，进行管理，生成数字地图或在图形屏幕上进行编辑。ATOS模块用来生成DTM，交互地编辑并图解地表示出来。它对数据输入的类型不限制，离散点、地形断裂线、断面测量值，甚至数字化的等高线它都能接受，并能随时插入新数据。它还可为用户绘制纵横断面、内插等高线、生成和显示三维透视图。

INFOCAM是建立在DEC公司的PDP超微机或Micro—VAX计算机系统之上。同一区域的所有空间信息数据可以所要求的格式建立起来并将它分成若干级数据层。譬如对于一居住区可分成土地块层、建筑物层和煤气供给管线层等。

INFOCAM处理空间有关的目标，通过专题表（包括目标、符号、线、文字说明）加以描述，而与目标有关的数据或属性则用属性表来描述。典型的例子如房屋建筑物，其专题表为：

目　标　表－－　－－房屋建筑物
符　号　表　－－－－　建筑物角点
线　　表－－－　－－在基准面上开放的建筑部分
文字说明表－　－　－－保险号
使　用　表　　－－－住人的建筑物
属　性　表－　－　－－户主姓名，住址等

从INFOCAM的说明书看出，它主要用于大比例尺的土地信息系统的建立、维护、管理和使用。

四、外国生产的其它解析测图仪

最近二十年来，除了以上三大商用厂家生产的解析测图仪外，还有许多外国生产厂家也研制和出售各种型号的解析测图仪。这里仅选一些有一定特色的仪器作简要介绍。

（一）US—2解析测图仪（美国）

US—2是在美国海拉瓦设计制造的US—1型解析测图仪基础上改进的一种新型的解析测图仪。它除了同US－1型一样具有算法完善的特点外，其重大的改革是采用了“数字投影器”。现简介如下：

1. 数字投影器

电子计算机在解析测图仪中担负着繁重的任务，其中与摄影测量有关的任务可以分成两种类型。一种是有时间要求的任务，主要指的是起投影导杆作用的那部分任务。它在解析测图仪的总任务量中占很大的比重，基本上以固定的方式循环运行，不需要很大的内存容量和复杂的支持软件（即不必调用库程序）。但却要求很高运算速度，以保证仪器有良好的动态性能。另一种是无时间要求的任务，如模型定向、仪器校正、空中三角测量平差

及地图编辑等。这类任务项目繁多、形式多变、要求较大的内存容量和较多的支持软件，但这类任务仅偶然进行，例如在测图工作中的模型定向，也许一天只需进行一次，所需中央处理器（CPU）时间仅几秒钟，因此其速度之快慢对仪器总效率影响不大。采用小型计算机混合运行上述两类任务，在这种情况下，大部份时间不能充分发挥计算机的效能。为了提高计算机的利用率，Helava提出把有时间要求的、算法固定的任务从主计算机中分离出来，设计成一个专门的硬件，把它称为数字投影器。这样，既保证了有时间要求的任务以较高的效率和可靠性进行，又为无时间要求的任务提供了更强的灵活性和更好的利用方式，使总效率大为提高。

图13-6-34为数字投影器执行模型坐标到像片坐标转换的逻辑图，显然，这样流水线方式的处理比起在主计算机中用程序来运算要快速得多，而这种简单结构的制造成本又很低。

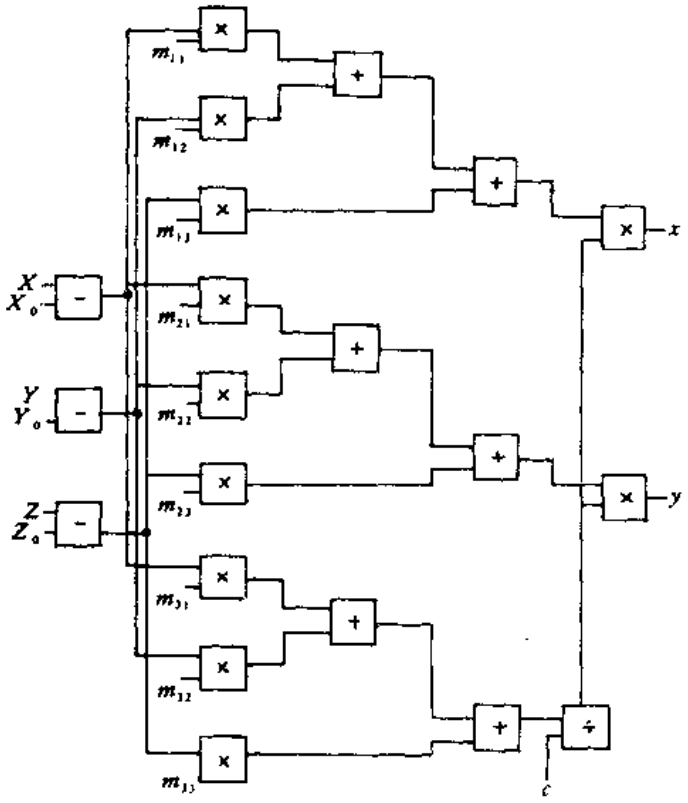


图 13-6-34

图13-6-35表示具有这类数字投影器的解析测图仪控制系统。在这样的结构中，外部主计算机可以是任意计算机，例如远距离分时计算机，小型计算机或微处理机，也可以使用一台小型通用机控制多台解析测图仪。

2. US—2的硬件

（1）立体坐标仪

US—2的立体坐标仪包括精密的像片车架、双目观测系统、照明设备为操作控制装置。由于采用了软件改正机械系统误差的办法，在设计上偏重于考虑动态灵敏性和机械稳定性。像片车架的定位量测采用精密的线性编码器，脉冲当量为1μm，通过软件改正后的

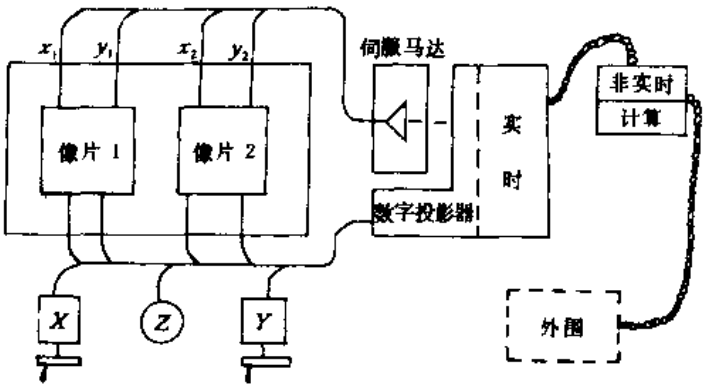


图 13 6-35

仪器误差为2.5μm。光学系统视场直径为24mm，具有旋像棱镜和Zoom变倍系统。操作机构除手轮和脚轮外，还设有一个近似于平板数字化器那样的徒手控制器，便于在 XY 平面作大距离的自由移动。

（2）控制接口设备

US—2的立体坐标量测仪与主计算机间的接口是通过数字投影器来实现的。为了便于与各种类型主计算机联结，数字投影器与主计算机间的通讯采用标准的串行数据通道。这样，数字投影器就如同一个普通的终端设备一样可以与任意计算机联结。

（3）主计算机

US—2标准配置的主计算机是PDP11/34，具有64K字节内存、10兆字节磁盘机，CRT终端及打印机等。如前述，US—2还可以灵活地选择主计算机。

3. US—2 的软件

（1）计算机操作系统

US—2所配置的PDP计算机，通常采用RSX—11M多道任务系统，它使得主计算机既能控制解析测图仪，又能同时作为通用计算机使用。例如，当一个作业员在解析测图仪上描绘等高线时，另一个作业员可以使用第二个终端进行空中三角测量平差。

（2）摄影测量应用程序

对于通常解析测图仪所用的实时程序，在US—2中已大部分硬件化做成数字投影器了，因此由主计算机担负的任务主要是无时间要求的。这些程序都以FortranⅣ语言编成，以适应各种计算机。为便于灵活使用与修改，US—2的程序设计成模块结构。常用的程序有三种类型：

①标准程序　包括内定向、像对观测、外定向、绘图桌准备、$X—Y$ 测图、断面测量、空中三角测量的模型连接等。

②中断程序　用来在标准程序执行过程中跳出进行有关参数（如定向元素、大地坐标、镜头畸变等）的更改、控制及显示，当它结束后，重新回到正常程序的中断点继续执行。

③离线程序　这是一些用于数据辅助处理的支持程序，例如：

MSETUP程序——根据空中三角测量平差结果（点位坐标）计算各模型的定向元素，这样在测图过程中避免重作相对定向和绝对定向；

RADLEN程序——根据镜头鉴定参数计算畸变差改正；

CALIB程序——根据格网片量测数据进行仪器改正；

EDIT程序——对数字地图资料进行编辑（修改，加符号注记等）。

（二）AP/C4解析测图仪（意大利）

AP/C系列解析测图仪是意大利OMI公司的产品，它是在美国的军用产品AP系列基础上发展起来的民用产品。该仪器的特点是：

（1）两像片盘各自可沿x方向移动，而光学系统沿y方向移动。x、y方向的移动均由安装在丝杆轴上的伺服马达来实现，伺服系统的精度为2μm，位移量的量测采用线性编码器，但它安置的位置没有符合阿贝原理，这一误差采用计算机的软件来补偿，故其轴向精度可达2μm。

（2）观测光路中安有两个独立的Zoom变倍系统，使观测系统的放大率可在5～45倍连续调焦。用Dove旋像棱镜可使影像旋转360°，最大视场直径为28mm。

（3）经常重复使用的功能，在主机的控制面板上设置了开关，其它功能均由软件来解决，应用比较方便。

（4）计算机和伺服马达之间来联系可以通过控制按钮、屏幕显示、手轮和脚轮，操纵杆和缩放器来控制。数字缩放器的作用是使操纵杆和测标之间的移动比率从1:1至100:1的范围内变化，以便快速地找点，缓慢地精确照准。

（5）绘图桌的有效面积为120×140cm，它直接由计算机通过接口来驱动的，也可以脱机单独使用。

（6）所用的计算机是PDP11/03型，字长16bit，内存32KB，带2个256Kbyte磁盘，CRT终端并附有光笔，使用方便。

OMI公司现在近期发展的解析测图仪有AP5Mark Ⅲ系统和能够处理大像幅像片的OMI AS-11PA解析测图仪（图13-6-36）。后者可用于LFC（23×46cm²）卫片的军事测绘，也可同时放入四张23×23cm²的航片，进行多个模型量测。

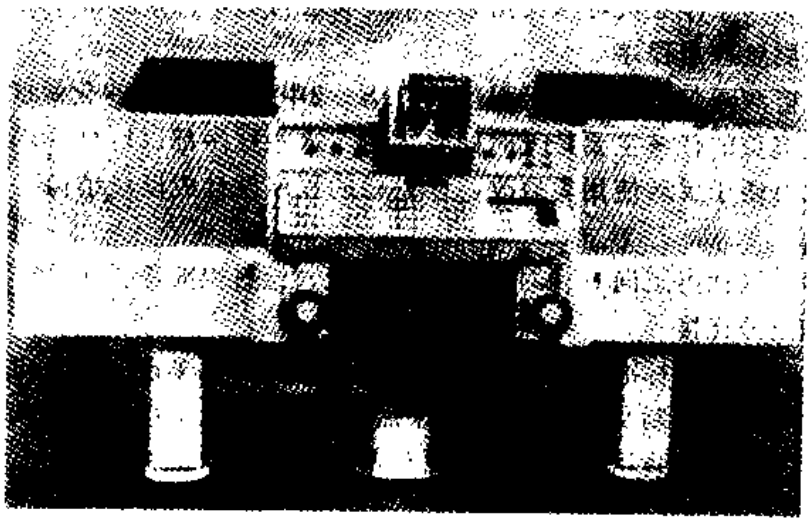


图 13-6-36

（三）Traster型解析测图仪（法国）

Traster型解析测图仪是法国Matra工厂制造，它使用Telemech Solar16—40计算机。1980年后改为Traster SST型，配置的计算机采用Eclipse S－130或S—140型也可以灵活地选用任何厂家的具有足够功能的计算机。该仪器结构紧凑，操作者不移动坐位就可以接触到所有的操作及观察部件。仪器上航摄底片框的移动使用空气轴承，对移动量的量测都符合阿贝原理，保证量测的精度。照明和底片面均有冷却设备。在材料选用方面特别注意了各种材料间温度系数的均衡，以使能在室温下进行量测而获得微米级精度（2μm）。

该仪器不采用双筒目镜系统观测，而是把两张像片的影像使用偏振光投射到同一个屏幕上，显示的放大率为10倍，测标固定在屏幕中央，影像随像片车架而移动。屏幕范围对应于像片视场为42mm。观测者使用偏振光眼镜观察，也可以多人同时观察，方便于像片的判读与作业。

Traster型解析测图仪的近期产品型号为Traster T5S和T10N。

（四）Intergraph InterMap Analytic高性能解析测图仪（美国）

随着摄影测量、遥感和地理信息系统的相互结合，许多大计算机公司开始在他们的计算机系统上加上解析测图仪作为数据采集的一种有效手段，并在其数据库系统支配下采集所需要的数据。与上面介绍过的PHOCUS＋P系列解析测图仪，SYSTEM9相类似，美国Intergraph公司研制了最新型的InterMap Analytic仪器。

图13-6-37为InterMap Analytic解析测图仪外貌，其光机部件绝大部分是由联邦德国欧波同厂生产和提供的。但是，其实时处理器、马达控制器、光学叠置系统等则由Intergraph公司自己提供的。提供所测地图数据的图形显示的整体工作站为Interpro32，它能利用已研制好的Intergraph交互数字测图软件和地理信息系统操作。这在一定程度上反映了解析测图仪未来发展的必然趋势。

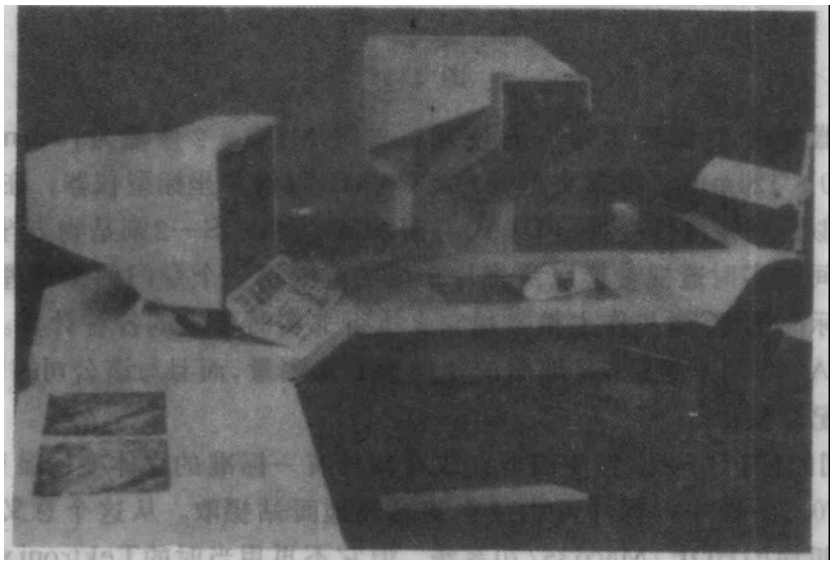


图 13-6-37

五、低成本或小像幅解析测图仪

在许多情况下，例如地图修测、小像幅像片对处理等，并不需要价格昂贵的解析测图仪。研制低成本、用于常规测图、地图修测及非地形应用的解析测图仪，已为一些仪器厂家所重视。现在已在市场上看到这样的产品，

（一）小像幅解析测图仪MPS—2和PAMS

澳大利亚Adam公司于1986年从他的ASP—2000解析测图仪及QASCO—4型仪器出发，研制成一种称为MPS—2（Micro Photogrammetric System）的小像幅解析测图仪（图13-6 38）。并于1987年在美国巴尔的摩的美国摄影测量与遥感学会会议上展出。同时展出的还有日本Pentax公司的PAMS（Pentax Analytical Measurement System）解析测图仪（图13-6-39）。

图 13-6-38

这两种仪器都是小像幅像片方能使用。对于MPS—2像幅为70mm或更小，对于DAMS则为120 × 120mm。根据文献介绍，PAMS为像方坐标型仪器，在计算处理中采用的数学模型类似于直接线性变换（DLT）。而Adam的MPS—2则是物方坐标型仪器，在物方和像方坐标间的实时透视变换以及像片车架的定位用一个专门的微处理机。这两种型号的仪器都是以标准的PC微机作主机，用它来执行非实时要求的各种计算。

Pentax PAMS用于近距离、地面的非地形摄影测量，而且与该公司的Pentax ST—120立体摄影机相配套使用。

Adam公司的MPS—2以像片的垂直放置和具有一标准的立体变倍显微镜的特点，用来处理35mm或70mm像片。像片可由空中平台或地面站摄取。从这个意义上讲，它可视为取代八十年代初期的HDF/Maco35/70系统，但它不再用当时的Tektronix 4052图形台式计算机，而是使用一架PC微机来作计算和控制，利用Auto CAD软件进行三维测图。

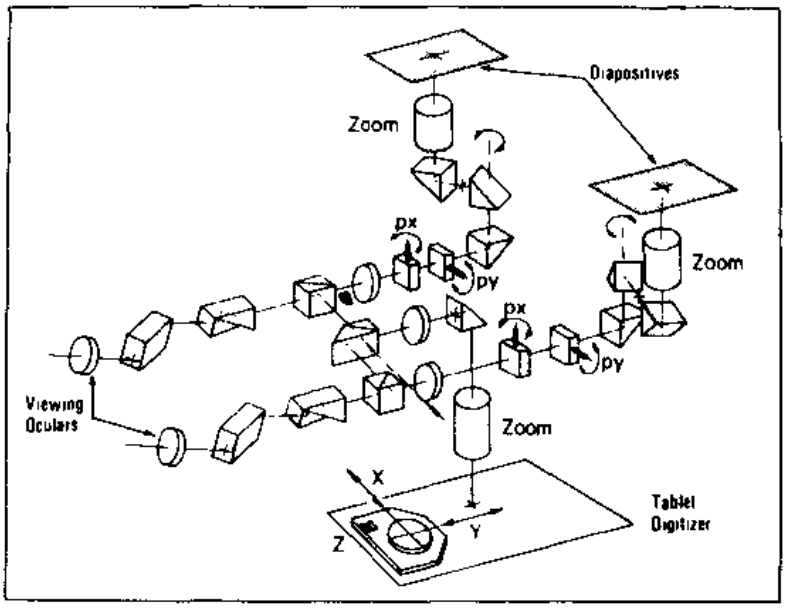
图 13-6-39

（二）低成本的APY解析测图仪

该仪器由瑞士Yzerman研制（1984年）。该仪器的设计最适合将立体模型上的数字坐标数据编绘和转绘到已有的地图上，它使用图像叠置技术以服务于地图修测。

图13-6-40为APY解析测图仪的全貌，图13-6-41则为其原理示意图。该仪器是物方坐标占优的仪器，进入计算机的输入是物方坐标，同时来自台式数字化上地图相应点的输入值和由另一旋转编码器提供的该点高程也送入计算机中。通过计算，PC微机将提供四个输出信号给伺服电机，它们实时地转动光学元件，而不是移动两张像片，以保证透视方程的满足，

图 13-6-40



10 (a). Yzerman APY - photo. (b). Yzerman APY - diagram.

图 13-6-41

即自动地消除视差保证立体观测。这种独特方法省去了精密滑动装置，大大降低了仪器成本。

所有物方位置和高程均为地面坐标，地物要加以编码，可在屏幕上进行数字和图形显示，还可以存贮、编辑、列表和绘图。

APY解析测图仪的硬件包括一个立体观测器，可同时双目观测地图、像片与测标的叠置影像，图/像放大倍率从0.15～12倍。有27个键和数字化图形输入板，在定向时用来消除视差，在绘图时安置高程。APY可使用$23\times23cm^2$的像片，也可达到$30\times30cm^2$的像幅。该仪器在图面上的量测精度为$\pm0.1mm$。

APY仪器的软件包括用四个或四个以上的控制点对各类像片定向，其数字测图软件可对点、多边形、符号及文字进行编辑、合成，并带有删除、封闭和晕渲的功能。根据需要，它可以15×15的像素阵列形成符号。

从设计角度看，APY为理想的地图修测仪器，但从已进口仪器看，它还不够稳定，有待进一步改善。

六、国产解析测图仪

如果说摄影测量模拟立体测图仪的国产化有一定困难的话，那么基于电子计算机的解析测图仪是完全可以国产化的。理由很简单，因为解析测图仪的光机量测部件可以十分简单，而软件的研制对中国人是没有问题的。

到目前为止，我国研制的解析测图仪包括以下各种型号：贵州新天光学仪器厂的HT型，国家测绘局测绘科学研究所研制、无锡测绘仪器厂生产的JX—1型和JX—3型、武汉测绘科技大学研制的DPG型和西安测绘研究所研制的APS—1型和APS—2型解析测图仪。这些仪器，譬如JX—3和APS—2等已用于生产单位，从设计上讲已基本达到国际同类产品的

水平，只是原器件的可靠性尚有待改进．硬、软件性能及外形设计也需进一步提高。

下面仅就JX --3型解析测图仪作简要介绍。

JX—3型解析测图仪（图13 6-12）属于第二代解析测图仪产品，由刘先琳高级工程师主持设计，无锡光学仪器厂完成光机部件生产，测绘研究所完成电器和软件设计与装调。该仪器于1988年6月18日通过了部级鉴定。它具有以下特色：

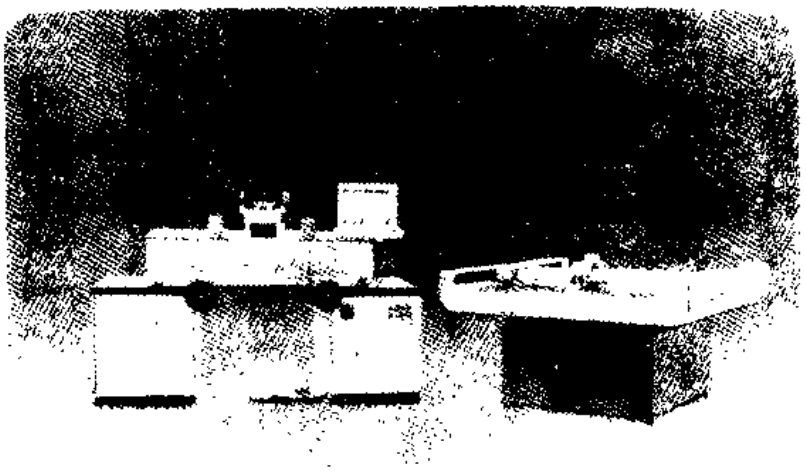


图 13 6 12

（1）用美国原装AST—286型微机作主机，符合当前PC主流计算机的发展潮流。

（2）仪器采用整体大板I/O接口和微机化的伺服逻辑，使硬件的集成度提高，不仅降低仪器的功耗，而且提高了电器部件的稳定性。

由于286PC微机带有80287协处理器，使JX解析测图仪的LOOP程序可以在300次/秒频率下工作，主机的CPU（80286处理机）可以用来进行伺服检测，而无需专门的硬件伺服逻辑，也无需附加其它的处理器管理伺服检测程序。

（3）使用计算机显示屏幕，实现数字测图过程的实时显示，以便于作业员对测图结果的检查。

（4）JX—3型解析测图仪与ST数控绘图机相连用，该绘图机噪声小，起动灵活，性能较好。

（5）仪器本身配有较丰富的软件，除了常规航测作业外，可以作数字测图采样、DEM数据采集，还可以进行全景像片、侧视雷达像片处理等。

（6）使用开放式菜单，可实现键操作。该仪器的菜单操作不同于层次结构的菜单，而是圆盘式菜单。作业员在熟练的情况下，可以不通过主菜单而直接进入所需要的任务菜单中，以避免菜单不必要的频繁出现。但是，此方式需当心错误操作可能影响系统的工作。

该仪器目前仍用机器码和汇编语言编写所有的软件，在一定程度上不利于用户的开发

和对仪器性能的扩充。这些问题连用仪器稳定性和外形设计均有待进一步改进。

APS-1解析测图仪是西安测绘研究所和西安航光仪器厂共同研制的，它仿照C-100原理和结构，配有PC286微机和平台式数控绘图仪（见图13-6-13），其主要特点是配有中文系统CCB 10S V2.10和中文提示，而且提供APS全部公用区参数的定义和初值以及应用程序所需公用参数定义语句块，为用户构成自己的应用程序提供方便。

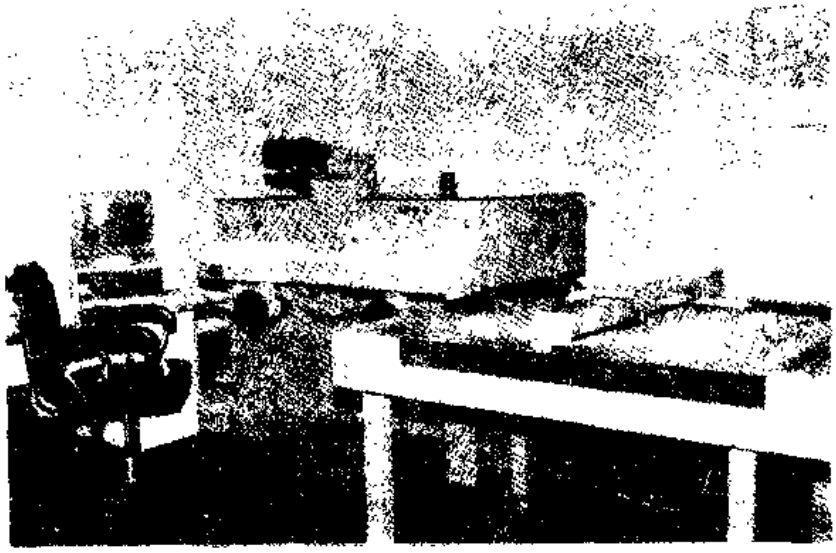


图 13-6-13

§13.7 模拟仪器改造与数字测图

解析测图仪的出现和其飞速的发展，使人们愈来愈认识到电子计算机在摄影测量中的重要作用。摄影测量仪器与计算机连接起来，可以直接将量测的结果（包括点位测定和图形测定结果）存入电子计算机，这就为地形数据库和各种地理信息系统的建立创造了必要的条件。为了完成这项繁重的任务，除了利用解析测图仪外，能否利用过去几十年中大量生产和使用的模拟测图仪呢？答案是肯定的。

本节将首先介绍模拟仪器的改造，然后在此基础上简要地介绍数字测图的概念及其在机助和机控摄影测量系统上的实现，详细的讨论将在《数字摄影测量》课程中进行。

一、模拟仪器的改造

这里讲的模拟仪器的改造主要指将常规模拟测图仪与电子计算机连接起来进行像片对的解析或数字处理，获得各种数字和图解产品的一种技术改造。这项任务已成为当前国内外摄影测量界共同关心和积极进行中的一项工程。改造的目标分两种，一种是构成机助摄影测量系统，另一种是构成机控摄影测量系统，也就是改造成为解析测图仪了。

（一）改造模拟仪器为机助摄影测量系统

模拟立体测图仪和立体坐标量测仪均可改造为机助摄影测量系统。此时需要对三个模

型坐标分量（立体测图仪）或四个像片坐标分量（立体坐标量测仪）安装模-数转换装置，即所谓的接口，并配备一台微型计算机。如果不利用原有的机械绘图仪绘图，则要配一台数控绘图桌。此时，计算机不能控制测图仪的运动，故称机助系统。

各个生产模拟测图仪的工厂都能为用户改造，使之成为机助测图系统。如威特厂推出的Avioplot RAP1,2是由威特模拟测图仪＋接口RC232C＋DMAP＋DG20微机＋TA绘图桌。联邦德国欧波同厂的PLANI-AS是由Zeiss模拟测图仪＋Direc或Ecomat DTM3接口＋PLANIMAP软件＋HP1000A微机＋DZ7或PLANITAB绘图桌。克恩厂则为MAPS200，除了MAPS200软件外，硬件为在克恩模拟立体测图仪上＋ER31数字化器＋PDP11系列机＋GP1绘图仪。许多用户也自己动手改造模拟测图仪。武汉测绘科技大学航测与遥感系研制了PR-II通用接口，能够与任何模拟仪器以及与任何微机相连接，研制了在线空中三角测量和机助测图软件，已为我国上十多家单位进行了仪器改造。

图13-7-1为威特厂的模拟测图仪AG1加上RAP2机助测图软件和TA10绘图桌构成的机助摄影测量系统外貌。图13-7-2表示其总体结构。

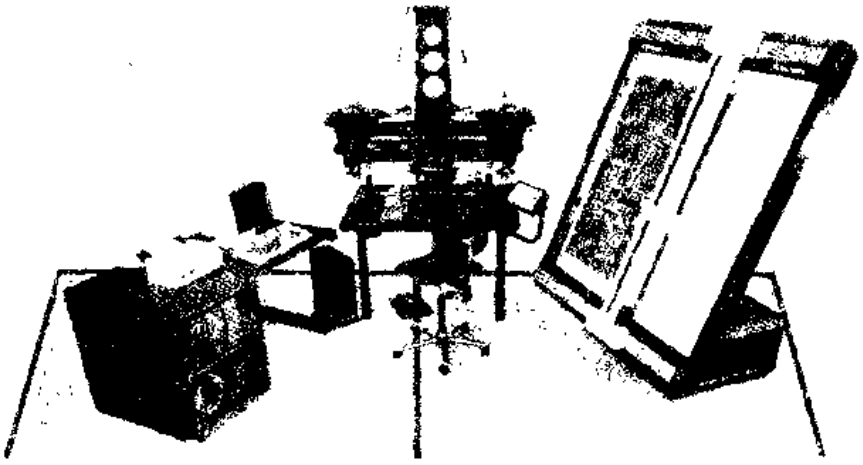


图 13-7-1

威特RAP2系统软件包括：数据输入程序用来输入仪器参数，建立和编辑点文件；定向程序用来完成机助绝对定向；初始化程序用来生成符号和线型，定义和设置PFKB5功能键盘；图纸准备程序用于直接图解绘图；编图程序用于图解或数字测图；输出程序将数字数据输出到绘图桌、监测器、打印机或磁带机上。

系统还有许多应用软件，其中SORA-C程序为许多用户经常使用来采集制作正射像片的像片断面数据。

将立体坐标量测仪改造成机助测图系统要推联邦德国欧波同厂的G3为典型。尽管许多单位早已把立体坐标量测仪改造成在线空中三角测量的坐标量测系统，但一般并不用来完成测图任务。

欧波同厂的G3 Stereocord由测定像片坐标的简单量测部件，接口Direc2和HP85/HP86台式计算机、基础软件和其它外围设备构成的机助摄影测量系统。其全貌见图13-7-3，系

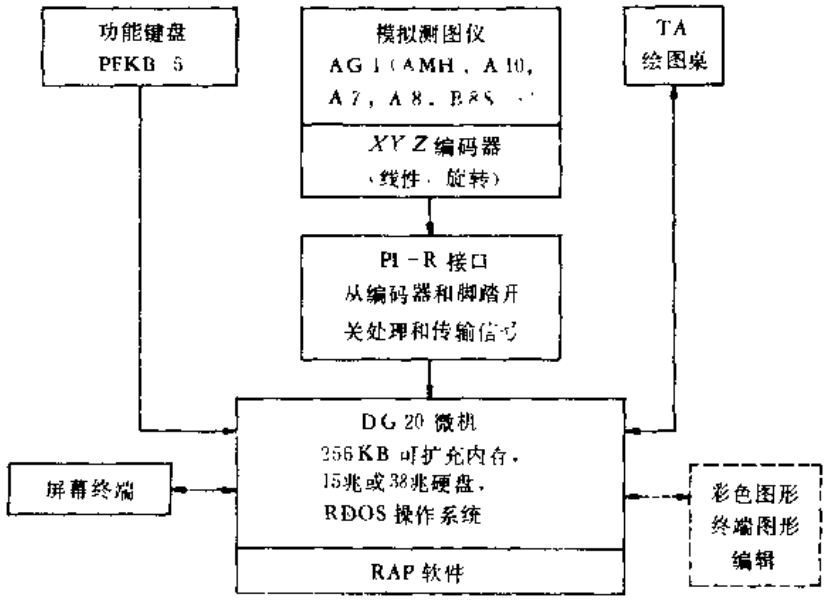


图 13-7-2

图 13-7-3

统结构见图 13-7-4，立体测图的流程见图 13-7-5

由于在G3或其它立体坐标仪上作业，立体对准某点时需消除左右和上下视差，给作业员带来一定不便，所以在这种系统上不经常做跟踪测图，而是采用离散点取样。其用途主要是在非基本图测绘的其它场合，如像片判读中的定量分析，用于农业、林业、地质、地貌、冰川、水文、土壤、环境保护和规划任务中，也用于大比例尺数字测图采样，DEM采样和地面摄影测量，用该仪器来训练学生和作业员也是合算的。

（二）改造模拟仪器为机控制图系统

将模拟仪器改造成机助测图系统，由于计算机设有伺服系统来控制仪器的运动，使一些作业，如在机助立体坐标仪上测绘等高线等，很不方便；再则，在B8S这类未装三轴定

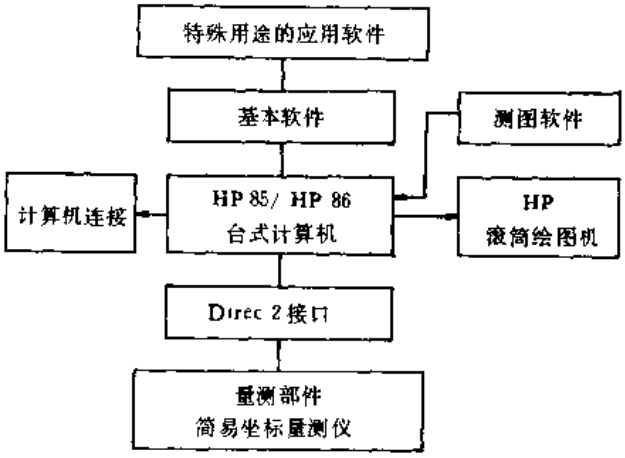


图 13-7-4

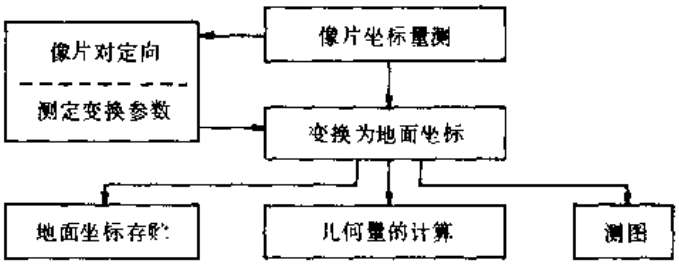


图 13-7-5

位器的系统上，若需与计算机相连接，就得添置三轴定位器，而且由于模型空间坐标精度不高，所以，对这类仪器的改造就不宜简单地从模型坐标输出上去改造，而是直接从像片坐标输出着手，将模拟测图仪改造成机控测图系统，也就是改造成解析测图仪。

目前在国内外，进行这种改造的仪器有：威特厂B8/B8S、蔡司厂Topocart B和克恩厂的PG2。1988年澳大利亚Adam公司和Quasco公司各自展出了他们的产品。图13-7-6为澳大利亚Quasco公司改造PG2和B8为解析测图仪的示意图。

对这两种仪器改造的要点是去掉仪器的空间导杆和测绘台。用PC微机作为主计算机。物方坐标将直接输入计算机。其中 X、Y 坐标采用操纵杆或手轮的运动，而 Z 坐标用操纵杆或脚盘，它们均装有编码器。计算机中的数字投影器（可利用主机，或另用一个微处理器）解求相应的像片坐标。计算机输出像片坐标（x，y、x'，y'）控制小马达来保证测标切在无视差的立体模型上，马达装在像片架上，并有闭路反馈以保证精确度。这实质上是一种物方空间型解析测图仪。在Adam公司的方案中，他们采用了与MPS—2小像幅解析测图仪相同的微机。人们正注视着这种改造方案是否便宜、快速而有效。目前世界上有上千台这样的仪器在生产单位使用，光靠几个仪器厂家是改造不过来的。所以我国许多研究和生产单位，如武汉测绘科技大学、四家测绘局研究所，总参测绘研究所，四川、黑龙江、陕西测绘局及郑州测绘学院都正在从事这项工作。下面重点介绍一下武汉测绘科技大学对B8S的解析化改造方案。

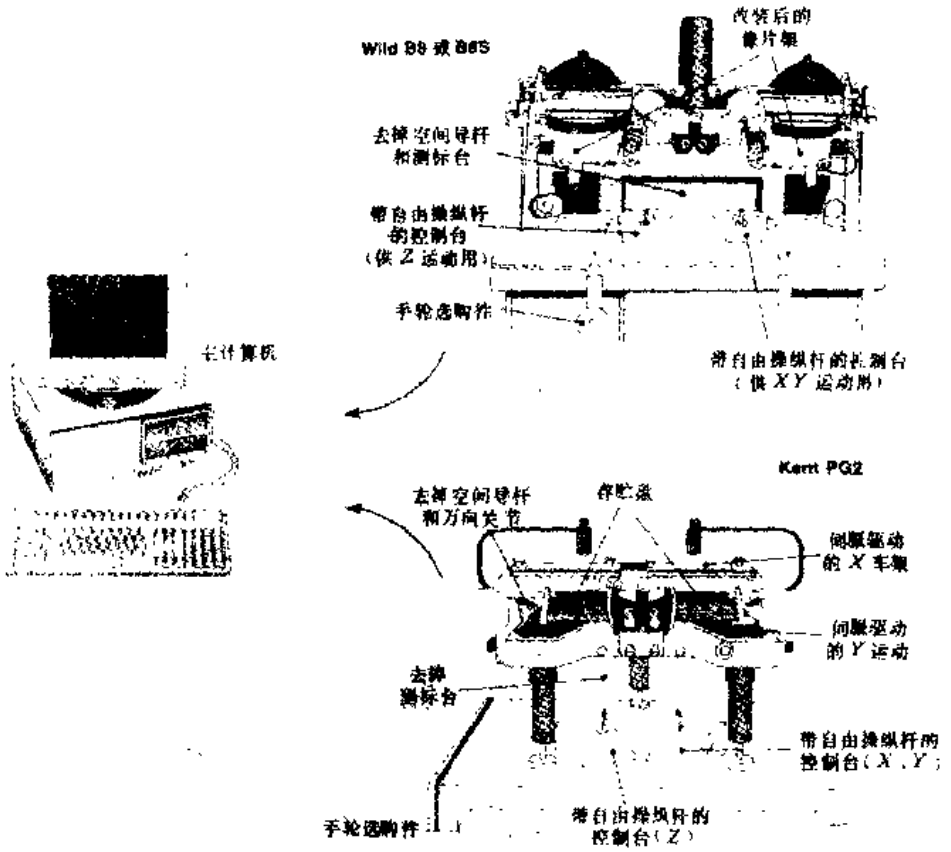


图 13-7-6

1.概述

一般的仪器改造方法，包括上面介绍的各种方法，总是直接在欲改造的仪器上进行改装和调试，显然，这种改造方法难以成批处理，将会影响仪器改造的速度，工作效率也低。

为了能加快仪器改造速度，武汉测绘科技大学提出了一种独特的改造方案，该方案将称之为AAB解析附加部件，独立地在车间加工、调试合格后，直接安装到B8S上去，仅需半天时间即可将模拟测图仪B8S改造成为解析测图仪。

下面简要介绍B8S解析化改造部件（AAB）的组成，在B8S上的安装和改造后的仪器特点与主要技术指标。

2.B8S解析化改造部件AAB的组成

图13-7-7为AAB的机械部件全貌。左右XY车架包括丝杆、导杆、电机、码盘与连接杆。为了将它装到B8S上去，还有横梁和三个支撑臂（见图13-7-8）。与一般解析测图仪相同，它还配有两个手轮、脚盘和两个脚踏开关。

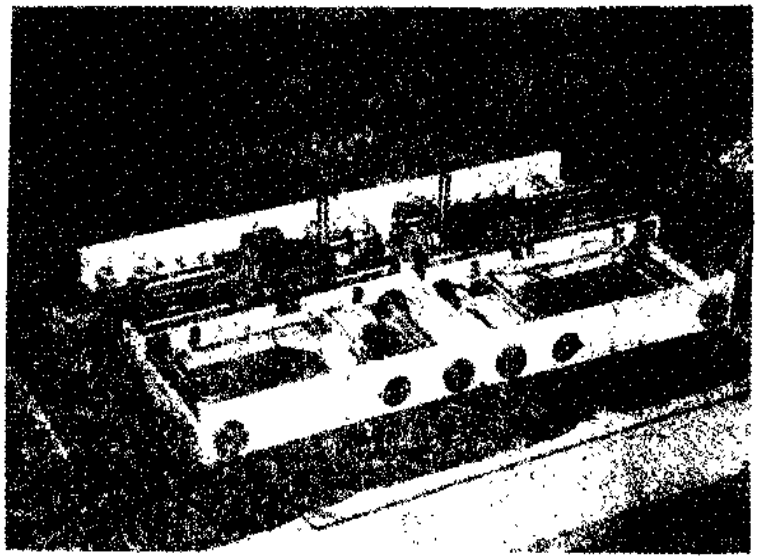


图 13-7-7

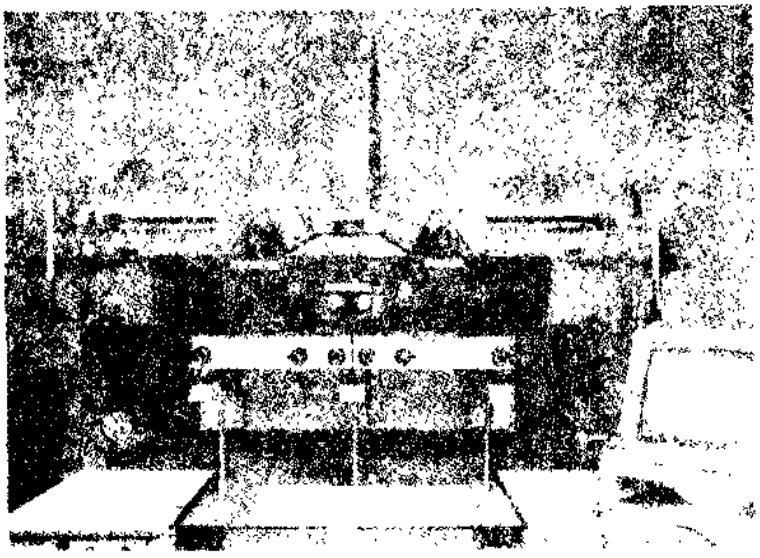


图 13-7-8

改造后的仪器采用“数字投影器”原理，由多微处理器构成的分布式控制系统。主系统由微处理器8088和协处理器8087构成，承担实时运算任务以及与主计算机的通信任务，解释并执行主计算机的命令，对下级子系统进行控制。子系统由4个单片机8051构成，分别承担4个通道的实时控制任务，执行主系统对各个通道的实时驱动，并向主系统传送各个通道的实时坐标。

主系统具有32K字节的ROM（只读存贮器）和32K字节的RAM（随机存取存贮器），采用8259进行8级中断管理，8253产生2级系统实时时钟，8251提供备用的串行口，8279

管理10位数显和调机用的小键盘，另有2片8253用于对手轮和脚盘的脉冲进行计数。子系统每个8051单片机具有内部的ROM和RAM，并分别通过4片DAC0801输出4路模拟信号，用以控制4路伺服驱动系统。8051内部的计数器用以对4个通道的实时坐标进行脉冲计算，并且8051提供坐标系的绝对零位以及对正负两方向的驱动实行限位控制。

监控程序是用汇编语言编制固化在ROM中，实时循环程序由8253控制，每秒钟50次。

B8S—AAB的主计算机采用2兆内存的PC286微机，软件包括硬件检测模块、格网检校模块、定向模块（包括内定向，相对定向和绝对定向）、DEM数据采集模块和数字测图模块。这些统称摄影测量应用软件。软件用C语言编程，利用屏幕菜单方式进行操作。

改造后的B8S—AAB系统采用脱机绘图方式，即采集的数据一律存盘，待编辑加工后，用PC机再驱动数控绘图仪（如TA10）脱机绘图，从而降低仪器改造成本和提高绘图仪功效。

3. AAB在B8S上的安装

AAB在B8S上的安装十分简单。首先将原B8S的空间导杆取下，然后利用仪器原有孔位将横梁固定在B8S机背的前面，三个支撑臂固定在横梁上，左、右车架通过水平调节器装在支撑臂上，调整水平后，将车架上的零直连接杆套入B8S的万向关节里，带动原有观测系统运动。数字投影器的数字控制盒和伺服驱动盒则分别挂在B8S后背的两边。通过电缆与车架以及计算机相联接，接头处全部采用航空插座。由于绝大部分装调工作事先在工厂中完成，因而现场安装非常迅速，空间导杆的拆除与AAB的装调一般只需半天时间。如果用户要恢复原来模拟仪器B8S，也很方便。

4. 特点与主要技术指标

仪器工作在坐标的方式时，用脚踏开关可控制手轮的驱动，即左右车架同时运动，或仅仅左车架驱动。驱动速度可由操作员选择。当进行DEM断面扫描时，左手轮用于速度控制。

数字测图时允许多种采集方式，采用了汉字菜单、图形漫游等技术。主菜单包括特征码输入、数据采集模式选择，其联机编辑功能包括删、改、吻接等多项功能，可满足实时编辑的需要。

仪器的量测范围受B8S *X*行程的限制，在*X*方向仅为175mm，在*Y*方向可达到230mm。作业中一般只能观测到两个角框标或三个中心框标，故内定向采用平面相似变换。仪器的驱动速度为0～30mm/s。由于改造为解析测图仪，像片主距不受限制，但立体像对两片应相同，这是因为采用了原B8S上的光路。量测精度用20点格网法测定，*x*、*y*方向中误差均≤5μm，20点格网高程中误差为H/20000，明显优于原B8S的量测精度。

至于Topocart的改造，由于它是平面型结构的仪器，因此，可将它视为立体坐标量测仪，通过接口及伺服电路与计算机相连。蔡司、耶那公司在美机构利用海拉瓦公司的元器件、计算机（PDP11型）和软件改造了Topocart模拟测图仪。在我国，也已经有几个单位成功地将Topocart改造为机控测图系统，如西安测绘研究所改造成功的APS—TB系统（图13-7-9）、黑龙江测绘局改造Topocart时，是直接利用JX-3的全部成果。

事实上，刘先琳高级工程师在70年代末研制的像片坐标数字化器就是一种最简单的数控摄影测量数据采集系统。当初，该仪器是18×18cm²像幅，在老式立体坐标量测仪上加上微机、伺服机构、外围设备而成（见图13-7-10）。

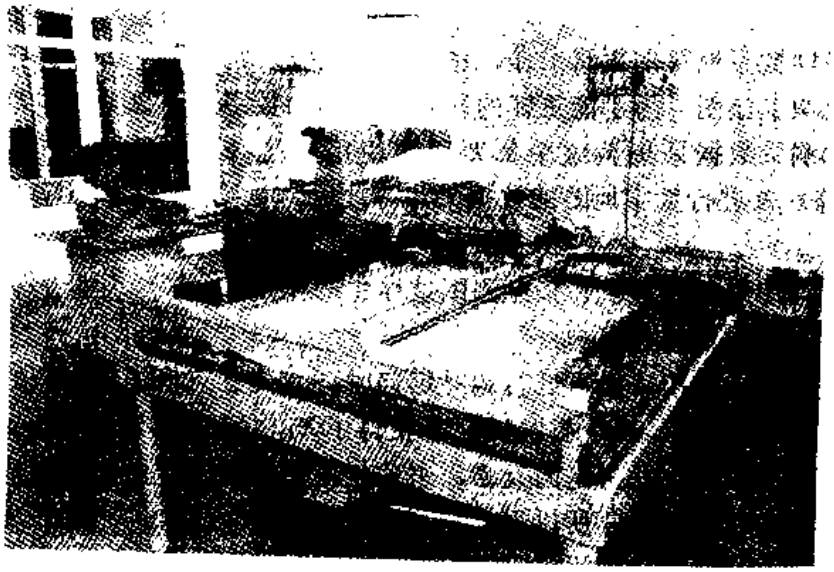


图 13-7-9

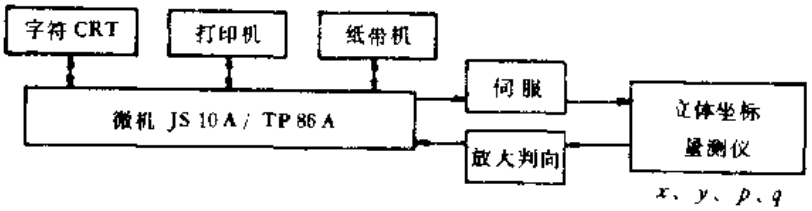


图 13-7-10

该系统在完成内定向和外定向后，主要用来量测像点坐标 x、y 和左右视差 p，通过面与线的相交可求出模型点的坐标 X、Y 和 Z 来。与此同时，还可以实时地计算出上下视差 q，以保证正确的立体观测。

该系统的特点是结构简单，改造成本低廉，自动消除上下视差，像点位置可自动步进，采样密度由人工设置，并可加测特征点，能对断面跟踪作出预报，采用的动态扫描、静态观测的逐点量测方式，便于作业员操作。原先一直用它采集DEM数据点，供制作正射像片用。如果适当增加数字测图软件，并用现代微机取代旧式微机和外围设备，完全可以扩大它在大比例尺地籍测量、像片应用工程中的作用。它的可操作性应当优于G3仪器。

二、机助测图和数字测图

当电子计算机与摄影测量仪器连用之后，人们就不断地研究和开发用电子计算机来帮助作业员进行各项工作，当然也包括工作量大的测图过程。

从总体上划分，如果在量测过程中必须同时由数控绘图桌在线地绘制图形，一般就称之为机助测图。此时作业员关心的是在线绘出的图件，而对暂存在计算机中的数字形式图

形是不感兴趣的。另一种方案则是以获得存贮于计算机中的数字地图为主要目的，对是否在线绘图不感兴趣，故称为数字测图。此时可以将在线绘制的未经严格编辑的地图作为参考草图来辅助数字地图的编辑工作；也可以不在线连机绘图，而先进行图形编辑，然后才在数控绘图桌上绘图。为了能更好的管理所采集的数字地图数据，在第三代解析测图仪和同档的摄影测量数据采集系统中都发展和使用功能齐全的数据库系统（如PHOCUS，SYSTEM9等）来进行数字地图的数据采集。此时，数控绘图桌将不再列为解析测图仪的必备硬件设备。

下面简要介绍电子计算机在整个测图过程中的作用。

（一）机助相对和绝对定向

机助相对定向的方法是，当进行相对定向时，首先逐点消除定向点的左右视差，然后分别对左、右片切准该点，采下脚踏键，即获得了X_1，Y_1，Z和X_2、Y_2、Z（$Q=Y_1-Y_2$）坐标。利用计算公式解出相对定向元素，来修正测图仪上的定向元素初值。但由于这种操作不比常规手工相对定向快，所以很少应用它。

计算机辅助的绝对定向应用较广，它要求事先将控制点物方坐标通过键盘或磁盘文件输入微机中（通常将测区所有控制点一次输入计算机），当相对定向建立了立体模型后，在立体模型上切准这些点，采下脚踏键，模型坐标（X_M、Y_M、Z_M）即进入计算机，点号则通过键盘输入。然后可按平高联解和平高分求的方法求出绝对定向元素。前者需已知近似值，可以通过两个点的坐标正反变换求得。后者无需知道初始值，但也要先进行坐标变换。对于全部控制点均为平高点的情况下若取重心化坐标，解求将十分简单，此时三个坐标平移量恒为零。而比例尺改正数和三个角元素改正数分别由下式求出：

$$d_m=\frac{[(\overline{X}_C-\overline{X}_M)\overline{X}_M]+[(\overline{Y}_C-\overline{Y}_M)\overline{Y}_M]+[(\overline{Z}_C-\overline{Z}_M)\overline{Z}_M]}{[\overline{X}_M^2+\overline{Y}_M^2+\overline{Z}_M^2]} \tag{13-46}$$

和

$$\begin{bmatrix} [\overline{Z}_M^2+\overline{Y}_M^2] & -[\overline{X}_M\overline{Y}_M] & -[\overline{Z}_M\overline{X}_M] \\ & [\overline{Z}_M^2+\overline{X}_M^2] & -[\overline{Z}_M\overline{Y}_M] \\ \text{转置对称项} & & [\overline{Y}_M^2+\overline{X}_M^2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\Omega \\ d\Phi \\ dK \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -[(\overline{Y}_C-\overline{Y}_M)\overline{X}_M]+[(\overline{Z}_C-\overline{Z}_M)\overline{Y}_M] \\ [(\overline{X}_C-\overline{X}_M)\overline{Z}_M]-[(\overline{Z}_C-\overline{Z}_M)\overline{X}_M] \\ -[(\overline{X}_C-\overline{X}_M)\overline{Y}_M]+[(\overline{Y}_C-\overline{Y}_M)\overline{X}_M] \end{bmatrix} \tag{13-47}$$

上式中各坐标值上加短横表示重心化坐标。

于是：

$$\left.\begin{aligned} m&=(1-dm)m^0 \\ R&=dR\cdot R^0 \end{aligned}\right\} \tag{13-48}$$

从中求出的角元素Ω和Φ安置到仪器上，比例尺系数可用来调节仪器的基线，也可以不安置，而与K一起通过图板定向来解析地加以处理，但是，所有的变换参数均存在计算机中供数字测图用。

对于无绝对定向用的公共Ω和Φ的仪器，应转换成投影器上的相应安置元素（Φ用$\varphi_{左}$、$\varphi_{右}$代替、Ω用$\omega_{左}$、$\omega_{右}$代替），并加入基线分量的微小变动量以保证不破坏相对定向。

对于Φ而言：

$$\left.\begin{aligned}\Delta B_X &= -B_Z\cdot\Phi\\ \Delta B_Z &= B_X\cdot\Phi\end{aligned}\right\} \tag{13-49}$$

对于Ω而言：

$$\left.\begin{aligned}\Delta B_Y &= -B_Z\cdot\Omega\\ \Delta B_Z &= B_Y\cdot\Omega\end{aligned}\right\} \tag{13-50}$$

应当指出，从机助定向角度看，采用线性编码器实现模/数转换比旋转编码器好。这是因为模型距离较大时为到达定向点，常常脱开手轮用徒手推动使之快动。在这种情况下，线性编码器依然能很好地进行数字化。

（二）机助摄影测量系统中计算机辅助测图的功能

机助摄影测量系统中进行机助测图是最受作业员欢迎的。

绘制地物时要求绘出不依比例尺的点状和线状符号，当然还有许多注记（字母数字符号）。字母数字符号可通过字符发生器，以单个多边形组合形式存贮在计算机中。单个符号的注记可以通过键盘命令或取自点的坐标（如高程注记）来确定。首先将测标移到字符串序列的起点位置，然后确定其方位与大小，例如在RAP2机助测图系统上要写一高程注记，则先按菜单式功能键盘PFKB5上的高程键（HEIGHT）。如果要写出英文街道名，则在键盘上输入街道名的字符序列。汉字可作为符号生成或调用汉字卡。

点状和线状符号及其组合构成地物符号库存贮在计算机中，一般测图软件可生成999个符号，200个简单线状符号和200个组合线状符号。可以在开始测图时将需要的符号定义给菜单式功能键盘，也可以在测图中通过其编码由键盘命令调用。

用于计算机辅助测图的微机绘图软件一般还具有下列功能：

（1）将符号填充到某一已测绘的图形内（如森林、沼泽地、稻田符号、建筑物晕线等）；

（2）将闭合折线的起点与终点连结起来，形成闭合图形；

（3）用脚踏键将刚测出的最后两点连成直线。所以线状地物仅需测起点、终点和转折点；

（4）对直角物体自动增补所缺的一点。这对于绘制建筑物很有用，因为常常可能有某个角点被树木或房檐所遮盖；

（5）将刚记录下的若干点（至少三点）联结成光滑曲线。这意味着绘制曲线时不一定要步步跟踪，而只须采集曲线上少数关键样点，然后用软件来绘出光滑曲线；

（6）用直线和曲线组合方式连接刚采集的点子（至少三点）；

（7）按等长的时间间隔或距离间隔自动采集数据（如在测绘等高线过程中）。这些点可用来建立DEM，也可由绘图软件去绘曲线；

（8）按规则地物存在的平行与垂直条件或其它几何条件，对采集的数据进行条件平差，以绘出满足这些外形条件的图形；

（9）自动绘制已绘直线或曲线的平行线。

关于外形条件、平行线绘制、晕渲、曲线内插拟合及曲面内插拟合等方面的理论与算法将在《数字摄影测量》或《计算机图形学》中讨论。

图13-7 11为模拟仪器上常规测图与机助测图的对比实例，机助测图尤其实用于大比例

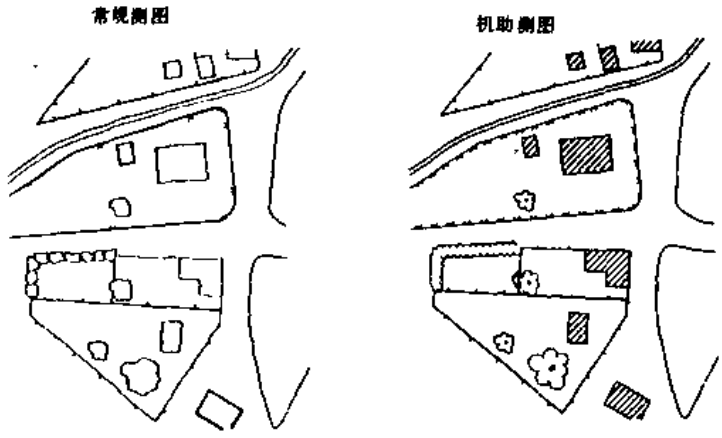


图 13-7-11

尺测图和地籍测图。

（三）机控摄影测量系统中计算机辅助作业的功能

在机控摄影测量系统中，由于它具有计算机控制的伺服反馈系统，可推动仪器有关部件自动运动，因此，它除了具有上述机助系统的全部功能外，还具有以下功能：

（1）内定向时自动将测标移到框标附近，相对定向时自动将测标移到标准点位上，而在绝对定向中自动将测标移到控制点附近（两个点量测之后）；

（2）在空中三角测量中自动将测标移到已测连接点位置上，在在线空中三角测量中自动将测标移到需修测的点位上；

（3）在断面测量和格网DEM采样中，控制测标自动沿着规定的方向移动，作业员仅需用一手轮或脚盘操作，使测标切在模型表面，从面加快采样速度；

（4）自动对已采样数据进行地形分析，并自动移到需加测的点位上，实现渐进取样；

（5）在新的立体模型上自动将测标移到地物在上面的模型测量的终点上，以保证完整的连接和正确的接边。

（四）摄影测量中的数字测图概念

在机助和机控摄影测量系统上以获取存贮于计算机中的数字地图为目标的作业过程称之为摄影测量的数字测图。它与地图数字化、野外测量数字化一起构成了地学数据库基础数据的采集系统，是今后测绘工作的主流方向。下面就数字测图作简要叙述。

1.图形信息在计算机中的表示

图形信息在计算机中有两种表示方法，即矢量数据和栅格数据表示法（见图13-7-12）。

在摄影测量仪器上立体观测和地物测绘的所有信息是以矢量数据方式存贮到计算机中的。其中的坐标（X、Y和X、Y、Z）是在仪器上量测得到的，而属性必须编码送入计算机。

2.地物属性编码方式

如何对摄影测量立体测图仪上获取的图形信息赋予地物属性编码呢？可以采用以下不

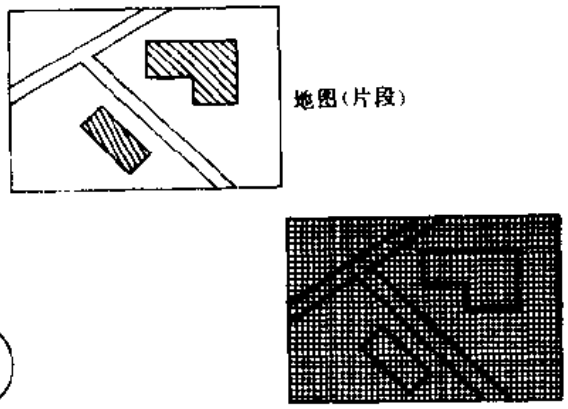


图 13-7-12

同的方法。

（1）计算机键盘键入方式。作业员按各地物在统一属性编码中的数码从计算机键盘上输入，如Planimap绘图软件。

（2）菜单式功能键盘方式。当放大镜光标对准菜单上某一方格时，该方格所示地物的属性码就送入计算机。这是因为放大镜周边有一圈电线，功能键盘方格下也有格网状电线，于是相应的线路中便产生电脉冲，经过硬件处理后使成为属性码。例如RAP2上的PFKB5功能键盘。

（3）仪器面板输入。与（2）相似，但直接由厂方安装在仪器面板上。

（4）音响声输入法。在仪器上装有音频信号识别装置。为了能使计算机理解作业员的声音信号，必须对计算机听觉系统进行训练，使之熟悉作业员念出的每个制图符号。如MAPS200系统上就曾有过此功能。

（5）将编码工作与数据采集分离，放在图形编辑工作站上完成。此法可加速数据采集速度，但必须在采集时获取草图，或利用旧图和调绘片在图形工作站上补上地物的属性编码和其它相关的信息，可利用计算机的智能来减少人工工作量。此法目前尚在试验研究之中。

3.数据获取、图形编辑和图形输出的独立性

数字测图是一个离线作业过程，因此它所包含的三项工作，即数据获取、数据编辑和图形输出可以独立进行（见图13-7-13）。其优点是：

（1）作业故障仅仅出现在局部范围内，不影响其它工序的继续进行；

（2）通过调整各种仪器设备的数量，可以很容易地达到系统的最佳配置。如数控绘图仪可供多台机助、机控测图仪共用，以节省成本，提高效率；

（3）系统的各个部分可以安置在不同的地方。一个部门可以在中央测图单位下兼容若干小的数据采集站；

（4）只要考虑到计算机的兼容性，利用磁盘、磁带或通讯网络可以方便地实现数据的共享与交换；

（5）经过编辑后的数字地图可以不同比例尺形式输出，也可按专题输出。而常规作业中的人工编图和清绘工作可以免除。

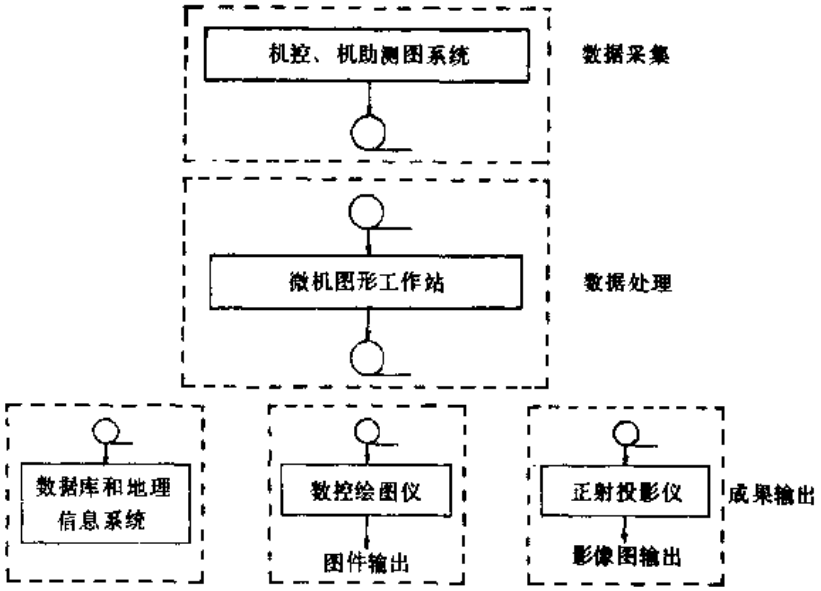


图 13-7-13

图13-7-14为由同一数据源绘出的1:500，1:1000和1:2500的地图。

三、单张像片机控和机助测图系统

利用单张像片和数字高程模型还可以构建机控和机助单片测图系统，以用来进行转绘，面积量算和地图更新。

单片测图原理最先由ITC的Makarovič教授提出。大家知道，单张像片是不能进行立体测图的。但是，若具备了该地区的数字高程模型，则可由单根光线与DEM相交求出模型坐标 X、Y、Z来。其原理如下：

假设已通过单片后方交会求出外方位元素来，则由摄影测量基本原理知，对于每一像点（x，y）有：

$$\begin{bmatrix} X-X_S \\ Y-Z_S \\ Z-Z_S \end{bmatrix} = \lambda \cdot \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} \tag{13-51}$$

其中，X_S、Y_S、Z_S，$\boldsymbol{R}=f(\varphi、\omega、\kappa)$为外方位元素，是已知的，$x$，$y$为以像主点为原点的像点坐标，而$f$为主距。

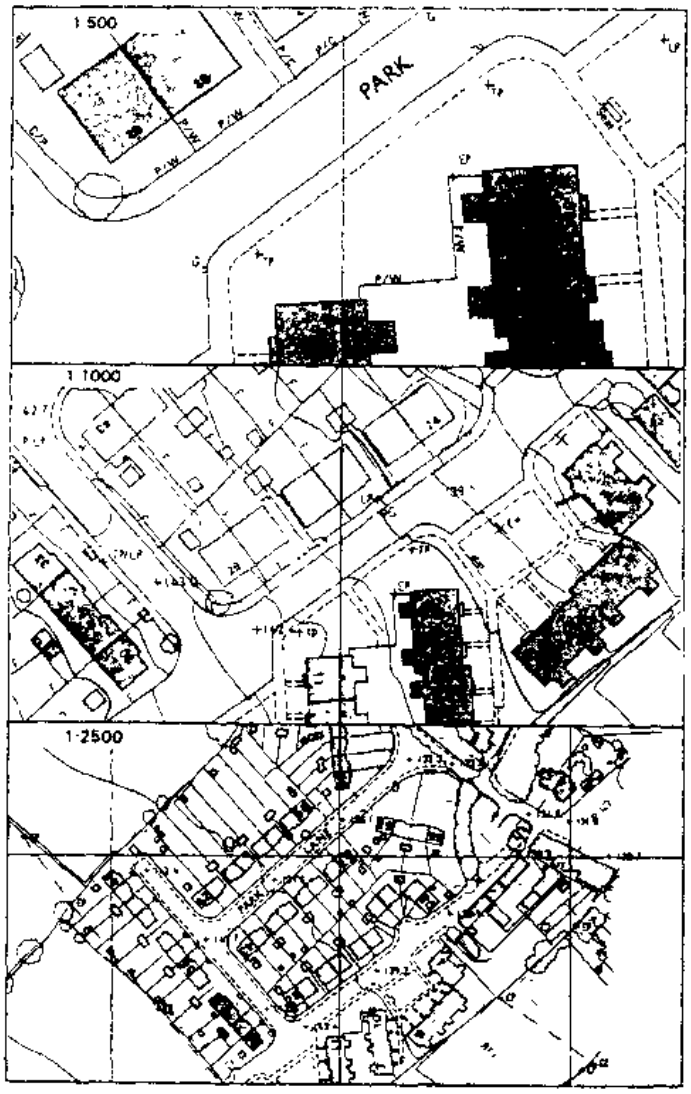


图 13-7-14

由（13-51）式可写出

$$\left.\begin{aligned} X &= X_S + (Z - Z_S)\cdot\frac{a_1x + a_2y - a_3f}{c_1x + c_2y - c_3f} \\ Y &= Y_S + (Z - Z_S)\cdot\frac{b_1x + b_2y - b_3f}{c_1x + c_2y - c_3f} \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}52)$$

于是可用一种迭代解法求出 X、Y、Z来，其步骤如下：

第一步：令 $Z = Z_{初值}$，代入（13-52）式中，求出 X和 Y；

第二步：由 X和 Y在DEM中内插求出 Z来；

第三步：再用新的 Z值由（13-52）式中求出 X和 Y。如此循环，直至相邻两次 X，Y，Z值之差小于规定的限差为止。

在这种方法中$Z_{初值}$可由$Z_{初值}=Z_S-H_{平均}$求出。它适用于较平坦地区。对于起伏大的地区，可先由地面的数字高程模型，按一密集格网（像片上约2mm 5mm）计算像片不规格格网数据，然后以x、y坐标内插求出该点$Z_{初值}$。按此方法可构成像方型单片转绘与修测仪。其结构原理如图13-7-15。

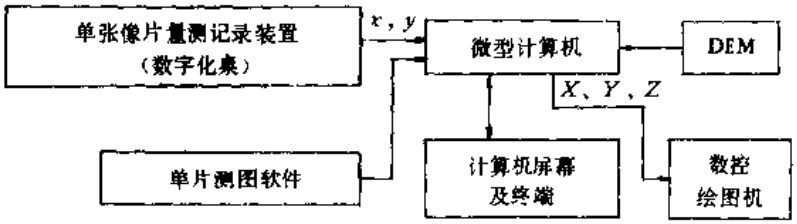


图 13-7-15

这样的仪器有西安测绘研究所研制的AT2像方解析转绘仪和武汉测绘科技大学研制的LRIIS土地资源调查信息系统。

如果利用解析测图仪原理，可构成物方型单片测图仪器。此时，首先由输入的物方坐标X和Y，通过DEM内插得到高程Z，然后将求得的X、Y和Z坐标，以及外方位元素代入共线方程求出像片坐标x和y，通过伺服机构来驱动像片盘使测标到达所对应的像点上，就如同在解析测图仪上作业一样。为此它应有LOOP程序和伺服系统。这种物方型解析单片测图仪的结构原理示于图13-7-16，具体仪器有西安测绘研究所研制的AT—1物方解析转绘仪。此时不需要迭代计算。

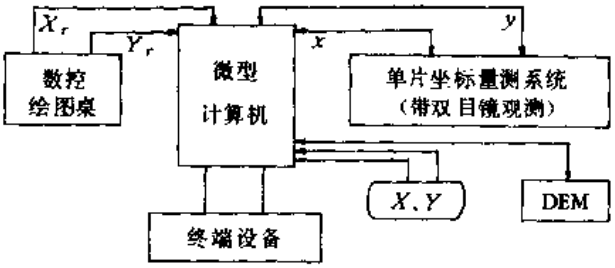


图 13-7-16

至于单片测图所需的DEM或由以前的解析测图中获得，或直接在单片测图仪上对原有地形图等高线进行数字化采集而获得。

通过本节的讨论可知，除了利用解析测图仪外，还可以改造已有模拟测图仪，将它们变成机助和机控测图系统，也可以基于单张像片和DEM构建单片测图的机助和机控系统。

以这些手段来进行机助测图和数字测图，无论从减轻劳动强度、提高测图质量和效率，还是从建立测量数据库和各类地理信息系统来看，必然是现在和未来的主要发展方向。摄影测量与遥感专业工作者应以自身的有利条件，为模拟法向解析法和数字化的方向过渡作出积极的贡献。

本章习题与思考题

1.什么叫解析测图仪？为什么解析测图仪将逐步取代模拟测图仪？其优点何在？

2.解析测图仪由哪些基本部分组成？试绘出其相互关系图。

3.简述解析测图仪的发展历史和它的三个发展阶段。

4.比较解析测图仪的立体量测部件与一般立体坐标量测仪的异同。

5.什么叫模/数转换？常用的编码器有哪两种？各有什么特点？

6.什么叫伺服系统？试说明和绘图比较开环与闭环伺服系统的优缺点。

7.解析测图仪的软件包括哪两大部分？各起什么作用？试绘出解析测图仪的程序结构。

8.解析测图仪的摄影测量软件包括哪两大类？各起什么作用？什么叫实时程序？

9.按照输入物方坐标方式列出在解析测图仪上进行实时计算的框图和主要公式。

10.按照输入像方坐标方式列出在解析测图仪上进行实时计算的框图和主要公式。

11.为什么目前大多数解析测图仪均采用输入物方坐标的方式？

12.阐述数控绘图桌的工作原理。目前在解析测图仪上常选用哪些型号的数控绘图桌？

13.什么叫图形影像叠置系统？在解析测图仪上使用它有什么好处？

14.试叙述并比较Videomap和KRISS系统。

15.解析测图仪如何进行仪器检校？它与模拟测图仪的检校有何异同？

16.联邦德国欧波同厂为何生产一整套C系列解析测图仪产品？试比较其性能和用途。

17.叙述欧波同厂P系列解析测图仪的主要特点。试比较P1，P2，P3三种型号仪器的性能异同。

18.为什么欧波同厂推出P型解析测图仪来取代C型仪器？

19.什么叫PHOCUS软件系统？为什么用它来取代原先的PLANIMAP绘图软件？

20.叙述P型仪器上的高分辨率数字化板和P鼠标器的用途。

21.详细叙述威特厂BC2解析测图仪的硬软件配置特点。

22.什么叫PFKB5菜单式功能键盘？它有什么用途？

23.与BC2相比，BC3解析测图仪有哪些重要改进？

24.简要叙述SYSTEM9的设计思想和主要特点。

25.绘图叙述克恩厂DSR—11解析测图仪的分布式计算机配置。

26.叙述克恩厂DSR—15解析测图仪的特点，它比DSR—11有哪些改进？

27.绘图示出新一代克恩解析测图仪的软件结构及各软件的功能。

28.简述INFOCAM地学信息系统的结构与功能。

29.说明在解析测图仪上配置计算机的三种原则。你知道的解析测图仪属于哪种原则（至少各列出一种）？

30.克恩DSP1数字立体摄影测量系统是否属于解析测图仪？为什么？你如何评价这架仪器？

31.根据共线方程式标绘出US—2中的数字投影器坐标变换逻辑图，并作必要说明。

32.你知道有哪些低成本或小像幅解析测图仪？你对这些仪器的应用前景有何看法？

33.简要比较C—130和BC2两种解析测图仪的性能特点及其优缺点。

34.简要比较P3和BC—3两种解析测图仪的性能特点及其优缺点。

35.叙述在解析测图仪BC2上测制地形原图的作业过程（假设模型定向点已加密获得，内方位元素已知）。

36.叙述在解析测图仪上采集DEM高程数据的各种方法、并比较其优缺点。

37.国产解析测图仪有哪几种型号？你对我国发展和生产解析测图仪的前景有何看法？

38.为什么说解析测图仪对数字摄影测量的发展有很大推动作用？

39.模拟测图仪为何要改造成为机助或机控摄影测量系统？如何进行这种改造？

40.什么叫机助测图？什么叫数字测图？它们有什么优点和应用前景？

41.试比较物方和像方解析法进行单片测图的原理及优缺点。

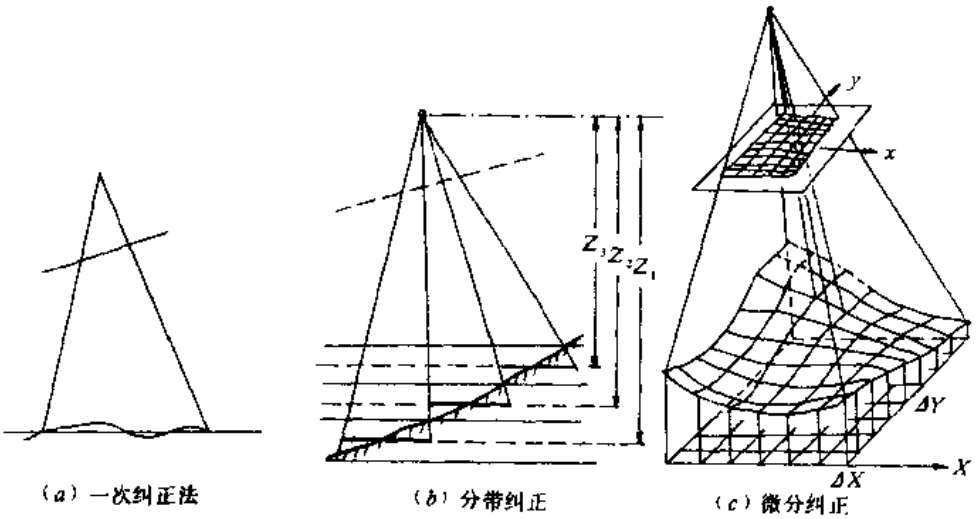
第十四章　数控正射投影仪及其应用

§14.1　微分纠正的概念

一、概述

用线划图表示实际的自然景观通常并不令人完全满意，而航摄像片或卫星像片才能最真实、最客观地反映地表面的一切景观，具有十分丰富的信息。然而航片或卫片通常并不是与地表面保持相似的、简单的缩小，而是中心投影或其它投影构像。因此，这样的影像存在由于像片倾斜和地形起伏等引起的变形。如果能将它们改化（或纠正）为既有正确平面位置又保持原有丰富信息的正射影像，则对于地球科学研究和人类的利用是十分有价值的。

大家已在基础摄影测量学中学过，当地面高差引起的变形在影像图精度允许范围内，则采用一次纠正，即通常利用大型或小型纠正仪的像片纠正（图14-1-1(*a*)）。当地面起伏不允许一次纠正时，可以在几个不同投影高度上进行分带纠正，使每带纠正中的投影误差限制在影像图允许范围内（图14-1-1(*b*)）。如果地形起伏变化大，分带纠正也无法进行时，则只能用一个足够小的面积为纠正单元（称为缝隙），并根据该纠正单元的地面实际高程来控制纠正元素，使之实现从中心投影到正射投影的正确变换。这就是所谓的微分纠正〔图14-1-1(*c*)〕。实现微分纠正的仪器称为正射投影仪。除了利用电子计算机进行的对数字影像的数字微分纠正外，目前主要利用计算机控制的正射投影仪。为了提供微分纠正所需要的大量高程信息，则需要事先获得相应地区的数字高程模型或地形断面数据。



(*a*) 一次纠正法　　(*b*) 分带纠正　　(*c*) 微分纠正

图 14-1-1

二、微分纠正的发展过程

微分纠正经历了很长的历史发展过程。

1897年向甫鲁首先建议按照投影带方法逐带编制像片图，并制成了投影带纠正仪，但由于方法烦琐，未能推广。1924年维托里斯（Vietoris）建议另一种扫描带原理，到1929年由拉克曼教授（Lacmann）用实验室仪器实现，其高程信息由地图制成纵断面模片。1933年费贝尔（Ferber)利用一种简易双像投影仪按照互补色进行高程量测,同时借蓝色投影光进行光学微分纠正，将微分纠正与模拟测图仪结合起来，以获得随时变化的地面高程信息。1955年贝安（Bean）首次利用缝隙光阑作为测标,并使用了制作正射像片用的第三个投影器，利用投影器的景深来保证光学清晰（参见图14-1-2)。1959年前苏联也出现了同类原理的ΦTШ微分纠正仪。我国王之卓和顾葆康教授于1959年亦曾提出利用第二类型纠正仪和多倍测图仪相连进行山地缝隙纠正的方案。

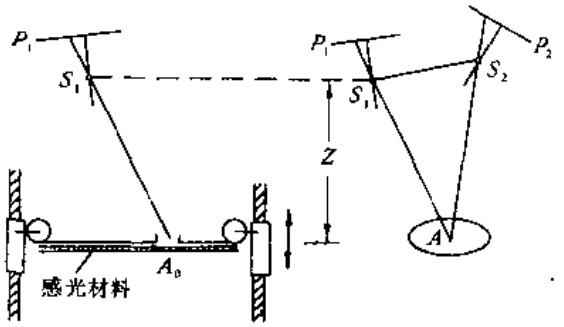


图 14-1-2

1964年联邦德国欧波同厂制成了利用前附镜系统的精确调焦光学投影的GZ—1正射投影仪。它既可与C8或D2等立体测图仪联接起来进行在线作业，也可以脱机进行离线作业。在线作业时，它无法进行缝隙内的地面坡度改正，只能将每个小缝隙面视为水平面。GZ—1离线作业则分两个步骤：首先是在立体测图仪上进行断面扫描，将缝隙左端点构成的断面高程以模拟的方式记录在储存器SG—1 的一块24×30cm²的存贮板上，即在涂有黑色乳剂层的模片上刻出每个断面的记录。然后在GZ—1装片纠正。此时将断面记录板装入读出器LG—1中，由光电元件对断面记录板上各断面进行自动跟踪扫描，产生电压差。左、右两个断面被同时跟踪扫描，左边一个电压差控制投影器的升降运动，即按地形变动控制晒像的投影高度Z，右边的电压差是相对于左边而言的，它使GZ—1的光学坡度改正器旋转至相应位置，使缝隙上面坡度改正器表面的倾斜角与实际地面坡度角相同，以消除缝隙内地面坡度的误差，从而获得正射影像图。同时电子等高线仪也可根据此电压差自动在影像图上晒印出等高线来。但是光学坡度改正器的最大坡度限制为±35°。上述离线作业原理可用图14-1-3表示。

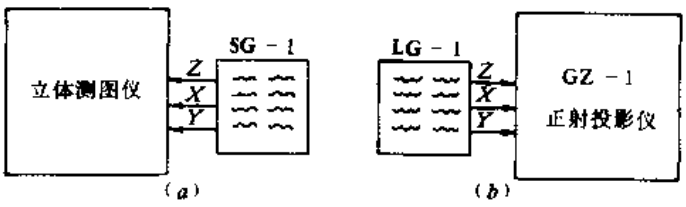


图 14-1-3

在这之后，一系列相类似的中心投影关系的正射投影仪纷纷问世，如联邦德国欧波同厂的Ortho—3型、美国的K—320型，前民主德国蔡司厂的OrthophotB（与TopocartB连用），以及威特厂的A8—PPO8型正射投影仪。但是这些仪器均视缝隙面为平面，因而是零级纠正仪器，不能顾及地形坡度的影响。而GZ—1离线作业时虽然能顾及地形坡度，但作业不方便。所以，这些仪器均未能在生产中获得广泛应用。

1971年加拿大贺伯罗（Hobrough）制成GPM测图仪。它利用数字相关实现小六角形元素的微分纠正，并采用高次曲面改正坡度误差，获得高质量的正射像片。这种间接式函数投影的数字微分纠正不仅开辟了数字微分纠正的道路，而且也鼓舞人们去研究和开发基于函数投影关系的光学投影晒像的仪器，并获得了成功和广泛应用。目前在市场上出售的主要有瑞士威特厂的Avioplan OR—1(1976年问世)，联邦德国欧波同厂的Orthocomp Z—2（1980年问世）和我国刘先琳设计的ZS—1（1985年）数控正射投影仪。

三、正射投影仪的分类

可以从不同的角度来对正射投影仪器进行分类。

按照像片与纠正承影面之间的关系，微分纠正可以分为中心投影（直接投影）方式和函数投影（间接投影）方式，后者又区分为光学投影晒像和电子投影晒像两种(图14-1-4)。直接投影是将已定向好的投影器的中心投影光线按要求的比例尺投影晒像(图14-1-4(a))；而间接投影时，像片面与正射影像承影面之间的关系是任意的（通常是平行的），而像点和图底点间的关系是由函数关系表示的。若按光学投影晒像（图14-1-4(b)），那是通过光学系统实现变倍和旋像，从而将像片上相应的影像正确投晒到承影面上，而采用电子投影晒像时，则先用阴极射线管等投射像片影像，然后根据DEM信息对影像进行变换，再通过阴极射线管进行投影晒像（图14-1-4(c)）。也可以先将像片影像数字化，然后利用已有的

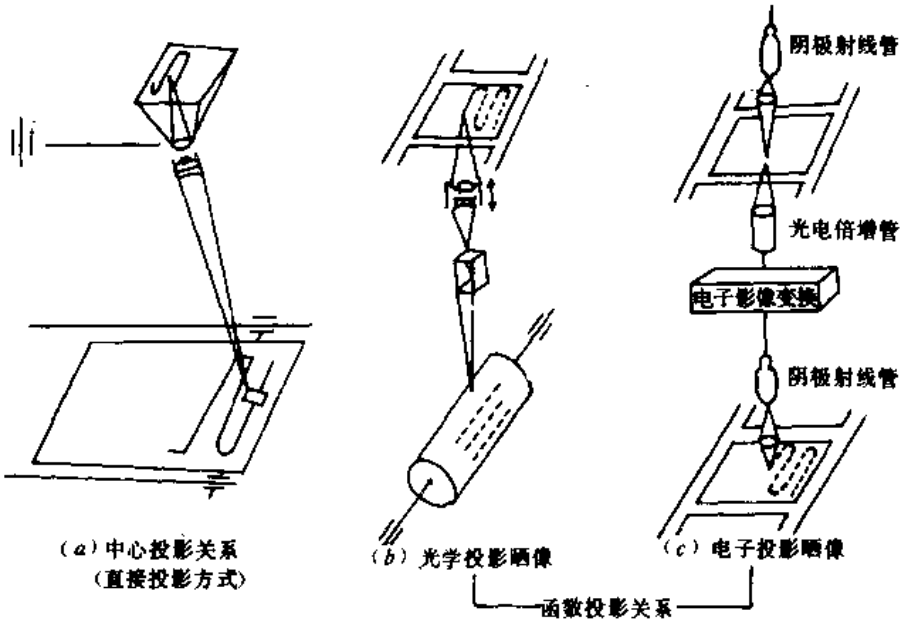


图 14 1-4

DEM或进行数字相关建立DEM，实现数字影像的变换，即重采样，而获得数字化的正射影像，借助于相应的影像输出设备可获得正射像片。目前生产中采用的上述三种正射投影仪均属于函数投影光学晒像的微分纠正仪器。

图14-1-5所示是按地形坡度改正方法分类的微分纠正。如果按照微分纠正中对缝隙内地形起伏的改正方法，又可将正射投影仪分为零级、一级和高级纠正三类型号。所谓零级纠正是视纠正缝隙面为水平面，不作地形坡度改正（图14-1-5(a)，因此缝隙处相拼接时将由于高差ΔZ的影响产生影像错位、重叠或丢失，故已不常采用。一级纠正是视缝隙面为倾斜面，它又区分为切面和割面两种方式（图14-1-5(b)和(c)）。采用斜切面方式时在相邻带拼接处仍存在由高差$\Delta Z'$引起的影像变形。同样是一级纠正，但采用割面方式，则拼接处$\Delta Z''=0$，所以无拼接误差。但由于割面仍与实际地形表面有差异，故各个扫描带内部的影像仍存在由于未顾及的地形起伏引起的影像变形。只有采用高次多项式拟合实际地表面的高级纠正（图14-1-5(d)），才能最好地顾及地形起伏的影像。高级纠正一般是针对数字影像进行。目前在生产中广泛应用的上述三种正射投影仪均属于割面方式的一级微分纠正。

表14-1-1根据上述两种原则对各类正射投影仪进行分类。

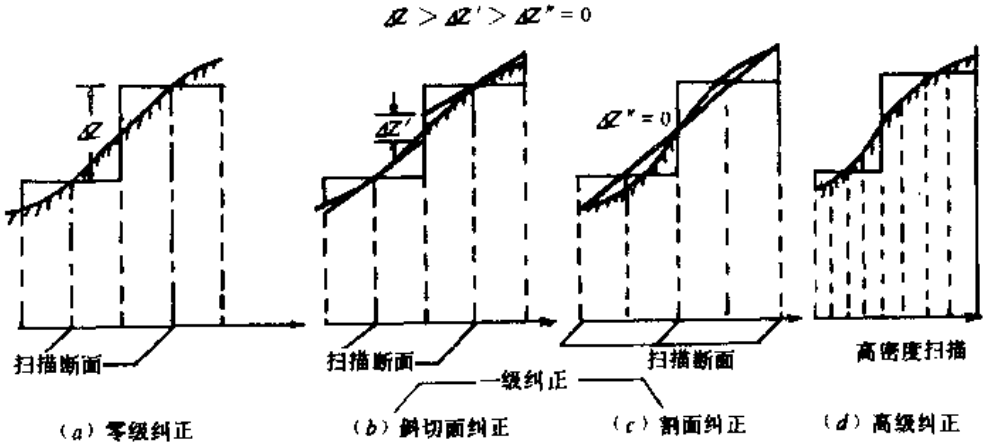


图 14-1-5

正射投影仪分类　　表 14-1-1

纠正方法	纠正单元 / 晒像方法	纠正单元内地面坡度改正方法	
		无坡度改正（0级）	有坡度改正（一级或高级）
直接投影式中心投影关系	线元素光学投影晒像	Orthoprojektor GZ—1（联机作业） Ortho—3 正射投影仪	GZ—1： 脱机作业加光学坡度改正器
		Orthoscan K—320（美国）	
		ФТШ-1 （前苏联）	

续表 14-1-1

纠正方法	纠正单元 晒像方法	纠正单元内地面坡度改正方法	
		无坡度改正（0级）	有坡度改正（一级或高级）
间接投影式 函数投影关系	线元素 光学投影晒像	Topocart—OrthophotoB （前民主德国蔡司厂） A8/PPO—8(瑞士威特厂) 克恩OP2	Avioplan OR—1(瑞士威特厂) Orthocomp Z—2(联邦德国 欧波同厂) 国产ZS—1数控微分纠正仪
	线元素 电子投影晒像		B8 Stereomat 电子相关器 Stereomat A2000
	面元素 电子投影晒像	UNAMACE（美国）	AS—11—B/C AS—11—C AS—11—BX } 美国 GPM（高次曲面，加拿大）

§14.2 间接式光学投影微分纠正原理

从上一节知，目前广泛应用的几种正射投影仪都是间接式光学投影的割面方式的微分纠正仪器，因此本节主要叙述这一类仪器的微分纠正原理。

间接式（函数式）光学投影微分纠正的理论，基本点是分析像片上某一像元与地面（或立体模型）相应元素的正射投影间的关系，以及它们之间转换的方法。所取的像元一般要对应于正射像片面上一个比较小的缝隙。对于任意地形起伏的地面，要保证整个缝隙上所有点与像元内所有点均满足投影对应关系是不可能的。按照割面方式微分纠正时，乃是保证缝隙两端点所对应的物像满足投影的对应关系（见图14-2-1）。

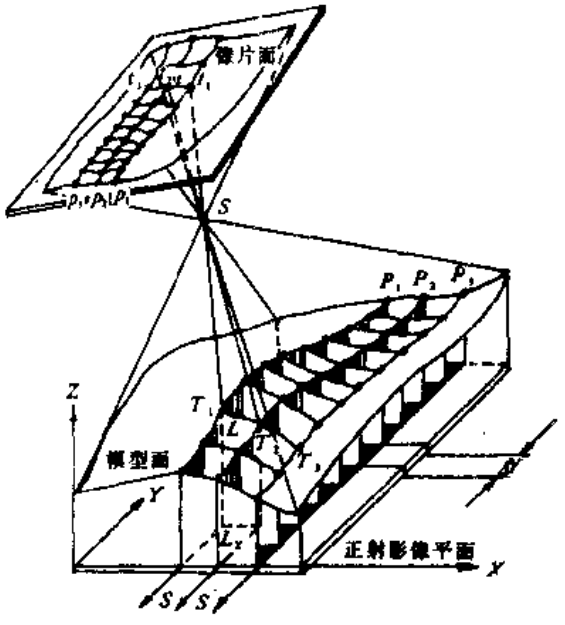


图 14-2-1

将图14-2-1中所要研究的任一小块取出来研究其数学关系，可使问题变得很简单。图14-2-2中，设正射像片面上缝隙两端点处A和B严格满足中心投影的函数关系，则可由立体模型上的A、B点坐标X_A，Y_A，Z_A和X_B，Y_B，Z_B（Z值可取自DEM数字高程模型）及内外方位元素解析地或模拟地求出对应的像点a和b的像片坐标x_a、y_a和x_b，y_b。对于正射影像面上各扫描带，所获得的对应像点坐标，称为像片断面数据。

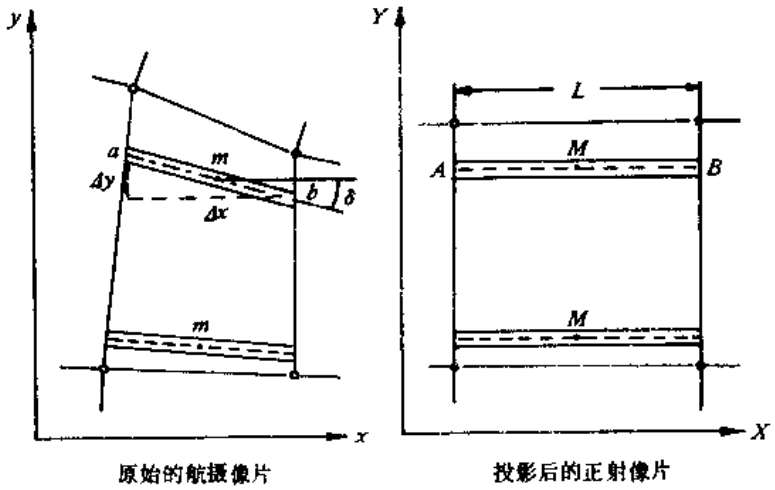


图 14-2-2

显然，与承影面上缝隙长度为L的线元素AB，其在像片上相对应的影像ab的长度为l，显然有：

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{14-1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= (x_b - x_a) \\ \Delta y &= (y_b - y_a) \end{aligned}\right\} \tag{14-2}$$

设像片上影像ab的中点为m，则：

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \frac{x_a + x_b}{2} \\ y_m &= \frac{y_a + y_b}{2} \end{aligned}\right\} \tag{14-3}$$

所以，在像片平放的函数式光学投影的正射投影仪上，为了使像片上的ab线元素影像正确地投影到正射像片承影面的缝隙AB线元素上，必需完成下列动作：

（1）将像片移动，使m点（即ab线段中点）位于仪器主光轴上（即其投影正好在AB线段的中点M上）；

（2）按照放大率

$$V_x = \frac{L}{l} \tag{14-4}$$

来控制变倍系统，使影像ab的投影长度正好等于AB的长度；

（3）将投影的影像旋转一个δ角：

$$\delta = arc\tan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \tag{14-5}$$

使放大后像片上ab线段的影像正好落入承影面的缝隙AB中。

随着缝隙AB在承影面上的规则移动，实现一个断面一个断面的正射投影成像，从而

获得拼接完好的正射影像。

目前生产中采用的OR—1，Z—2和ZS—1型正射投影仪就是采用这个原理，利用电子计算机来适时地计算式（14-1）至（14-5）中各数值，然后用相应的伺服控制系统实现上述平移、缩放和旋转以及晒像等动作。因此，这种线元素（割线方式）的数控微分纠正仪应当有图14-2-3的基本结构。过程计算机的输入是已采集或由DEM已计算出的像片断面数据、缝隙长度L和其它有关参数。经过实时计算，过程计算机对每个缝隙求出m点坐标的驱动像片正确平移，求出V_x去驱动变倍光学系统，实现正确的缩放（$l \rightarrow L$），而求出δ以控制旋像棱镜的工作。软片滚筒也在计算机控制下正确地转动，实现微分纠正。

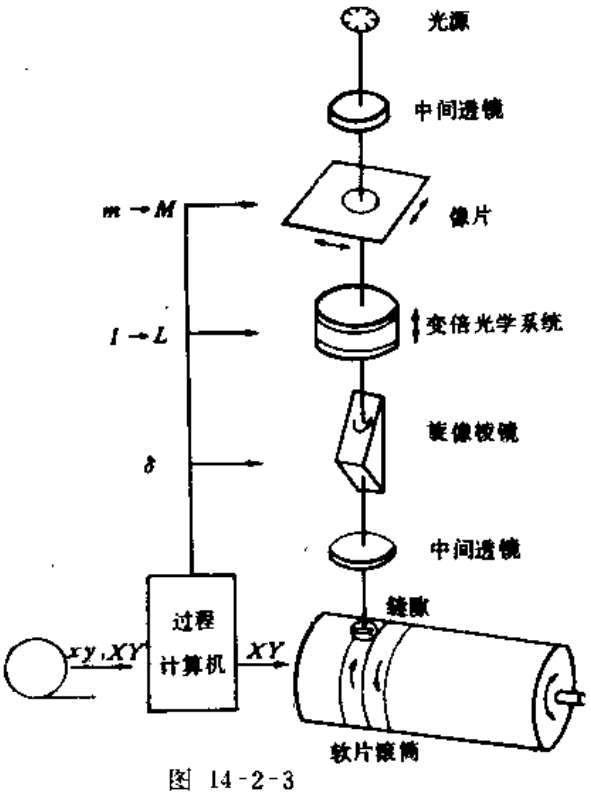


图 14-2-3

必须指出，上述的微分纠正是一级精度的微分纠正，它是把缝隙中的地表面作为一个斜平面（由缝隙两端点的高程所决定）来处理的，实际地表面并不一定是均匀的斜面，所以凡偏离于这一斜面的地面点的正射投影影像仍有由于残存的相对于此斜面的地形起伏引起的投影误差。一般这种误差在缝隙中央，若缩小缝隙长度L则有助于误差的减小，但同时必然要增加扫描的断面数，从而增加断面数据获取和扫描晒像的工作量，降低作业效率。此外，当地形起伏特别大时，将造成V_x和δ值变动过大，也可能会超出仪器可调节的范围。因此，不能将正射投影仪看成可以处理任何特大地形起伏高山地区航摄像片、制作正射像片的万能仪器。关于这类数控正射投影仪的精度将在下文中详细讨论。

§14.3 主要的数控正射投影仪介绍

下面简要介绍三种函数式光学投影的数控正射投影仪。

一、威特厂Avioplan OR—1型正射投影仪

瑞士威特厂于1976年在赫尔辛基ISP大会上推出OR—1正射投影仪，开拓了广泛使用微分纠正技术制作正射影像图的新阶段。

图14-3-1为OR—1正射投影仪全貌。它由投影晒像系统（仪器主机）、电子柜和一电传打字机终端三部分组成。

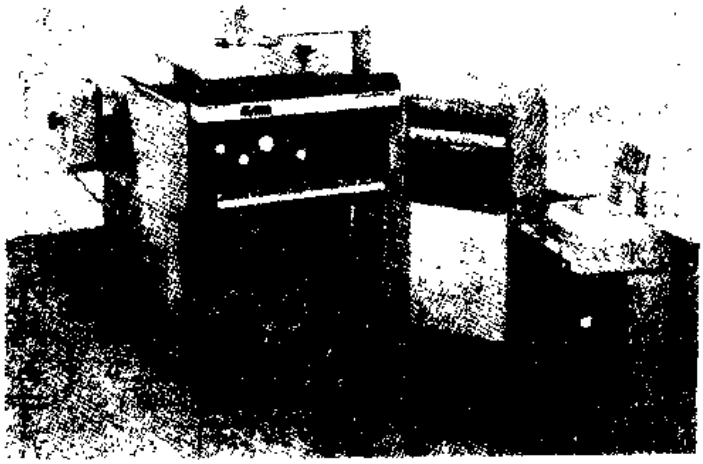


图 14-3-1

OR—1的投影晒像系统包括投影和观测光路，像片车架、照明系统、控制部件和软片滚筒。在投影光路中包含一影像旋转用的特夫（Dove）旋像棱镜和一高性能的双变倍系统：基本变倍系统和微分（地形）变倍系统。此外还有内交换式棱镜以实现影像反转，灰度光楔以实现连续的曝光控制，以及可换的缝隙遮光片完成缝隙纠正晒像。

像片车架在水平方向可移动，像幅为230mm×230mm，可放置软片或干板，对主距无限制。像片可由量测相机或非量测相机摄得，黑白或彩色正射像片均可制作。像片车架和一强功率光源均位于投影光路之上。在投影晒像系统的正前方面板上有各控制按键和目镜观察系统。软片滚筒位于仪器后部，可自由装取。

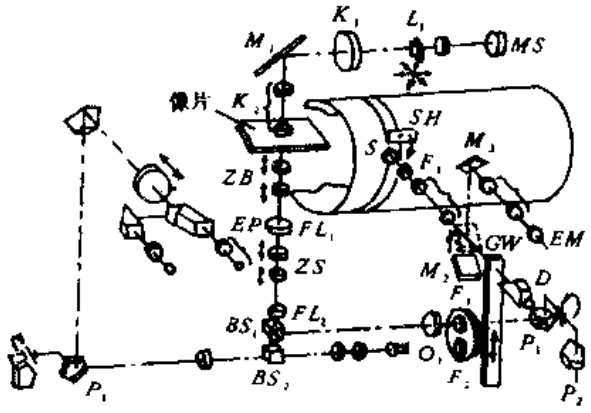


图 14-3-2

OR—1的光路系统比较复杂，如图14-3-2所示。光源L_1通过聚光系统K_1和K_2以及冷光反射镜M_1投射到像片上。光源中一小部分光线被聚焦在MS上，用于调节灯泡位置，达到归心的作用。在像片下面有两组ZOOM变倍系统：ZB和ZS。ZB是基本变倍系统，其变化范围可从0.33倍到3.0倍，用来安置相对于平均航高的基本放大率。由于光学系统中原有固定放大率2.0倍，故两者的总和才是基本放大率，可从0.66到6.0倍。例如，当像片比例尺是1:30000时欲制作10000的正射像片，则基本放大率为3倍。ZS称为地形变倍系统，它由伺服系统所控制，故又称伺服变倍系统。在扫描晒像过程中，由于地形起伏的影响，ZS的放大率须不停地变化。影像的总放大率为两个ZOOM系统放大率的乘积，它应当实时地满足由式（14-4）求出的V_x值的要求。由于地形变倍系统的变化范围从0.4到2.5倍，故OR—1仪器的总放大率为0.26至15倍。

OR—1光路中FL_1和FL_2是两个物镜。BS_1是分光镜，它将95%的光线反射到物镜O_1上，另5%的光线被透过，经一光学系统引入到目镜EP，以便在像片定向时用于目视检测。F_1和F_2是可更换的滤色片，F_1用于生产黑白正射像片，F_2用于生产彩色正射像片。P_1和P_2是可交替的棱镜，两者相差一次反射，所以OR—1可由负片或正片来生产正射像片。D表示旋像棱镜，它是由电子计算机控制，按照计算出的δ角自动旋转$\frac{\delta}{2}$，以保证像片上像元素l的投影正好落入缝隙L中。旋像棱镜有两个零位置，当改变棱镜P_1和P_2的位置时，旋像棱镜自动地旋转90°，从一个零位置转到另一个零位置，这时影像旋转180°。GW是一条灰色光楔，其密度变化从0到2.48，其位置也是由电子计算机控制的。因为曝光量是放大率的扫描速度的函数，当利用曝光表确定了灰楔的起始位置后，随着放大率和扫描速度的变化，变动光楔位置就可以自动补偿在正射像片上的曝光量。但由于OR—1的光路设计中已使放大率的变化不对正射像片上的照度产生影响，故光楔仅补偿扫描速度的影响。反光镜M_2是将光线反射到曝光表EM上，在扫描之前，用M_2插入光路，测定像片上最亮和最暗处的灰度，以确定并安置灰楔GW的起始位置。SH是快门，S是缝隙。FD是软片滚筒，作业时先在暗室中将未曝光的软片装在软片滚筒上，并装入暗匣，然后把滚筒装入正射投影仪。扫描时，滚筒作正、反向旋转，并在X方向上作步进移动（滚筒的旋转轴与仪器X方向一致）。标准的缝隙大小为5、8、12、16mm四种，宽为0.1mm（黑白片晒印）或0.3mm（晒印彩色片用）。正射像片最大尺寸为900mm×（750mm+一个扫描宽度），最大扫描速度为30mm/s。

电子柜包括电源、电气控制电路，过程计算机和离线操作用的磁带机。过程控制机为Nova4/C，CPU具有32K字节内存。为了配合控制数字伺服元件，计算机提供缓冲存贮器来存贮像点坐标并监控整个正射作业过程。

打印终端提供人与计算机的通讯连接，用来调用程序或打出信息等。

图14-3-3为OR—1正射投影仪的各种工作方式，有以下几种应用。

1.与立体测图仪直接配合使用

OR—1正射投影仪配合B8S，AG—1等制作正射影像图时，可以联机应用，也可以脱机应用。当与B8S立体测图仪连接时须装上三轴定位器（PLT）和断面扫描系统(PEB8)，使得测标台的移动服从于X，Y导轨，并自动地沿Y方向扫描。此外，在B8S的左像片盘上安置了像点坐标记录系统PBK8。联机作业时，在PEB8和PBK8两种系统共同作用下，直接地把断面扫描时的像点坐标x，y等数据输送给计算机，控制OR—1晒印正射像片。一般更多采用脱机作业，把断面扫描的像点坐标记录在磁带上，以后再由计算机控制OR—1晒印正射像片。

当与AG—1连接时，只要配上PE2断面系统和PBK11像片坐标记录系统即可。当然也可以使用威特厂解析测图仪AVIOLYT或其它类型的解析测图仪来获得像片断面数据。

如果附加方位扫描驱动器PAZ1，就可以沿着需要的任意方向扫描，而步进总是垂直于扫描方向的，于是OR—1就可以作线路带区的影像图。也可以进行双模型作业，双模型作业时，基本片总放在左像盘上，根据两个模型中至少两个公共点来确定连接方向，由PAZ1方位扫描驱动器来控制，可以得到很好的拼接。

2.应用数字高程模型的数据

地面高程可以由模拟或解析测图仪采集，也可以从现有地图上取得。此外，存贮在数据库中的数字高程模型也可以使用。

如果已知的数字地面模型不合乎OR—1作业的要求，例如是不规则的格网，或者虽是规则格网但密度不合要求，或者是由旧地图上等高线数字化而得出的，在这些情况下，可以应用奥地利维也纳工业大学为OR—1编制的专用程序，称为SORA程序(Software for off—line Roctification Jy Avioplan)，来制作正射影像图。SORA—OP（C方案）程序包括两部分：第一部分是用数学内插方法使数字地形模型加密至OR—1工作所需的密度的规则格网；第二部分是根据已知的像片外方位元素等参数，将地面点坐标换算为像点坐标，并将成果存入磁带供OR—1生产正射影像图。还有另一个SORA—OPS程序，用来生产制作立体匹配片的数据。

这种处理本身需要一架电子计算机如DG20或DG30。也可以通过PC微机来完成这项任务。如武汉测绘科技大学航测与遥感系已在PC微机上编制了类似SORA程序功能的软件，并注意到了正射影像的拼接问题。

这种离线工作方法对于机助测图系统（如PAP2系统）和机控测图系统（如BC2解析测图仪）是十分有利和经济的。此时可利用系统自身的计算机完成上述计算工作。

由于这是离线作业，为了保证像片在正射投影仪上有正确的定向，需要在数据采集时至少测定三个明显地物点作为定向点。

3.其它方面的应用

从本质上，OR—1是用计算机控制的函数式光学投影微分变换仪器。它不仅可以实现由中心投影到正射投影的变换，也可以实现其它各种投影之间的微分变换。此时只要知道这种变换的函数关系，在OR—1工作之前，用电子计算机求出变换前后两个面上点的对应关系，将要求密度的点序到坐标存入磁带，即可控制OR—1仪器的工作。这类由用户开发的应用包括非框幅式中心投影的遥感图像（SPOT图像、全景扫描图像等）的微分纠正，地图投影变换，近景特殊图像的微分纠正等。

当获得了像片断面数据和三个定向点后，在OR—1上的操作是极其简单的，它被安排成顺序的五个步骤。其中有些基本操作是由作业员完成，而大部分工作是在计算机控制下自动完成。

第0步：预先安置底片、插入所需要尺寸的缝隙，插入航摄底片，安置放大率，启动计算机，与之对话，调出数据。

第一步：底片鼓自动驱动到Y方向的零位置，测量曝光量。曝光表进入到光路中打开，将像片车架驱动到选定的位置。航片的密度在控制面板上以数字显示的方式被读出，密度值亦按对数单位在灰楔上分级，因此用心算法即可给出灰楔的基本安置值。曝光量的测定和灰楔安置往往要参照作业员经验，必要时做试条以确定，它关系到正射影像的质量。

第二步：定向。这是为了使投影装置内，像片坐标系统与断面像片数据采集时的坐标系相一致。为此，在断面数据采集时，量测三个点的像片坐标（其中有一个多余点是用于检查），将其与像片断面数据一起记入磁盘或磁带。在定向时，通过调点按键，逐次从计算

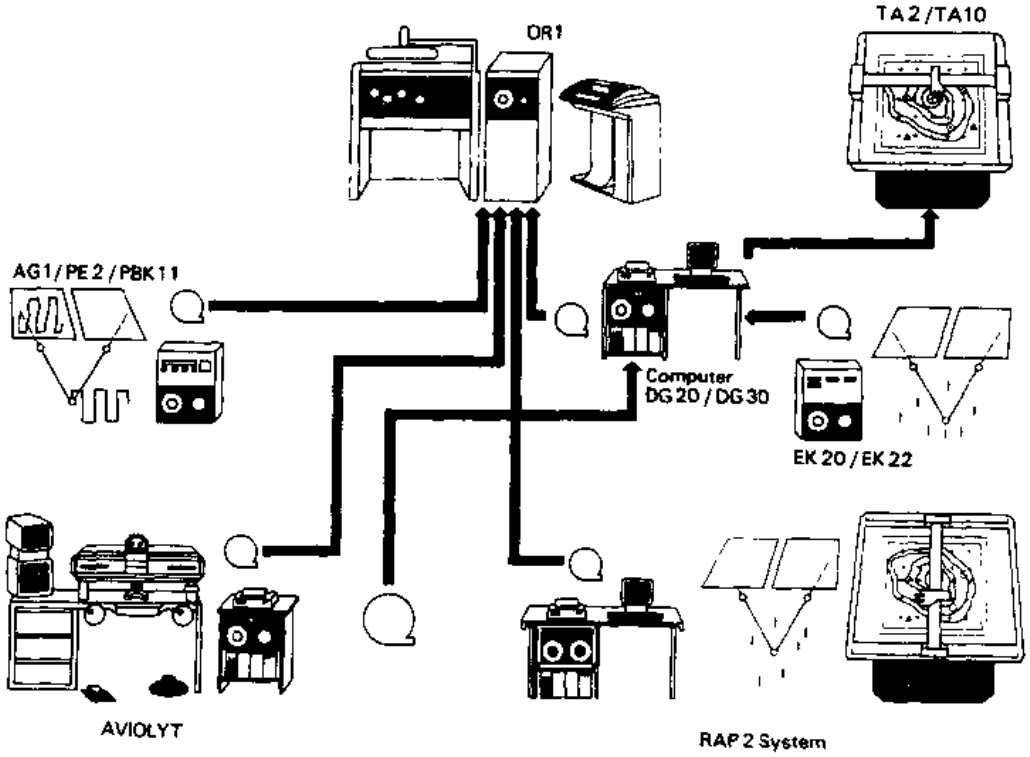


图 14-3-3

机调出三个定向点的坐标，并将像片车架自动驱动到x、y坐标所给出的位置，若光标未对在相应点上，则用ΔX，ΔY和κ来消除这些误差。作业员要确保对准两个点，然后用第三个点来检查。ΔX和ΔY位移通过控制面板上的操纵杆和变速杆来控制X和Y驱动马达实现，κ旋角则通过像片架上的控制钮手动安置。

第三步：扫描。扫描过程可以在任何时候按一下控制面板上的相应按键开始或中断。

在扫描过程中，计算机同时读出两个像片断面数据，扫描缝隙的长度取决于地形起伏，要事先选择，而宽度（即正射像片上的ΔY间距）总是固定的1 mm。计算机根据扫描数据内插到1 mm的密度，然后用公式（14-1）到（14-5）计算各扫描参数，分别传送给像片架的X和Y伺服马达，以及DOVE棱镜和地形ZOOM系统的伺服马达，通过软片鼓的Y伺服数字化器所产生的脉冲信号获得所有的同步运动。

当到达扫描线的末端时软片鼓的步进会自动地产生，自动进入相邻的扫描带。与此同时，断面3的数据读入计算机代替断面1的数据，并重复前一扫描带同样的晒像过程，直至计算机接收到文件结束标志（EOF）。

第四步：扫描结束后，底片鼓自动回到X方向的零位置。

每一步都在控制面板的数字显示屏上显示，并有安全保险装置在系统中，以防止错误的操作。例如在第一步结束后，若光路中的曝光表未打开，则不可能进到第二步。

记录在磁带上的OR—1使用的数据以纯二进制的ASC Ⅱ或EBC DIC码存贮。数据被写入长度不一定相同的单元里，对一个扫描带只需一个区块（Block），两个扫描带之间有

一记录间隔（IRG）。一个模型的数据被存在磁带内的一个文件中，文件结束标志（EOF）被作为数据结束来识别。

在文件的第一个块中仅有九个“有用的”数据项，其顺序是：

—— 一个8位数字标识码；

—— 正射像片的扫描长度（以毫米为单位）；

—— 正射像片的扫描速度（以毫米/秒为单位）；

—— 三个定向点的坐标X_1，Y_1，X_2，Y_2，X_3 Y_3。

以后则是扫描数据，即一个x、y坐标序列。

脱机作业时生产一张正射像片所需的总时间包括准备工作花的时间和在OR—1上操作和完成扫描和晒像花的时间。它取决于扫描长度、扫描宽度、扫描带数、扫描速度、放大倍数等，而这其中许多因素又随地形起伏大小不同而变化。其中大约有20分钟固定的时间用于装卸底片、插入航空负片、安置基本放大率，调入数据，测定曝光量、定向和卸下底片鼓。

可以参考厂方大量试验后提供的数据作为参照：

扫描长度　720mm

总宽度　712mm

扫描带宽　8mm

扫描速度　30mm/s

总放大率　3倍

扫描带数　$\frac{712}{8}=89$

扫描时间　$\frac{720}{30}\times\frac{89}{60}=36\,min$

总时间　$20+36=56\,min$

二、欧波同厂Orthocomp Z—2型解析正射投影仪

联邦德国欧波同厂于1980年制造了解析正射投影仪Z—2，图14-3-4为其全貌图。

该仪器首次展出是在1980年德国汉堡召开的第14届国际摄影测量大会上。从图14-3-4看出，Z—2的硬件包括投影设备、控制部件和电子计算机系统。投影设备与OR—1在原理和结构上是相似的，它也带有观察系统和操作面板。在操作面板上有程序按键、操纵杆和选择开关（图14-3-5），给作业带来方便。控制部件包含三个向内移动的电路模块板，实现伺服控制，并与主机进行数据通讯。电子计算机为HP1000 A系列机，过去用HP1000 F处理机，现在多选用A900处理机，其功能要比OR—1的NOVA机强。计算机带有CRT显示终端、磁带机和打印机。

Z—2的投影设备由像片车架、软片滚筒，扫描车架和光学系统等组成。像片车架通过两根丝杆在x和y方向上驱动像片盘移动。承片盘的尺寸为$24\times24\,cm^2$。软片滚筒长为1085mm，直径为420mm。软片固定放置在软片滚筒上，滚筒的旋转速度分为每秒5，10，

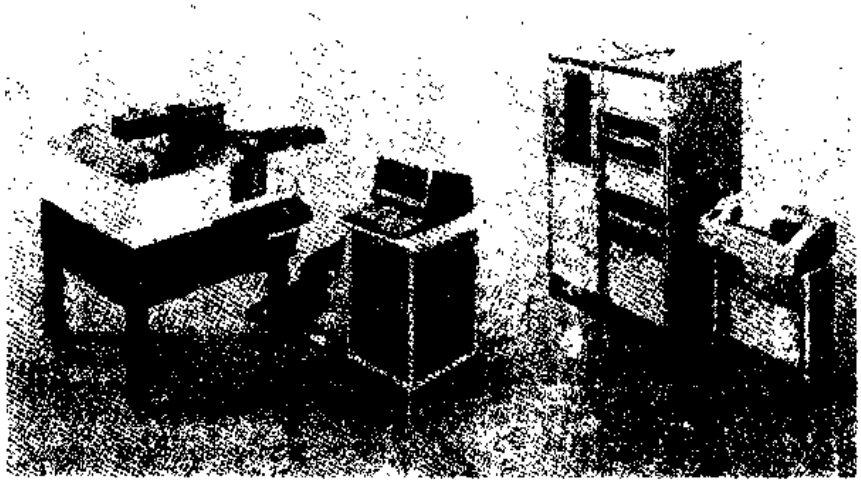


图 14-3-4

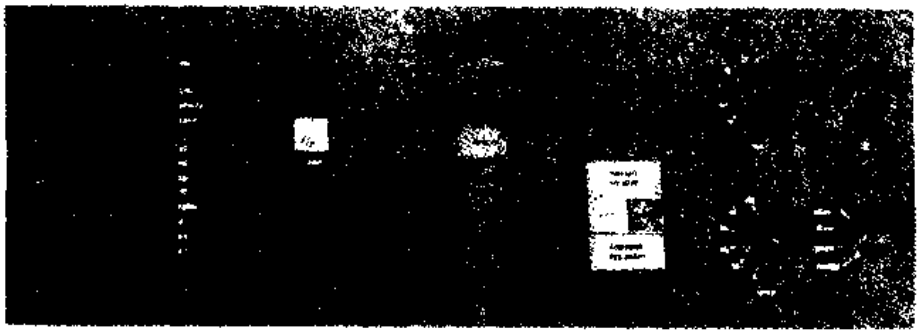


图 14-3-5

20，30，40和50mm等六档，并可任意选择。扫描车架上安有一缝隙盘，盘上刻有宽度为0.2mm，长度分别为2，4，8，16mm的缝隙（标准缝隙），通过丝杆转动使缝隙盘随扫描车作X方向的步进。

Z—2的光学系统与OR—1相仿，但也有些微小区别（见图14-3-6）。

作业员通过观察目镜可以得到放大5倍的影像，并可通过分光棱镜直接观察缝隙面上的影像，测标直径为0.04mm。ZOOM透镜系统提供0.4到12倍之间30种连续变化的放大倍率，没有像OR—1那样，区分为基本变倍系统和地形变倍系统。Z—2的ZOOM系统由4个固定透镜组和3个透镜组组成。其中3个透镜组安装在单独的透镜车架上，并可对固定透镜组作相对的移动，其移位值与放大率的关系近似于对数关系，以保证不同放大倍率时正射影像的清晰。由平面镜或两次反射镜组成的光学转向系统（即图中影像翻转系统）以适应透明正片和负片的不同情况。除此以外，还有照明光学系统。它由两个可动的光学元件等组成，其作用是在连续改变放大率的情况下，保证24V/150W的卤素灯泡的灯丝始终射入出射光瞳，以保证位于软片滚筒上的软片获得最高的照度，即使软片感光度很低，也能以每秒50mm的速度进行曝光。由于出射光瞳的位置和大小是固定的，所以软片的照明与放大率无关。光路中的灰色光楔位于出射光瞳附近，可以转动，以保证正射像片的照度不受软片感光度、影像的平均密度以及滚筒Y方向旋转速度的影响。

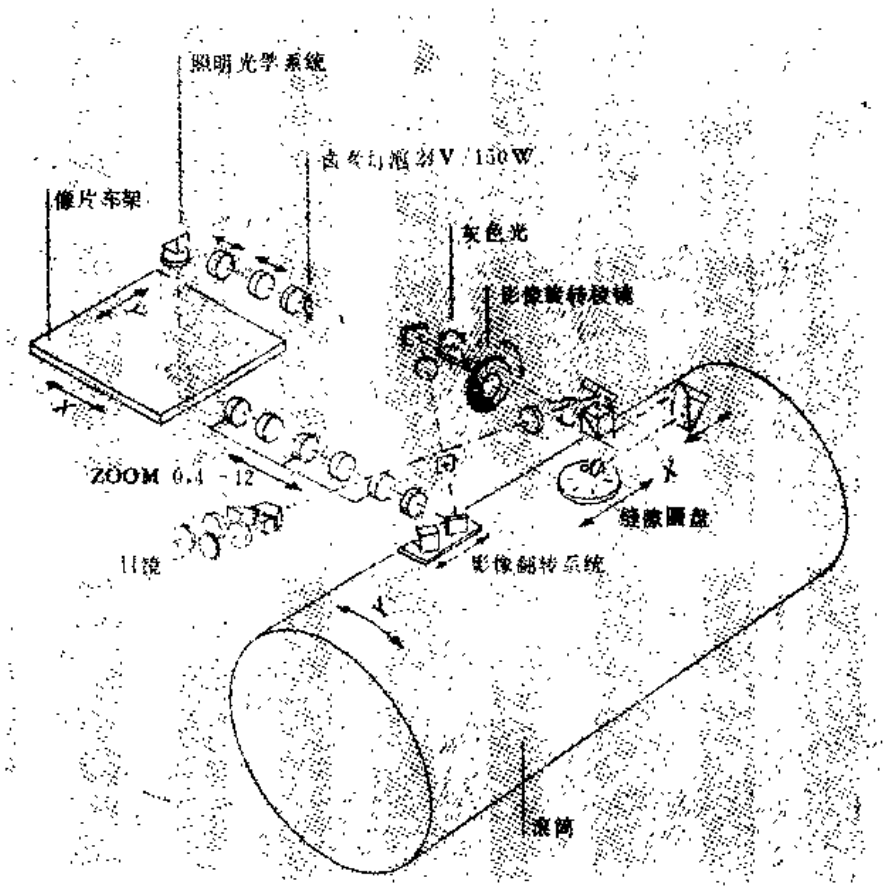


图 14-3-6

Z—2的控制部件是以三个抽屉组件装配在柜子里的电子设备，它包括数字化器，与主计算机产生数据转换的逻辑模块和用于投影晒像系统内伺服驱动装置的放大器。

计算机所控制的滚筒(Y方向)、扫描车架(X方向)，像片车架 (x、y方向)，以及ZOOM系统车架，DOVE棱镜和照明光学系统的两个透镜组位置共8个伺服驱动装置全部按照Planicomp C—100解析测图仪的相同原理进行控制。电机驱动丝杆转动，丝杆直接与脉冲发生器连接，驱动位置由脉冲发生器得到。脉冲发生器对于像片车架和扫描车架的分辨力是1μm，对滚筒车架是2.5μm，对ZOOM透镜车架和照明系统是8μm。对于DOVE棱镜是0.25 mrad (毫弧度)。

位于投影仪双目镜观察系统下面的控制面板共有六个程序键 (图14-3-5)，分别用来启动参数输入、定向、密度量测、正射投影扫描、注记晒印和列表打印等六个标准程序。CONTINUE和REPEAT按键用于控制程序的执行。三个旋钮分别用来调整照度 (即灰色光楔位置)、扫描宽度和软片滚筒移动速度。在定向和密度量测时，具有非线性特性的操纵杆可以控制像片车架的精确位置，所量测的密度可以数字显示在控制面板上。

六个标准程序的功能是：

(1) 参数程序(PARAMETER)：用于输入微分纠正的主要数据和存入数据 (如控制点数据、摄影机检定主距，正射像片晒印范围的图角位置等等)。通过荧光屏上显示的程

序来指导作业员操作，确认目前要纠正的数据。也可以将事先存贮在磁带上的有关控制点和纵断面数据读出。

（2）定向程序（ORIENT）：此程序用于像片的内定向和外部定向。用于内定向至少要有两个框标，用于外部定向至少要有三个平高控制点，最多可以达到10个平高控制点。根据控制点的地面坐标和像片坐标算出像片的外方位元素。该程序在OR—1上是没有的，这是因为OR-1直接从像片断面数据出发，不需要利用像片外方位元素，而在Z—2上，输入数据可为数字地面模型，即地形断面数据，它需要用外方位元素代入共线方程求出像片断面数据。

（3）密度测定程序（DENSITY）：此程序用于量测像片上一些具有代表性的特征点的光学密度。量测时用操纵杆来实现点的照准。光学密度由一两位数的数字显示器上读出，按一下RETURN键，显示的密度值就输入到计算机中。当所有特征点的光学密度量测完毕后，在计算机屏幕上显示所有量测值的最大值、最小值和平均值。

（4）扫描程序（SCAN）：对生产正射像片来说，这个程序的扫描方式进行投影晒像。软片的投影晒像范围根据图廓点所确定。正射投影过程是一级割线方式的微分纠正。从原理上讲各扫描带之间的拼接应十分密合，但由于机械和电子设备时间常数误差等原因，在超出扫描带末端5 mm的范围时，其拼接精度仍在0.1 mm之内。扫描器步进的精度可以保证扫描带重叠或裂缝在3μm以下。

（5）晒印注记程序（PRINT）：此程序用于将字母数字符号和制图符号投影到正射像片上。通过放在像片车架上的投影字模来产生这些符号。例如图廓点或控制点可以标记在正射像片上，片名标在像片边缘，地名或图幅名也可投影在正射像片上。符号的角方位是任意选择的，大小可以在1～7 mm之间选择。但是厂方不提供汉字注记。

（6）列表程序（LIST）：此程序用作列表打印输出，例如作业员姓名、任务的详细内容，纠正像片的号码、定向用的控制点及平差后的残差，投影晒像的扫描速度，缝隙宽度以及晒像的延续时间等等。

与OR—1相比，Z—2的特点是输入的控制数据是地面数据（或模型数据），包括控制点坐标和地面断面（或模型断面），而不直接是像片断面数据。也就是说，Z—2可以直接从地面数据出发进行正射投影晒像，DEM的间隔与缝隙宽度可以不等，同一数据可以进行不同缝隙宽度的微分纠正。此时从地面断面到像片断面的解算是在Z—2上完成的。为此所需要的外方位元素可在Z—2上通过定向及空间后方交会解算出来。图14·3-7为Z—2解析正射投影仪的作业原理示意图。

图中的“地面系统”是指在地面坐标系中的控制点、图廓点、特征点，在Z—2中称为控制数据。“数据系统”指的是地形断面，它可以是在地面坐标系中，也可以是在摄测坐标系中。若不一致时，可利用控制点进行空间相似变换而统一。断面系统是指数据断面的Y方向与地面系统（亦即正射底片系统）Y方向相一致时的断面数据。“模型系统”是在模型坐标系下的断面数据，其X方向为航线方向。如果在数据采集中提供的是相对和绝对定向元素，则需经过“模型系统”的过渡。如果直接由空间后交求出外方位元素，则可跳过这个“模型系统”。可以简要地归纳出Z—2上进行微分纠正的作业程序：

第一步：输入地面数据；

第二步：将作业范围内的采集的高程断面数据变换为地面坐标；

第三步：建立一个断面方向与Y轴一致，断面间隔等于缝隙宽度的数字地面模型；

第四步：利用像片方位元素，获得像片断面数据；

第五步：实时地按一级割线微分纠正原理计算像片平移、ZOOM系统放大率变化及影像旋转值，传给相应伺服机构，并同时控制滚筒Y方向的转动和扫描车架（缝隙）X方向的步进，进行逐带扫描晒像，得到所需要的正射像片。

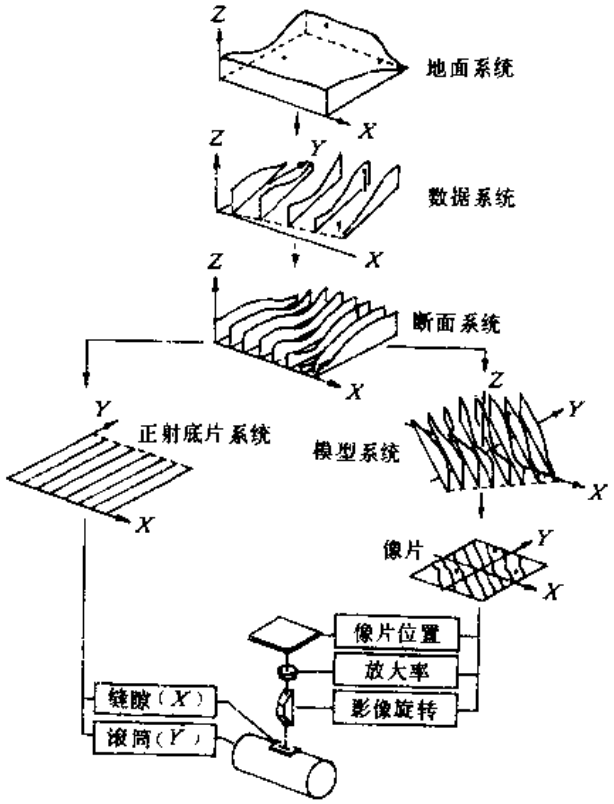


图 14-3-7

由以上叙述可知，Z—2上的前四步作业在OR—1上是不需要进行的。为了完成这些工作，Z—2不能选用像OR—1那样简单的过程计算机，而必须选用性能好的微机，如HP1000A，A900处理机，这样做使仪器价格升高，当然也带来了许多灵活性。

三、国产ZS—1数控正射投影仪

国家测绘局测绘科学研究所以刘先琳为首的数控正射投影仪组于1985年研制和随后陆续生产了ZS—1数控正射投影仪。

该仪器的原理与OR—1完全相同，它接受的输入数据直接为像片断面数据，因此在仪器上的实时计算和伺服驱动也与OR—1相同。与之相配套，还生产了基于立体坐标量测仪的像片坐标数字化器（见上文§13.7一节），用来采集和计算断面数据。

图14-3-8为ZS—1正射投影仪全貌。其光机部分主要由光源、像片车架、ZOOM变倍系统、DOVE旋像棱镜、基本放大透镜组、晒像鼓以及支持这些部件的机架箱体等组成。

ZS—1的光学机械结构如图14-3-9所示。像片可以沿着x、y方向运动240mm，并可在自身平面内作κ旋转。12V、100W卤素灯聚光在像平面上，经过ZOOM系统可获得0.6～4.8倍的变倍，再经过一组2.5倍的基本放大透镜，旋像棱镜等光学系统成像在缝隙平面上。晒像鼓旋转时缝隙紧贴着感光材料（0.2～0.35mm）运动并曝光形成影像。一个扫描带曝光结束后，该鼓沿X方向移动转入下一带晒像，直至全部曝光结束。

ZS—1采用一台INTEL8086微处理器为CPU，内存48KB(RAM16KB,ROM32KB)，每秒运算速度50万次以上的TP—86A单板机完成计算和控制任务。在TP—86A上的程序

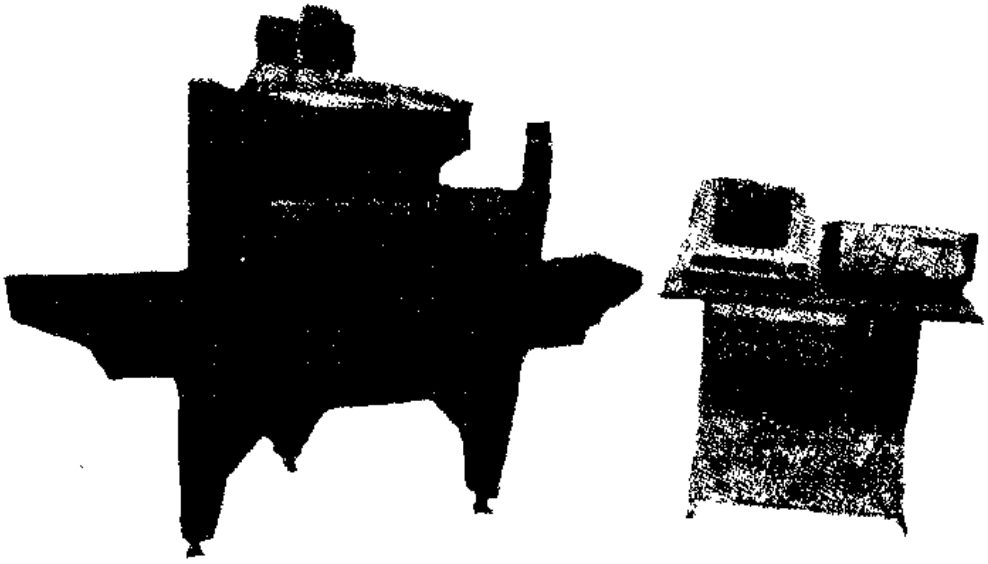


图 14 3-8

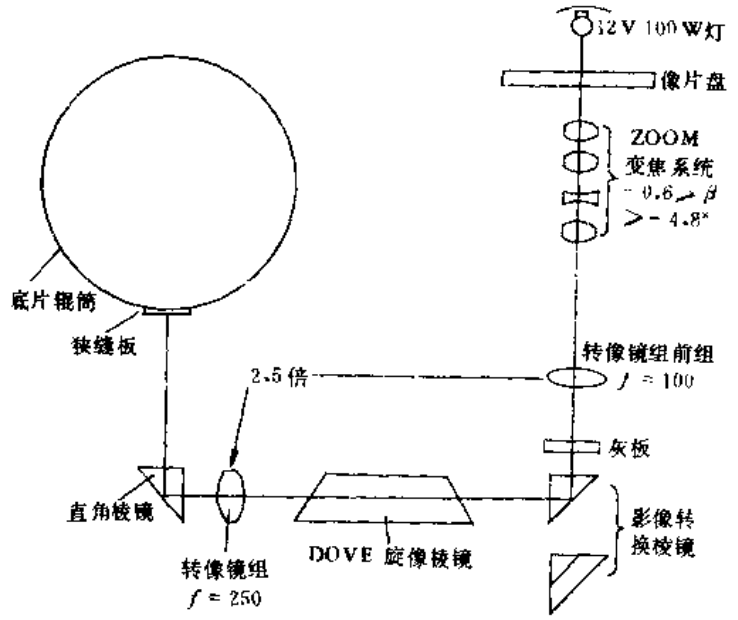


图 14-3-9

全部用INTEL 8086的机器语言编写，具有较高的运算能力。

§14.4 微分纠正的正射像片精度与质量控制

本节主要叙述目前通用的一级割线方式微分纠正所获得正射像片的几何精度和影像质量，以及检查正射像片精度实现质量控制的方法。

一、影响微分纠正所得正射像片精度的因素

从理论上讲只有逐点进行微分纠正才能保证不产生几何误差，而这实际上是不可能做到的。对于OR—1和Z—2这类一级割线方式的微分纠正，到底有哪些几何误差？其影响有多大呢？我们做具体的分析和讨论。

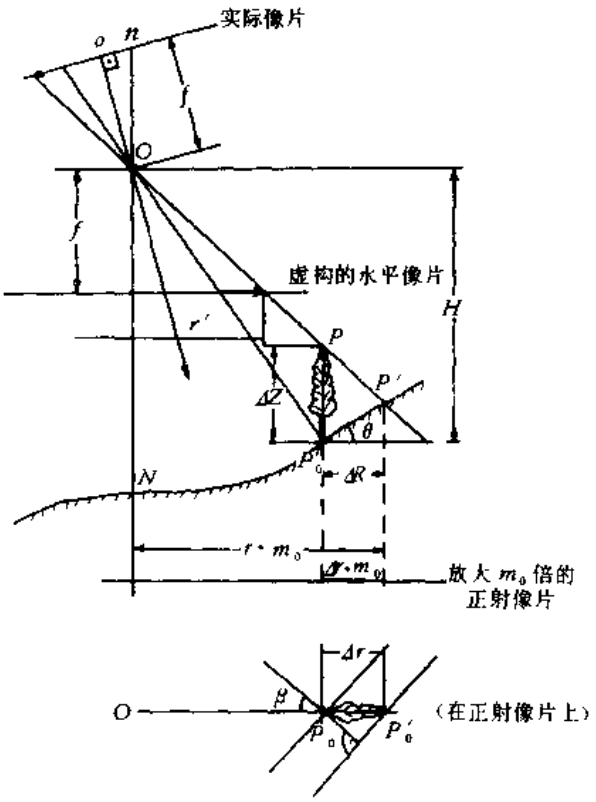


图 14-4-1

（一）DEM数据采集中忽略的地形碎部高差对正射像片精度的影响

通常在DEM数据采集时是沿地表面进行，具有一定高度的地形碎部，如树木和建筑物等，往往被忽略而不加考虑。于是在正射像片上将产生位移。譬如一个烟囱的正射影像将不是一个圆点，而成为一段线段。图14-4-1中绘出由于树高ΔZ而引起的正射影像位移。此时树顶P点的正射影像不在P_0处，而与P'点的正射影像相重合。理由是P和P'两点在航摄像片上构像在一起，即有相同的x、y像点坐标。

假设它在正射像片上产生的位移为Δr，在实地的正射投影误差为ΔR，正射像片比例尺分母为m_0，则从图14-4-1中的几何关系可以写出：

$$\Delta r \cdot m_0 = \Delta R = \frac{r'}{f}\Delta Z \quad \frac{r'}{f}\Delta R\tan\theta$$

从中导出：

$$\Delta R = \frac{\Delta Z}{\frac{f}{r'} + \tan\theta}$$

还应考虑到辐射方向OP_0与地面最大倾斜方向之间有夹角β。若设地面最大坡度为$\tan\alpha$，则由图14-4-1可知：

$$\tan\theta = \tan\alpha \cdot \cos\beta$$

于是可得投影位移公式：

$$\Delta R = \frac{\Delta Z}{\frac{f}{r'} + \tan\alpha \cdot \cos\beta} \tag{14-6}$$

其中，当$\alpha > 0$和$\alpha < 0$分别表示地面倾斜方向向内和向外。

在正射像片上则有

$$\Delta r = \frac{\Delta Z / m_0}{\frac{f}{r'} + \tan\alpha \cdot \cos\beta} \tag{14-7}$$

分析式（14-7）可知，在城市中为了减少高层建筑对正射像片的影响，主要靠增大 f 和减小 r'，而在城市中一般 $\alpha \approx 0$。这意味着应当选用长焦距摄影像片来制作正射影像。减小 r' 的方法是将立体像对分为左、右两部分，分别用左片和右片来制作正射影像。

（二）线性内插线元素中点的误差

缝隙两端点像片坐标的平均值，即可求出线段中点 m 的位置。它的正射投影是否与正射影像上对应中点 M 重合在一起呢？

图14-4-2绘出其基本关系。

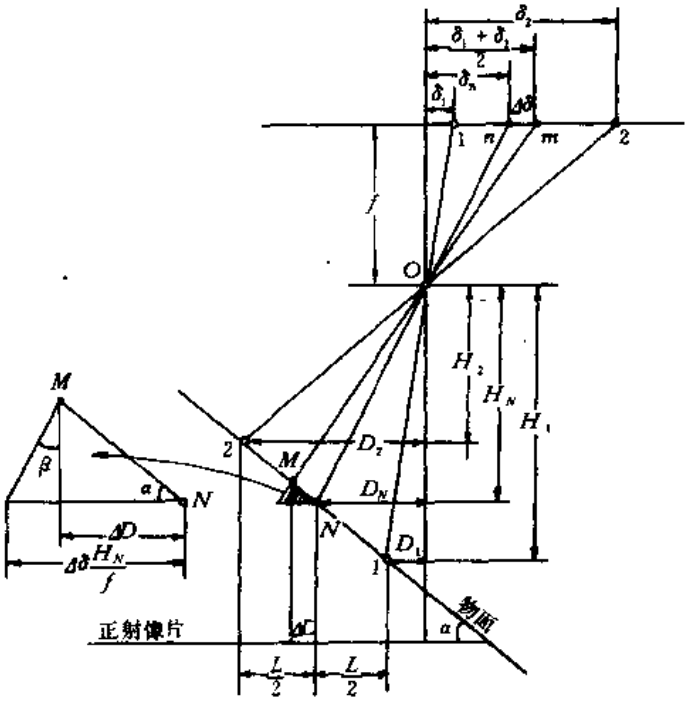


图 14-4-2

设地面线元素 $\overline{12}$ 的中点为 N，其对应的像点为 n。而线元素在像片上的构像为12，其中点为 m，m 点投影到地面得点 M。一般情况下，m 与 n 不重合，M 与 N 也就不重合，于是将在正射像片上产生位置误差 ΔD。由图14-4-2的几何关系可以求出：

$$\delta_n = \frac{f}{H_N} D_N$$

$$\delta_m = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{f}{2}\left(\frac{D_2}{H_2} + \frac{D_1}{H_1}\right)$$

$$= \frac{f}{2}\left(\frac{D_2}{H_N - \frac{L}{2}\tan\alpha} + \frac{D_1}{H_N + \frac{L}{2}\tan\alpha}\right)$$

$$\approx \frac{f}{H_N}\left(D_N + \frac{L^2}{4H_N}\tan\alpha\right)$$

所以
$$\Delta\delta = \delta_m - \delta_n = \frac{f}{H_N}\left(\frac{L^2}{4H_N}\tan\alpha\right)$$

显然
$$\Delta D \leqslant \Delta\delta \cdot \frac{H_N}{f} = \frac{L^2}{4H_N}\tan\alpha \tag{14-8}$$

式中：$H_N = H/m_0$（化为毫米为单位）

于是，可以反求使ΔD小于规定限差时的最大允许缝隙长度$L_{允}$：

$$\boxed{L_{允} \leqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{\Delta D \cdot H}{m_0 \tan\alpha}}} \tag{14-9}$$

譬如，制作1∶10000正射像片，$H = 5000\,m$，$\Delta D = 0.1\,mm$，$\alpha = 36°$，则：

$$L_{允} \leqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \times 5000 \times 10^3}{10000 \cdot \tan 36°}} = 16.5\,mm$$

目前几种常用的正射投影仪最大缝隙长度为16 mm，因此，当地面坡度小于36°时，这项误差可以不加考虑。

（三）数据采集时高程量测误差的影响

数据采集时量测高程必然有误差dZ，该值取决于仪器误差、原始像片误差，模型定向和对点读数误差等，一般以航高的千分之几来表示。在发达国家，最大误差$dZ = 3 \times 0.15‰H$。为了求出它对正射像片精度的影响，可将它视为被忽略的地形碎部，代入式（14-7）中求出Δr值。譬如，以1∶m = 1∶30000，1∶m_0 = 1∶10000为例，设$\tan\alpha = 0.1$，$\beta = 45°$，$r' = 140\,mm$，对于宽角和常角摄影有表14-4-1的结果。

高程量测误差对正射像片精度的影响　　表 14-4-1

摄影机主距	f= 150 mm	f= 300 mm	数据采集 f= 150 mm 晒像 f= 300 mm
dZ	2.0 mm	4.0 mm	2.0 mm
Δr	0.17 mm	0.18 mm	0.09 mm

从表中看出，当数据采集和晒像用同样的摄影资料时，正射像片的精度与摄影机类型基本无关。但是，若用宽角像片采集高程数据，然后再用常角摄影像片制作正射像片，则精度将提高一倍。在正射像片图更新时，可以利用原来宽角摄影得到的DEM数据，而选用常角摄影获得新的航片资料，从而改善正射像片的精度。

在山区制作正射像片时，由于高程量测误差的增大和地面坡度的增大，这项误差也可能会很大。如果宽角摄影时，$dZ = 5.0\,m$，则$\Delta r = 0.42\,mm$（$\tan\alpha = 0.1$，$\beta = 45°$）或甚至

$\Delta r = 1.37\,mm$（$\tan\alpha = -1$，$\beta = 45^{\circ}$）。因此，在山区制作正射影像时，必须保证高程量测的高精度。目前，有些生产单位在山区制作正射像片采集高程数据时，测标未严格切准地表面，而是测标不上山头，不下谷底，企图以此平滑地形，来解决地形变倍系统的频繁变化。这实质上是严重损失了正射像片的精度。而且由于采用割线方式微分纠正，这种误差不可能在缝隙扫描带影像拼接处暴露，所以不易被检查员发现。

还必须指出，这种误差并不会随着缝隙长度L的变小而减小。从这个意义上讲，正射投影仪并不是万能的、适应任意大起伏地区的微分纠正仪器。

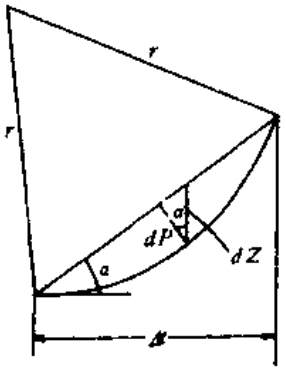


图 14-4-3

（四）连续变化地形的离线采样与线性内插的误差

这项误差可以概括为采样间隔内曲线视为直线段的误差。为了讨论的方便，假设两个样点之间的曲线用半径为r的圆弧表示，则由数学公式并参考图14-4-3可求出：

$$dP = -\frac{\Delta t^2}{8r\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{dZ = \frac{dP}{\cos\alpha} = \frac{\Delta t^2}{8r\cos^3\alpha}} \qquad (14-10)$$

若设$\Delta t = L = 5\,mm$，$r = 15\,mm$，$\alpha = 31.5^{\circ}$，则

$$dZ = \frac{5^2}{8\times 15\times(0.853)^3} = 0.34\,mm$$

相应地，在正射像片上的平面位置误差（$f = 150$，$r' = 100\,mm$时）：

$$dr = \frac{0.34}{150/100 - 0.613} = 0.38\,mm$$

这意味着DEM按5 mm间隔采集、且按5 mm缝隙晒像，将可能达到如此大的误差。这显然是一项主要的误差源。增加DEM采样点的密度和缩小晒像缝隙将会使这项误差减小。

二、地面坡度所产生的正射影像模糊

下面以OR—1为例，讨论正射像片的影像质量。

OR—1仪器的光学系统质量是好的，设计的分辨率参数是（单位为每毫米内的线对数）：

放大率	负片的分辨率	正射像片的分辨率
0.27	10.7	40
0.69	27.8	40
1.00	40	40
2.00	60	>30

5.76	60	>10.4
15	60	>4

比上述静态系统分辨率更重要的是在地形ZOOM系统放大率变化和影像旋角不为零时（即有地面坡度）动态操作下的分辨率和影像质量。

OR—1正射投影仪存在着因地面坡度而引起的影像模糊。现在我们来分析产生影像模糊的原因。

大家知道，在OR—1上，因地面横向坡度β_X引起的X方向的影像旋角θ_X改正和比例尺（放大倍率）改正V_X是分别通过光学系统的DOVE棱镜和ZOOM系统自动实现的。而在缝隙宽度D内，地面纵向坡度β_Y引起的Y方向的影像旋角θ_Y和放大变倍V_Y的变化并无专门改正机构，而只是靠不断移动像片上线元素中点坐标，使其投影始终位于平行于Y轴的直线上。当$\theta_X=\theta_Y$和$V_X=V_Y$时，在上述控制系统下不会产生影像模糊。但当$\theta_X\neq\theta_Y$和$V_X\neq V_Y$时，在缝隙宽度D边缘处的影像将不是一个点，而是一微小线段Δ，其在X方向成为ΔX，在Y方向成为ΔY，从而产生影像模糊。下面来推导其值的大小。

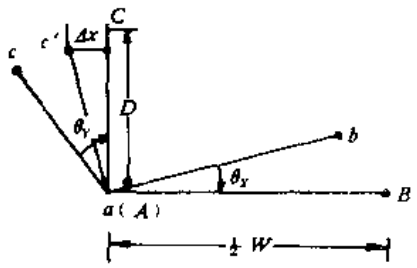


图 14 4-4

图14 4-4表示地面坡度产生的影像位移，图中W和D分别表示缝隙的长度和宽度，a,(A)为缝隙中心点在像片和正射像片上的位置，AB、AC表示正射影像，ab、ac表示像片影像。从图中看出，若$\theta_Y\neq\theta_X$，$V_Y=V_X$，缝隙D边缘的影像在X方向形成微小线段ΔX，且有：

$$\Delta X = D\mathrm{tg}(\theta_Y-\theta_X) \tag{14-11}$$

若$V_Y\neq V_X$，缝隙宽度D边缘的影像还将产生Y方向的微小线段ΔY，经推导可求得：

$$\Delta Y = D\left(\frac{V_Y}{V_X\cos(\theta_Y-\theta_X)}-1\right) \tag{14-12}$$

根据中心透视成像关系，假设像片倾角近似为零，可以导出V_X、V_Y和Q_X、Q_Y与地面坡度β_X和β_Y的关系来：

$$\tan\theta_X=\frac{y\tan\beta_X}{f-x\tan\beta_X} \tag{14-13}$$

$$\tan\theta_Y=\frac{x\tan\beta_Y}{f+y\tan\beta_Y} \tag{14-14}$$

及

$$V_X=\frac{H_d}{f}\cdot\frac{f\cos\theta_X}{f+x\tan\beta_X} \tag{14-15}$$

$$V_Y=\frac{H_d}{f}\cdot\frac{f\cos\theta_Y}{f-y\tan\beta_Y} \tag{14-16}$$

上列公式可根据基础摄影测量中像片解析原理推出，其中像片取负片位置。

根据（14-15）式可将放大倍率表示为：

$$\left.\begin{aligned} V_X &= V_Z^0 、 V_Z \\ V_Z^0 &= \frac{H_d}{f} \\ V_Z &= \frac{f\cos\theta_X}{f + x\tan\beta_X} \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}17)$$

式中V_Z^0为基本ZOOM放大倍率，V_Z为地形ZOOM放大倍率。

由（14-16）式则可得到：

$$\left.\begin{aligned} V_Y &= V_S^0 、 V_S \\ V_S^0 &= \frac{H_d}{f} \\ V_S &= \frac{f\cos\theta_Y}{f + y\tan\beta_Y} \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}18)$$

式中，V_S^0可以看作正射软片对航摄像片运动的基本速度比，V_S可看作它们的附加速度比。

将（14-17）和（14-18）的结果代入（14-12）式中，

$$\Delta Y = D\left(\frac{V_S}{V_Z\cos(\theta_Y - \theta_X)} - 1\right) \qquad (14\text{-}12a)$$

显然，坡度引起的影像模糊与基本比例尺无关。若缝隙宽度一定（如0.1mm和0.3mm），在像片边缘影像模糊大小主要取决于地形放大倍率V_Z和影像旋角θ_X，取决于X和Y方向的坡度差别。D、Hobbie博士在一份报告中指出，可取

$$-85^\circ \leqslant \theta_X \leqslant 85^\circ$$

$$0.4 \leqslant V_Z \leqslant 2.5$$

作为OR—1的实用界限。

三、检查正射像片精度的方法与质量控制

从以上介绍与分析知，尽管采用一级割线方法微分纠正可以不产生扫描带之间影像的重叠、遗漏和变形，但这并不意味着正射像片就完全达到了规范所要求的精度。正射像片的生产中仍需进行精度检查和进行质量控制。

可以采用以下几种方法来检验正射像片的精度：

（1）野外检测：用于检查正射像片的绝对精度，一般用于试验研究和仪器初次投产使用。

（2）立体测图仪检测：用同样的摄影资料和控制数据，在解析测图仪或精密立体测图仪上进行立体量测，将正射像片图在绘图桌上定向，照准若干明显地物点，即可发现其位置是否与正射影像图位置一致。

（3）与等高线图或线划地图套合后进行目视检查。

（4）对每个立体像对分别由左片和由右片出发晒印出同一地区的两张正射像片，然后量测两片上同名点的视差进行检查。当没有上述误差，且该点为地表点时，其视差应为

零。如视差超出规定数值，则需对数据采集至晒像全过程进行检查，找出问题所在，进行返工。

所制作的两张正射像片也不浪费。如果两片各取一半镶嵌成一张正射像片，其精度和影像质量都会有提高。

至于正射像片的影像质量一般均采用目视检查，使其有合适的反差，均匀的色调。

正射像片制成影像图时同样存在接边问题。如果DEM数据事先已接好边，则正射影像接边问题比较简单。此外航向间接边容易、旁向间接边较为麻烦。为此，从效率和质量两方面考虑，一张像片一幅图的原则对制作正射像片是至关重要的。对于小比例尺作业，则应妥善解决接边问题。通常是首先将DEM接边，形成整区统一的数字高程模型。

§14.5 立体正射像片对的制作

一、基本思想

正射像片既有正确的平面位置，又保持着丰富的影像信息，这是它的优点。但是，它的缺点是不包含第三维信息。利用印刷或复印技术将等高线套合到正射像片上，也只能部分地克服这个缺点，它不可能取代人们在立体观察中获得的直观立体感。立体观察尤其便于对像片内容进行判读和解译，为此目的，人们可以为正射像片制作出一张所谓的立体匹配片。正射像片和相应的立体匹配片共同称为立体正射像片对。

第一套立体正射像片在1968年由T.Blachut和S.Collins制成。1976年Kraus教授首先提出利用现代的数控微分纠正仪制作立体匹配片。

立体正射像片的基本原理可概略地示于图14-5-1中。其基础是一个XY方形格网点的Z坐标构成的DEM（数字高程模型），在本节讨论中的X、Y、Z坐标已按正射像片比例尺$1:m_0$加以缩小。在上文中已指出，为了获得正射像片，必须将格网点的X、Y、Z坐标用中心投影共线方程变换到像片上去，以获得供微分纠正用的像片断面数据（不规则的xy格网）。这就是图14-5-1中左半边绘出的情况。

如果要获得立体效应，就需要按实地高差情况，引入一个具有人工视差的匹配片。该人工视差的大小反映实地的地形起伏情况。最简单的方法是利用投射角为α的平行光线法，如图14-5-1中右半部所示。此时，人造左右视差将直接反映实地高差的变化，这可以用图14-5-2作进一步阐述。

以图14-5-2中地面上P点为例，它相对于投影面的高差为ΔZ，该点的正射投影为P_0，该点的斜平行投影为P_1。正射投影得到正射像片，斜平行投影得到立体匹配片。立体观测得到左右视差$\Delta P = P_1 P_0$，显然有：

$$\Delta P = \Delta Z \tan\alpha = k \cdot \Delta Z \tag{14-19}$$

由于斜平行投影方向平行于XZ面，所以正射像片和立体匹配片的同名点坐标仅有左右视差，而没有上下视差，这就满足了立体观测的先决条件，从而构成了理想的立体正射像片对。在这样的像对上进行立体量测，既可以保证点的正确平面位置，又可方便地解求

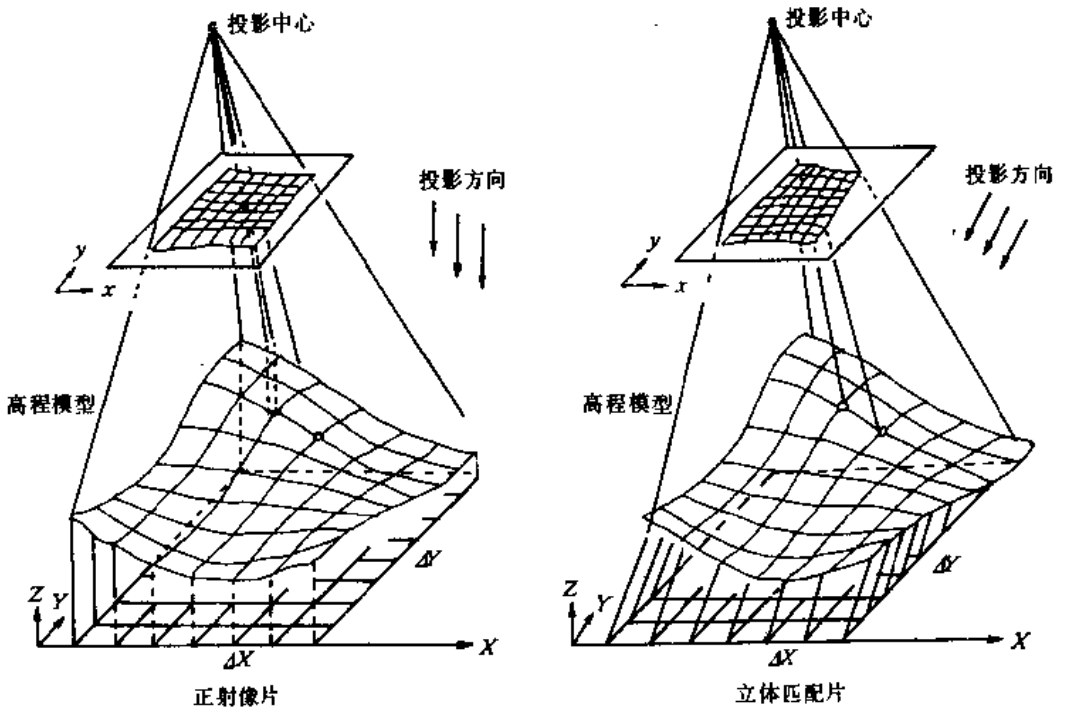


图 14-5-1

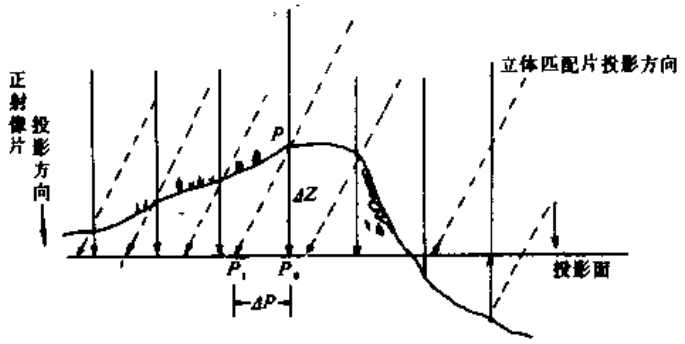


图 14-5-2

出点的高程。

二、制作立体正射像片的方法和步骤（斜平行投影法）

从以上叙述可知，如果想要用同一数字高程模型数据在数控微分纠正仪上制作立体正射像片对，必须包括以下步骤。

第一步：按XY平面上一定间隔（间隔等于缝隙长度）的方形格网，将它正射投影到数字高程模型上，获得X_i，Y_i，Z_i坐标，再由共线方程求出对应像点在左片上的坐标x_i，y_i，用此像片断面数据可在正射投影仪上制作正射像片。当然像片断面数据也可以直接在解析或机助测图系统上采集，但必须同时记录下数字高程模型，即地形断面数据。

第二步：由XY平面上同样的方格网，沿斜平行投影方向将格网点平行投影到数字高

程模型表面，该投影方向平行于XZ面。如果按照（14-19）式投影，则该投影线与DEM表面交点坐标$\overline{X}_i$，$\overline{Y}_i$，$\overline{Z}_i$由下式求出（参考图14-5-3）：

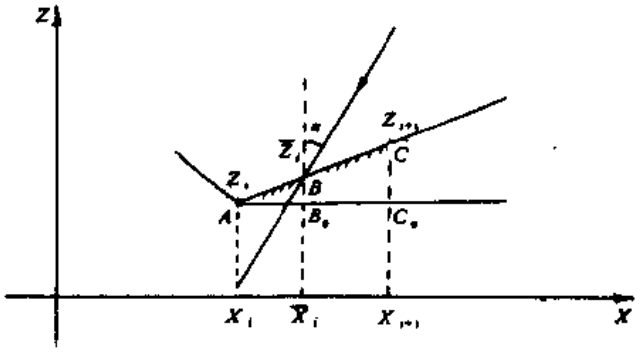


图 14-5-3

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{Y}_i = Y_i \\ \overline{X}_i = [(X_{i+1} - X_i)(X_i + kZ_i) - X_i\, k\,(Z_{i+1} - Z_i)]/ \\ \qquad [X_{i+1} - k(Z_{i+1} - Z_i) - X_i] \\ \overline{Z}_i = Z_i + (Z_{i+1} - Z_i)(\overline{X}_i - X_i)/(X_{i+1} - X_i)\end{array}\right\} \tag{14-20}$$

式中 $k = \tan\alpha$

〔证明〕：由相似三角形（图14-5-3）$Rt\Delta AB_0B$和$Rt\Delta AC_0C$知：

$$\frac{BB_0}{CC_0} = \frac{AB_0}{AC_0} \quad 或 \quad BB_0 = CC_0 \cdot \frac{AB_0}{AC_0} \tag{a}$$

其中 $BB_0 = \overline{Z}_i - Z_i$，$CC_0 = Z_{i+1} - Z_i$，

$AB_0 = \overline{X}_i - X_i$，$AC_0 = X_{i+1} - X_i$。

代入（a）式，则得

$$\overline{Z}_i - Z_i = (Z_{i+1} - Z_i)(\overline{X}_i - X_i)/(X_{i+1} - X_i)$$

即
$$\overline{Z}_i = Z_i + (Z_{i+1} - Z_i)(\overline{X}_i - X_i)/(X_{i+1} - X_i) \tag{b}$$

由图14-5-3又知：

$$\overline{X}_i = X_i + k\overline{Z}_i \tag{c}$$

将（b）式代入（c）式，有：

$$\overline{X}_i = X_i + kZ_i + k(Z_{i+1} - Z_i)(\overline{X}_i - X_i)/(X_{i+1} - X_i)$$

等式两端同乘以$(X_{i+1} - X_i)$并合并同类项得：

$$\overline{X}_i[X_{i+1} - k(Z_{i+1} - Z_i) - X_i]$$
$$= (X_{i+1} - X_i)(X_i + kZ_i) - X_i\, k(Z_{i+1} - Z_i)$$

故得：

$$\overline{X}_i = [(X_{i+1} - X_i)(X_i + kZ_i) - X_i k(Z_{i+1} - Z_i)]/$$
$$(X_{i+1} - k(Z_{i+1} - Z_i) - X_i] \tag{d}$$

（b）和（d）式即（14-20）式中结果，再考虑投影方向平行XZ面，则（14-20）式得证。

为了获得良好的立体感，k值取0.5到0.6之间，地面十分平坦时，k值可取到0.8。

第三步：将斜平行投影后的地表点坐标 $\overline{X}_i$，$\overline{Y}_i$，$\overline{Z}_i$ 按中心投影方程式变换到右方像片上去，得到一套像片断面数据 $\overline{x}_i$，$\overline{y}_i$，由此数据用正射投影仪可制成立体匹配片。

必须指出：第一，为了进行共线方程解算，需已知像片内外方位元素。它们可由区域网平差结果中获得，亦可由已知定向控制点用空间后方交会解算。第二，分别用左、右片制作正射像片和立体匹配片有利于立体量测，这将在下文中解释。

三、立体正射像片的高程精度

立体正射像片既可以用来看立体，当然可以用来量测地面点的高程。这里存在一个很有趣的问题：为了制作立体正射像片，必须具备相应地区的数字高程模型。既然已有了DEM，再用立体正射像片对量测高程几乎是没有意义了。然而事实并非如此。这是因为制作立体正射像片是在具有现代化仪器的摄影测量生产部门，而使用立体正射像片对却是在国民经济的各个有关部门。为了进行专业判读和量测，他们只要使用反光立体镜和具有两个测标的左右视差杆这样极简单的设备即可。此时，将量测的左右视差 ΔP，除以系数 k，便可换算为高差，再加上起始面高程，便获得点的高程：

$$A_i = \Delta P_i / k + Z_0 \tag{14-21}$$

在作业中，可利用任一高程控制点求出起始面高程 Z_0。

既然立体正射像片可用于高程量测，就有必要讨论它的高程精度。很有趣的是，立体正射像片对的高程精度通常要高于用来制作正射像片和立体匹配片的高程模型的精度。

图14-5-4可以说明这种关系。假设由左片制作正射像片，由右片制作立体匹配片，并假设 $k = \tan\alpha = B/H$（基线/航高），然后讨论数字高程模型误差产生的影响。

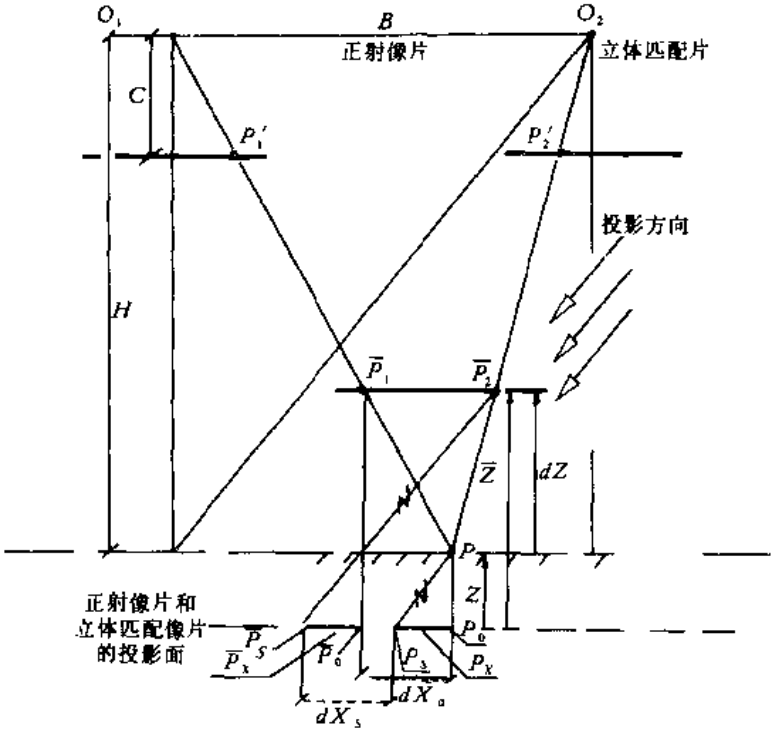


图 14-5-4

看图14-5-4中的物点P，按其真实高程Z投影到正射像片和立体匹配片的位置为P_0和P_S，两点的视差为P_X。若高程模型在P处有一误差dZ，则按中心透视获得的两个像点P'_1和P'_2的光线将投影至高程错了dZ的水平面上，P点被分成$\overline{P}_1$和$\overline{P}_2$两个点，点$\overline{P}_1$在正射像片上的位置为$\overline{P}_0$，点$\overline{P}_2$在立体匹配片上的位置为$\overline{P}_S$，两点的视差为$\overline{P}_X$。由图中几何关系可以证明和看出$P_X = \overline{P}_X$，即由立体正射像片对计算的高程不受DEM高程误差dZ的影响。

以上讨论的是极理想的情况，实际上由于每个点的航高在变化，其基高比也是变化的，但立体匹配片却不可能改变斜平行投影方向，再加上每个物点处的地形不可能像图14-5-4所示的那样水平，所以，实际的立体正射像片对量测高程时不可能完全不受DEM高程误差的影响。根据Kraus教授等人的研究，立体正射像片对的高程量测精度比用来制作立体正射像片的高程模型的高程精度高三倍。

四、制作适合高程量测的立体正射像片对的方法（对数投影法）

（一）立体正射像片对量测碎部高度存在的问题

前面已经指出，正射像片和立体匹配片最好由相互重叠为60%的两张航摄像片分别晒印，这将具有很大的好处。它不仅能立体地看到数字地面模型描述的地面起伏，而且能立体地看到高程模型未采集的许多碎部，如树木、房屋、微型地貌等等。倘若用同一片制作正射像片和立体匹配片，这些树木和房屋在立体观察下将不可能竖立在地面上，更不可能量测它们的高度。

但是，航空像片上产生视差和立体正射像片对产生的视差其原理不同，因而将会导致高程量测方面的问题。图14-5-5用来显示这方面的问题，图中假设数字高程模型未包含的碎部（如一棵树）所在的地面小范围是水平的。

设树顶在航片上的位移在X方向为dX_1和dX_2，位移dX_1在正射像片上相应的量为dP_{no}，位移dX_2在立体匹配上的相应量为dP_{as}，显然，两部分相加：

$$dP_n = dP_{no} + dP_{as}$$

即为正射像片对上与树高相对应的左右视差较。

仍然假设$k = \frac{B}{H}$，则由（14-21）式计算的树高为：

$$dZ' = \frac{H}{B} dP_n \tag{14-22}$$

而实际的树高由图14-5-5可求出：

$$dZ = \frac{H_m - (Z + dZ)}{B} dP_n$$

$$\approx \frac{H_m - Z}{B} dP_n \tag{14-23}$$

显然$dZ' \neq dZ$，其差值ε_Z为：

$$\varepsilon_Z = \frac{Z \cdot dZ}{H_m} \tag{14-24}$$

这里存在两个问题。第一，对于未被DEM所采集的高程信息，为树高、房高、细微

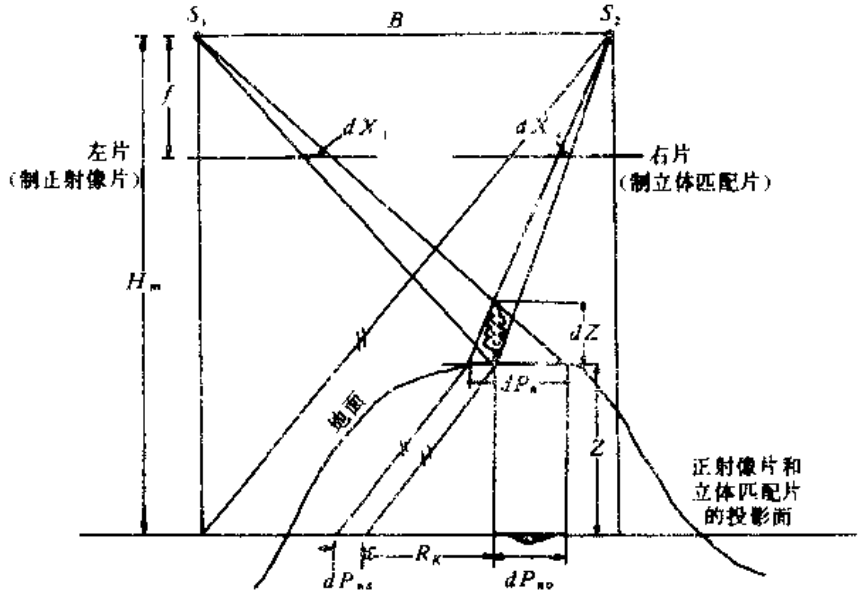


图 14-5-5

地貌等，不应当用立体正射像片的计算高差公式（14-22）来计算，而应当用式（14-23）计算。第二，对于已为DEM所采集的高程信息。则必须用式（14-22）计算高差。

例如，在立体正射像片上测得一棵树的左右视差较为10 mm，另测得两个地面点的左右视差较亦为10 mm，假设$Z=15$cm，$B=30$cm，$H_m=90$cm，则求得树高应为25 mm（式14-23），而两个地面点高差为30 mm（均按正射像片比例尺计）。

这意味着，用斜平行投影法制作立体匹配片，可能造成立体正射像片上获得相同的左右视差较，而实地应为不同的高差，从而带来了难以解决的问题！

（二）用对数投影法制作立体匹配片

为了解决上述问题，克服斜平行投影的缺点，S.Collins建议用下列对数投影来代替斜平行投影：

$$P_X = B \cdot \ln \frac{H_m}{H_m - Z} \tag{14-25}$$

对该式微分，得到：

$$dP_X = \frac{B}{H_m - Z} dZ \tag{14-26}$$

所以，在忽略二次小项情况下，人造视差公式（14 26）与天然视差公式（14-23）相一致，原来互相的矛盾消失了。

对数投影时，计算$\overline{X}_i$，$\overline{Z}_i$的公式由下列二式：

$$\overline{X}_i = X_i + B \cdot \ln\left(\frac{H_m}{H_m - \overline{Z}_i}\right) \tag{14-27}$$

和

$$\overline{Z}_i = Z_i + (Z_{i+1} - Z_i)(\overline{X}_i - X_i)/(X_{i+1} - X_i) \tag{14-28}$$

联立解求，计算要比斜平行投影法复杂。

任一点i的高程则由下式求出：

$$A_i = H_m[1 - \exp(-P_i / B)] + Z_m \tag{14-29}$$

式中：

B为摄影基线；

H_m为立体模型上的平均航高；

Z_m为平均投影面的绝对高度。

（三）立体正射像片的制作

如欲由航向重叠为60%的航带制作立体正射像片，则用双号航片制成双模型的正射像片（通常它覆盖一幅图）。对这张正射像片，再制作一张左立体匹配片和一张右立体匹配片。立体匹配片的宽度只要为正射像片的一半，分别由与之前后相邻的两张航片制成（图14-5-6）。

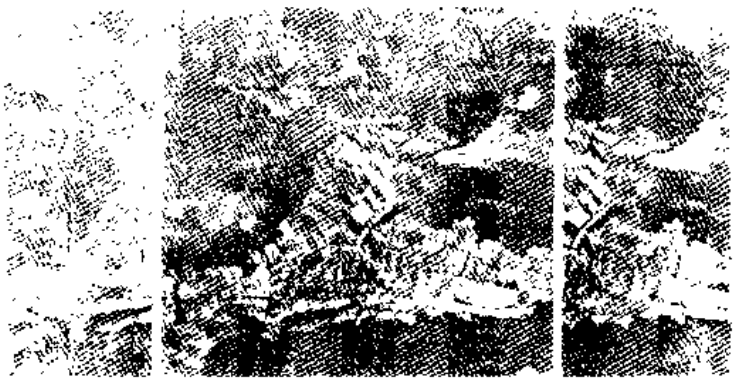


图 14-5-6

对于要量测高程的立体正射像片应采用对数投影。如果地面平坦或高程模型未包含的碎部（房屋、树木、微型地貌）与航高相比很小时，亦可放弃繁琐的对数投影方式而用斜平行投影制作立体匹配片，但需取基高比作为投影方向的正切，且航高应相对于立体模型的平均高程面。

不作高程量测的立体正射像片，总是用斜平行投影法制作立体匹配片，它们用于进行立体判读和解译。多数情况下仍用基高比作为投影方向的正切。投影方向的选择可以产生需要的高程夸张。此外，当$\alpha = 45°$时，视差就等于以正射像片比例尺表示的高差。

五、立体正射像片对的应用

与原始航空像片相比，立体正射像片具有许多明显的优点：

（1）便于定向和量测：定向仅需要将正射像片与立体匹配片在X方向上一致，量测中不产生上下视差，所测出的左右视差用简单计算方法即可获得高差和高程。对于绘制地物，只要将测标沿正射像片影像移动，并辅以主体观察即可。

（2）整个量测方法可由非摄影测量专业人员在几个小时内学会。

（3）量测用的仪器结构简单，价格便宜，特别适合立体正射像片用户的要求。

（4）立体正射像片是摄影测量与邻近学科合作的最好媒介物。

大家知道，摄影测量愈来愈需要与邻近学科合作与渗透。困难往往在于：要么摄影测量人员对其它学科知之甚少，要么非摄影测量人员难以掌握复杂的当代摄影测量原理和测图技术。而立体正射像片这个产品对于具有现代解析摄影测量仪器的航测单位是可以大量生产的。非摄影测量专业人员可以直接购买立体正射像片，而不用去买昂贵的航测仪器，然后利用他们买得起的简单仪器和能很快掌握和相信的方法进行解译和量测，以获得所需要的信息。

立体正射像片主要有以下诸方面的应用：

（1）森林图和植物病虫害图

在由彩红外像片制成的正射像片上放上透明薄膜，并辅以立体匹配片，便可精确地对各种树木和植被进行分类。当制作植物病虫害图时立体匹配片尤其有用，而且可以直接量测植被高度。

（2）农田利用面积的估价

立体正射像片有助于辨认土地分类边界，而且可以直接量测面积。由于能直观地看到立体，对研究地表形态、土壤及水土流失均有好处。

（3）交通线路的初步规划

正射像片是交通线路初步规划的设计基础，规划可以在很短时间内以较少的费用获得。因为正射像片比地图更加现实和全面地显示实地环境，再辅以立体观察便犹如身临其境。它不仅使交通规划人员更容易进行像片判读和选线，而且可以为各种定线方案提供包括土地利用和高程变化情况等有关信息。

（4）在发展中国家建立地籍

在发展中国家，一般缺少系统的地籍资料，地籍测量要从界址点的收集、整理开始。利用立体正射像片可以辨认和直接绘出地界。在没有地籍图的情况下，正射像片是一种有价值的地籍图代用品，相当于图解地籍，其精度取决于正射像片比例尺，一般认为可达到图上 $\pm 0.15mm$。当比例尺为1：1000时，可达到实地 $\pm 15cm$。

利用正射像片，加上实地调查和补绘上等高线，便可方便地得到多用途地籍图。

（5）制作具有更丰富地貌形态的等高线图

要想在地貌形态丰富的地区绘制出高质量的等高线图，一般不由DEM产生等高线文件进行机助绘图，但在精密立体测图仪上作业又费工时。此时可采用下列作业方法：

第一步：不考虑微型地貌采集DEM数据；

第二步：制作正射像片和立体匹配片；

第三步：在简单的量测仪上，包括大量闲置的立体量测仪上，进行等高线测绘。由立体正射像片绘出的等高线质量将不亚于由精密立体测图仪绘出的结果，而且它将与正射影像套合得很好。在上文的精度分析中已指出，尽管立体正射像片是由粗格网的DEM制成，但它仍能精确和细致地描绘出高质量的微细地貌。联邦德国R．Finsterwaeder已作了有益的试验与应用。

（6）修测地形图

只要已具备DEM高程数据库，可以在摄影后立即方便地制出立体正射像片。用它来

修测地形图上的地物和微小的高程变化均十分有效。试验表明，用正射像片修测地图比用原始航片方便而精确，而用立体正射像片要比单眼观测正射像片辨认出多50%的细部。

此外，利用已有的DEM数据，在地图修测时，用更长主距的航摄仪重新摄影，可以获得更高精度的正射像片，从而可以改善地形图修测的精度。

总之，正射像片和立体正射像片技术是一项亟待开拓应用的新技术、需要将它直接作为摄影测量产品，介绍和提供给广大用户。

本章习题与思考题

1. 什么叫微分纠正？为什么模拟型纠正仪器不能用来进行微分纠正？
2. 简述微分纠正的发展过程。
3. 正射投影仪可以按什么原则进行分类？试列表叙述其分类结果。
4. 详细叙述一级割线方式间接式光学投影微分纠正的原理。
5. 叙述具有线元素的数控微分纠正仪的基本结构。
6. 比较OR—1和Z—2正射投影仪的结构特征和优缺点。
7. 介绍正射投影仪的几种主要工作方式。
8. 简述在OR—1上制作正射像片的作业步骤。
9. 为什么称Z—2为解析正射投影仪？与OR—1相比，它有哪些特殊功能？
10. 用在绝对航高2000 m高度上摄得的竖直摄影像片（主距为150 mm）制作1∶2500的正射像片，请估计一下两个高10 m建筑物山墙点在航空像片和正射像片上的位移值。这两个建筑物距像主点10 cm，其中一个位于向外倾斜（$\alpha = 10°$，$\beta = 50°$）的坡面上，高程为$Z = 150$ m，另一个建筑物位于向内倾斜（$\alpha = 15°$，$\beta = 75°$）的坡面上，高度为$Z = 800$ m。
11. 分析正射像片的各种误差来源，并指出哪些为主要误差源？缩小缝隙尺寸可以减少哪些误差的影响？
12. 地面坡度为什么会产生正射影像的模糊？
13. 为什么说正射投影仪并不是万能的、适合任何起伏变化的微分纠正仪器？它有哪些限制？
14. 如何检查和为什么要检查正射像片的精度？
15. 什么叫立体正射像片对？有哪两种方法可制作立体匹配片？各有什么特点？各运用于什么场合？
16. 叙述制作正射立体像片对的过程和步骤。
17. 分析立体正射像片的高程精度。
18. 叙述立体正射像片对的实际应用。

第十五章　线性阵列传感器影像的解析摄影测量处理

§15.1　概　　述

一、CCD线性阵列传感器及其工作原理

长期以来，在航空和航天摄影测量中，人们均利用框幅式摄影机进行摄影，通过光学机械的方法将所研究目标在摄影底片上感光，通过光化学作用，对底片进行摄影处理，便可获得所摄目标的影像（负片或正片）。这种方法的优点是可以获得稳定的几何图形和较高的分辨率，但缺点是必须通过底片这个载体，而且不能实时地获得所需要的影像，故不便于传输和实时对影像进行处理。

利用各种传感器取代框幅式摄影机，能直接获取被摄物体的数字信息并传送到地面接收系统中。在各种传感器中，由电荷耦合器件(CCD——charge coupled device的缩写)构成的线性阵列传感器具有稳固、轻巧、功耗低及多谱带等优点，在各国获得了广泛的应用。例如法国空间局发射的SPOT卫星（法文词组Systeme Probatoire d'Observation de la Terre的缩写），美国地质调查局发射的Mapsat卫星和联邦德国的航天飞机STS上都装有CCD线性阵列扫描仪。

线性阵列传感器系由一排垂直于轨道方向排列的CCD阵列组成，每阵列可包含数千个像元，而以飞行器运行的速度实现航向方向的扫描，获得所摄地区的连续影像。

电荷耦合器件是在70年代出现的一种固体器件，其基本结构如图15-1-1所示。它是在n型Si单晶或P型Si单晶（图中为P—Si）衬底上生成一层厚度约为120nm的SiO_2，再在SiO_2上蒸发一层间距很小的并排Al电极，形成一种紧密排列的MOS电容器阵列。就是说，它主要由半导体（P—Si）、绝缘层（SiO_2）和金属（Al）电极三层构成，相当于一个模拟移位寄存器。

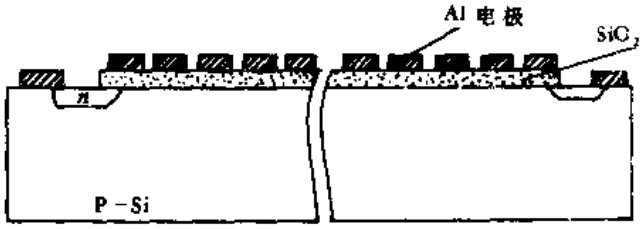


图 15-1-1

用作光电探测器的CCD，当光线照在电荷耦合器件上便会产生电荷，这时有两种方式：一种是让光迎面入射到器件上，注过不透明电极之间的间隙透入半导体层；或者在电极上打许多很小的孔，让光透入，如图15-1-2（a）所示。另一种结构是把光敏区衬底做得很薄，让光从背面入射，透入薄薄的衬底内部，而正面用铝栅档光，如图15-1-2（b)所示。

由于光子被吸收，在半导体内部产生电子—空穴对（即产生光生电荷），在每一个存贮电极（即带高电位的电极）下面的电势就将电荷聚集成电荷包，并存贮在该电极下面的势陷中。聚集和存贮在电荷包中的电荷数与入射到这一电极附近的光强成正比。因此，在

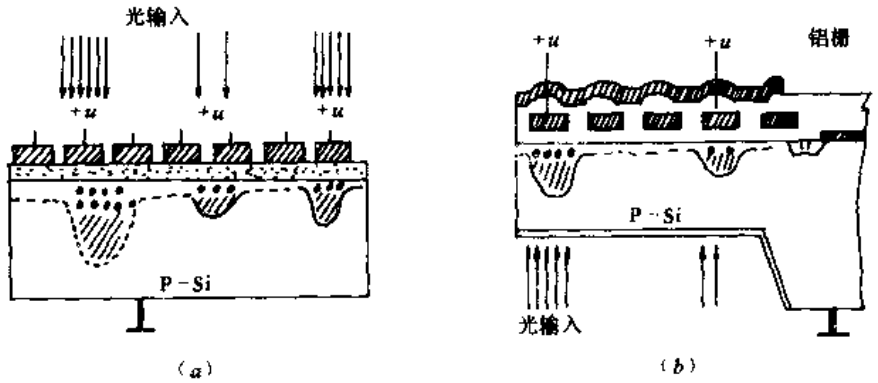


图 15-1-2

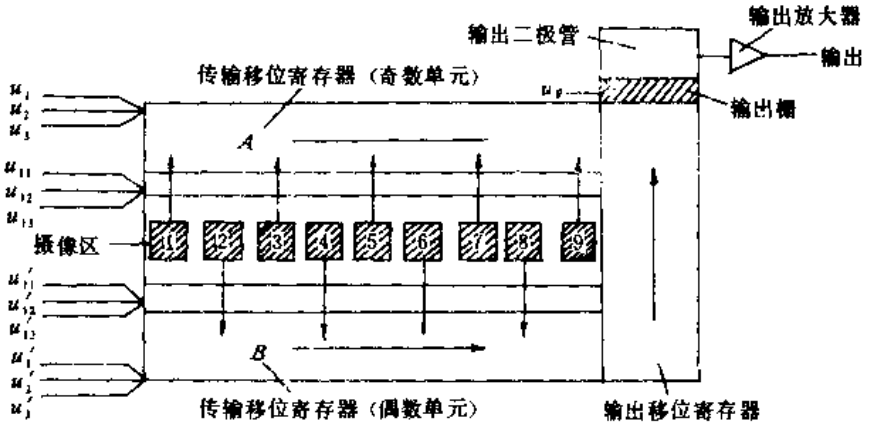


图 15-1-3

整个器件中存贮的电荷的分布便与所摄景物的光强分布相对应。在积累周期末，通过循环时钟脉冲（即扫描控制）驱动系统，CCD的电荷传输作用开始，代表光信号的电荷包被依次转移到单一的输出器和放大系统，从而变成视频电信号输出。若加到载波上去便可远距离传送；若通过模/数转换便可得到数字影像。

CCD线性阵列传感器通常按电荷向两侧转移的方式工作，其原理示于图15-1-3。此时假设聚集时间与传输时间的间隔相同。

在转移栅电压u_{11}，u_{12}，u_{13}和u'_{11}，u'_{12}，u'_{13}的作用下将奇数光敏单元的电荷转移至上面的传输移位寄存器A，将耦数光敏单元的电荷转移至下面的传输移位寄存器B。然后，在行扫描时间内，这两个寄存器中的电荷分别在时钟脉冲电压u_1，u_2，u_3和u'_1，u'_2，u'_3的作用下按一定的顺序转移至输出移位寄存器，并恢复光敏单元的顺序，经输出放大器输出一行图像信号，同时在光敏面上完成光电积分。

这种方法的优点是分辨率高，转移效率高，与其它扫描器相比，几何性能较稳定。

二、SPOT卫星的一行CCD阵列传感器

法国的SPOT卫星就是采用CCD线性阵列传感器来获取地球表面的影像信息。在全色波段，每行由6000个像元组成，像元尺寸为13μm，地面分辨率为±10m（摄影比例尺为1:80万）。SPOT的CCD线性阵列传感器的成像几何关系见图15-1-4。

CCD阵列分别装在二台HRV高分辨率目视仪器上，利用镜面反射装置每台HRV仪器可作侧向倾斜最大到±27°。利用这种方式可在±475km的宽条带范围内对地面上的60km(0°)和81km（±27°)宽的范围推帚式成像（见图15-1-5)，从而提供航带选择的灵活性。

SPOT卫星和其上的HRV仪器的主要技术数据分别列于表15-1-1和表15-1-2。

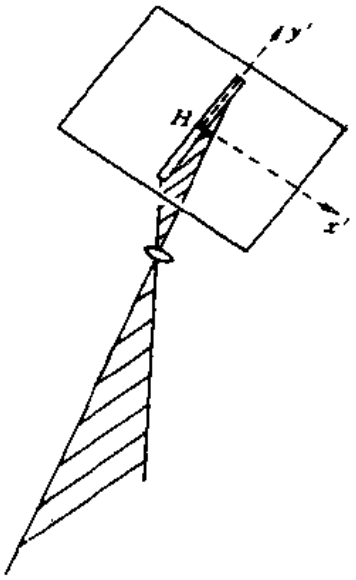


图 15-1-4

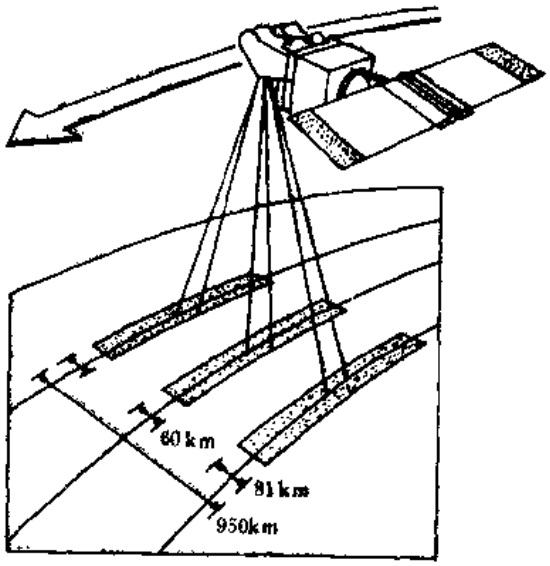


图 15-1-5

SPOT卫星的主要轨道参数　　表 15-1-1

高　　度	倾　　角	轨 道 周 期	重 复 周 期
832km	98.7°	101min	26天

SPOT—HRV仪器的主要技术参数　　表 15-1-2

HRV仪器	多 光 谱 方 式	全　色　方　式
光谱带	(XS1)0.50～0.59μm (XS2)0.61～0.68μm (XS3)0.79～0.89μm	(P)0.51～0.73μm
视场角（1FOV)	4.13°	4.13°
地面像元大小（底点下）	20m×20m	10m×10m
每行的像元数	3000	6000
航带宽度（底点下）	60km	60km
像元编码	3×8比特	6比特DPCM*
数据传输速度	25兆比特/秒	25兆比特/秒

* DPCM系英语数字脉冲编码调制的缩写，是一种数据压缩方法，它不破坏影像数据的辐射质量。

由于每个HRV仪器均可侧向倾斜扫描，因而可以获得地表面的立体影像（图15-1-6）和提高重复速度（图15-1-7）。这个重要特点，既为立体侧图提供了可能性，也为多时相数据的及时获取提供了方便。

SPDT卫星CCD线性阵列传感器影像的上述特性使得对它的解析处理变得可能而有价值。

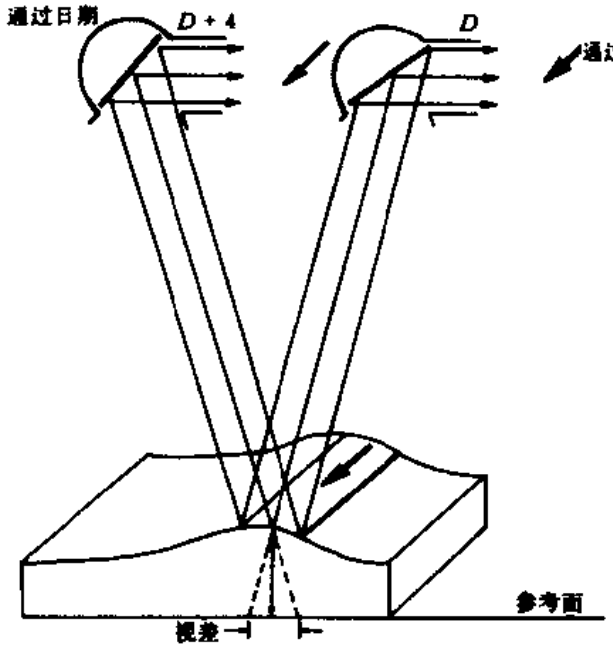


图 15-1-6

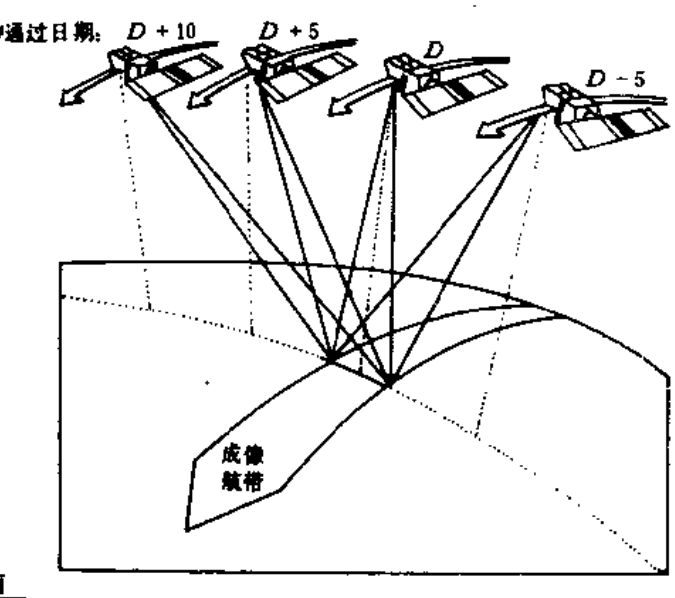


图 15-1-7

三、三行CCD线性阵列传感器

如果在物镜的焦平面上安置三个CCD线性阵列传感器*A*，*B*，*C*（见图15-1-8），使它们的方位垂直于飞行方向，则当飞行器运动时，可获得所对应地表的三条航带的重叠影像（见图15-1-9）。

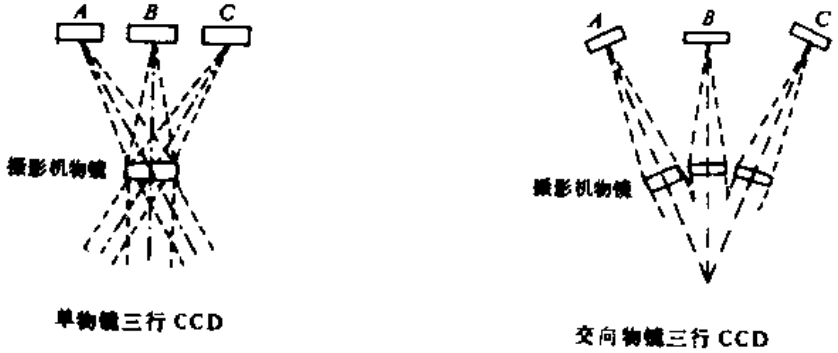


图 15-1-8

由于三行CCD线性阵列传感器能同时获取同一地区的三个重叠影像带（向下、向前和向后扫描的影像），它不仅能提供平面解求，而且能提供三维信息。因为物体在三个重叠影像带上构像的时差很小（若以飞行器时速25600km/h计，当基线*B*=330km时，重叠影

像的最大时差仅为93s），故立体还原效果很好，无明显的时差。

美国测图卫星MAPSAT中的阵列传感器就可以在卫星轨道方向内向前或向后倾斜φ_0角度，而德国MBB公司和慕尼黑工大航测研究所近十年来一直研究这种三行CCD摄影机，称之为DPS数字摄影测量系统，并已在德国宇航研究中心和MBB联合研制的MOMS—02扫描仪中加以利用。

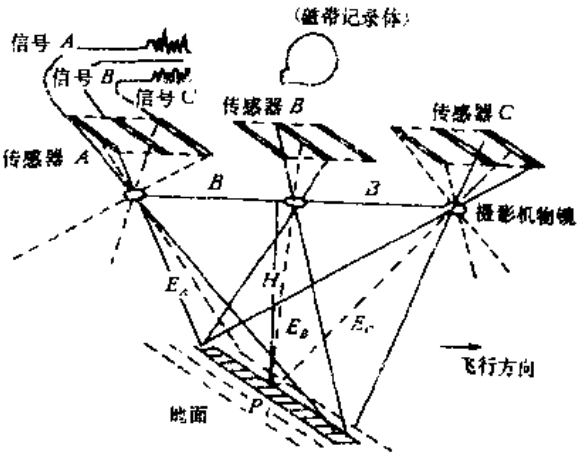


图 15-1-9

由于法国的SPOT—1已于1986年2月23日起提供大量地球表面影像，而且SPOT—2也已于1990年发射上天，大量的SPOT图像（每幅图像由6000行组成，即像幅为6000×6000像元，实地为60km×60km，像片比例尺以1:40万输出，故实际像幅为15cm×15cm左右）已在各方面获得应用，所以在本章中重点讲述SPOT图像的解析摄影测量处理，最后一节简要地讨论三行CCD阵列传感器影像的解析处理。而对这些数字图像的数字处理则在数字摄影测量和遥感学中讨论。

§15.2 SPOT影像的光束法平差

由于SPOT影像不仅有较高的分辨率，而且能提供良好基高比（可达到1:1.05），因此，如何利用SPOT立体像对测绘或修测1:50000和1:100 000比例尺地形图已成为全球关心的问题。

SPOT影像可直接提供CCT磁带，它便于利用数字方法进行处理，但它同时也可回放为软片供解析处理。由于测绘部门已具有大量的解析测图仪器和数控正射投影仪器，故研究SPOT图像的解析处理具有重要实际价值。

测绘地形图离不开像片三角测量，像片三角测量将为SPOT的解析测图、正射投影以及数字影像相关等提供必要的定向元素和其它参数。

本节将具体讨论SPOT立体影像的几何关系、数学模型及光束法平差的原理与方法，并对结果进行必要的分析。

一、坐标系的建立

先定义CCD线性阵列扫描影像的瞬时坐标系。考虑到SPOT是通过侧向镜面反射而获得立体重叠，依惯例，取飞行方向为y轴方向，而x方向垂直于飞行方向，则x视差反映了地面的高差（见图15-2-1）。由于CCD传感器仅为一行，故$y_i=0$。但考虑到一张像片由6000行影像组成，故每行影像仍可量得框幅式像片的y坐标。该值反映了各行CCD影像间的时间延续关系，该值是时间与飞行器速度的函数（图15-2-2）。

这是CCD线性阵列扫描仪与框幅式摄影机所得像片的差异。可以形象地说，前者是行

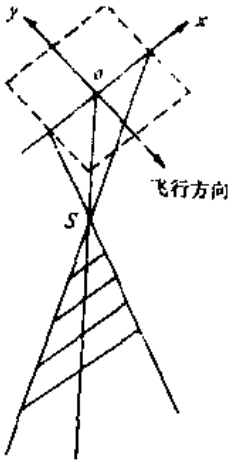


图 15-2-1

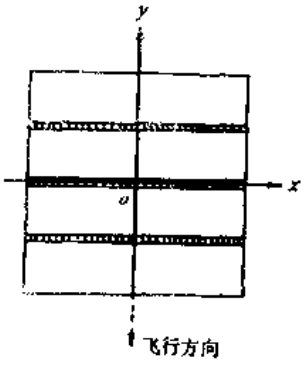


图 15-2-2

中心投影，后者是面中心投影。

由于一个SPOT立体像幅所覆盖的地表面积至少为$60\times60\,km^2$，因此对于地面坐标系的考虑也应当十分严格。根据本书第四章的理论，对SPOT影像的几何处理和测量过程将涉及下列的地面坐标系：

——高斯—克吕格坐标系（X_t、Y_t）及高程h（正常高）；

——大地坐标系，用大地经纬度L、B及大地高H表示；

——地心直角坐标系（X_c，Y_c，Z_c）；

——切面直角坐标系（X_T，Y_T，Z_T）。

平差和测图过程中需要进行坐标间的正反变换。平差和量测处理中采用切面直角坐标系，故控制点的坐标需转换到切面坐标系，其顺序为：

$$(X_t, Y_t, h)\rightarrow(L, B, H)\rightarrow(X_c, Y_c, Z_c)\rightarrow(X_T, Y_T, Z_T)$$

测图中得到的结果必须表示到高斯—克吕格投影带坐标系中，故需执行其逆变换：

$$(X_T, Y_T, Z_T)\rightarrow(X_c, Y_c, Z_c)\rightarrow(L, B, H)\rightarrow(X_t, Y_t, h)。$$

也可以采用近似方法直接在高斯－克吕格坐标与切面坐标之间进行坐标变换，并引入地球曲率改正。

二、SPOT影像的构像方程及其线性化

如图15-2-1、15-2-2所示，每行影像构成自己的中心投影，而行与行之间具有不同的外方位元素。设第i行的六个外方位元素为X_{s_i}、Y_{s_i}、Z_{s_i}、Φ_i、Ω_i和K_i，则其构像方程式为：

$$\begin{bmatrix} x_i \\ 0 \\ -f \end{bmatrix} = \lambda_i R_i^T \begin{bmatrix} X_i - X_{s_i} \\ Y_i - Y_{s_i} \\ Z_i - Z_{s_i} \end{bmatrix} \tag{15-1}$$

其中：x_i为像点坐标，y_i恒为0；

f为影像的校正主距；

X_i，Y_i，Z_i为点i的地面坐标；

X_{s_i}，Y_{s_i}，Z_{s_i}为点i所对应的第i行构像的投影中心点的地面坐标；

R_i为旋转矩阵，由于除了HRV仪器自身的空间姿态外，还要加上镜面侧向倾斜角Φ_0的影响，故有：

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_{\varphi_i}\boldsymbol{R}_{w_i}\boldsymbol{R}_{k_i}\boldsymbol{R}_{\Phi_0} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{15-2}$$

从中求出的对应角度为Φ_i，Ω_i和K_i。

由于Φ_0角固定，为大值，而真正瞬时变化的姿态角为φ_i，w_i，κ_i，它们为小角度。用φ_i，ω_i，κ_i可构成旋转矩阵$\overline{R_i}$，有：

$$\overline{\boldsymbol{R}_i} = \boldsymbol{R}_{\varphi_i}\cdot\boldsymbol{R}_{\omega_i}\cdot\boldsymbol{R}_{\kappa_i} = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{bmatrix} \tag{15-3}$$

而

$$\boldsymbol{R}_{\Phi_0} = \begin{bmatrix} \cos\Phi_0 & 0 & -\sin\Phi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi_0 & 0 & \cos\Phi_0 \end{bmatrix} \tag{15-4}$$

传感器平台的瞬时外方位元素X_{s_i}，Y_{s_i}，Z_{s_i}，φ_i，ω_i，κ_i对每一行CCD影像有不同的数值，它们是时间的函数，可一般地表示为：

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_0 + k_{\varphi_1}\Delta t + k_{\varphi_2}\Delta t^2 + \cdots \\ \omega_i &= \omega_0 + k_{w_1}\Delta t + k_{w_2}\Delta t^2 + \cdots \\ \kappa_i &= \kappa_0 + k_{k_1}\Delta t + k_{k_2}\Delta t^2 + \cdots \\ X_{s_i} &= X_{s_0} + k_{x_1}\Delta t + k_{x_2}\Delta t^2 + \cdots \\ Y_{s_i} &= y_{s_0} + k_{y_1}\Delta t + k_{y_2}\Delta t^2 + \cdots \\ Z_{s_i} &= Z_{s_0} + k_{z_1}\Delta t + k_{z_2}\Delta t^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{15-5}$$

当飞行器在高轨道空间运行时，由于空间环境大气干扰甚小，CCD线性阵列摄影无部件运动，又采用了惯性平台、跟踪恒星的姿控系统及地面跟踪观测等先进技术，姿态变化率很小。因此，在一张SPOT像片的范围内可以认为外方位元素的变化是时间的线性函数。考虑到SPOT像片上的y坐标实际上表示了记录的时间序列，所以外方位元素的变化可以表示为y坐标的线性函数，即

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_0 + k_1 y \\ \omega_i &= \omega_0 + k_2 y \\ \kappa_i &= \kappa_0 + k_3 y \\ X_{s_i} &= X_{s_0} + k_4 y \\ Y_{s_i} &= Y_{s_0} + k_5 y \\ Z_{s_i} &= Z_{s_0} + k_6 y \end{aligned}\right\} \tag{15-6}$$

其中：φ_i，ω_i，κ_i，X_{s_i}，Y_{s_i}，Z_{s_i}为任意一行CCD影像成像时的瞬时外方位元素；

φ_0，ω_0，κ_0，X_{s_0}，Y_{s_0}，Z_{s_0}为$y=0$中央一行的外方位元素；

k_1，k_2，k_3，k_4，k_5，k_6为待定未知参数，除k_4和k_5外，一般均为小值，初值可设为0，

而k_4和k_5可由坐标正反变换求出其初值。

由式（15-1）可写出相应的共线方程式为：

$$\left.\begin{aligned} x_i &= -f\frac{a_1(X_i-X_{s_i})+b_1(Y_i-Y_{s_i})+c_1(Z_i-Z_{s_i})}{a_3(X_i-X_{s_i})+b_3(Y_i-Y_{s_i})+c_3(Z_i-Z_{s_i})} \\ 0 &= -f\frac{a_2(X_i-X_{s_i})+b_2(Y_i-Y_{s_i})+c_2(Z_i-Z_{s_i})}{a_3(X_i-X_{s_i})+b_3(Y_i-Y_{s_i})+c_3(Z_i-Z_{s_i})} \end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}7)$$

从形式上看，线性阵列传感器影像的共线方程与框幅式中心投影共线方程式相似。而它们的主要区别在于（15-7）式中y_i瞬时坐标恒为0，而像片量测的y坐标将决定每行CCD影像的外方位元素（见式(15-6)）。此外，旋转矩阵中还要考虑镜面倾斜Φ_0角度的影响(式(15-2))。

由于共线方程是未知参数φ_0，ω_0，κ_0，X_{s_0}，Y_{s_0}，Z_{s_0}，k_1，k_2，k_3，k_4，k_5，k_6（共12个）的非线性函数，故求解外方位元素过程中必须建立线性化误差方程式。

误差方程式分三类：

第一类：像点观测值误差方程式。

用泰勒级数对式（15-7）线性化，并考虑到式（15-6），（15-2)有：

$$\begin{aligned} V_{x_i} &= a_{11}\Delta\varphi_0 + a_{12}\Delta\omega_0 + a_{13}\Delta\kappa_0 + a_{14}\Delta X_{s0} + a_{15}\Delta Y_{s0} + a_{16}\Delta Z_{s0} + \\ &+ a_{11}y\Delta k_1 + a_{12}y\Delta k_2 + a_{13}y\Delta k_3 + a_{14}y\Delta k_4 + a_{15}y\Delta k_5 + \\ &+ a_{16}y\Delta k_6 - a_{14}\Delta X_i - a_{15}\Delta Y_i - a_{16}\Delta Z_i - l_{x_i} \\ V_y &= a_{21}\Delta\varphi_0 + a_{22}\Delta\omega_0 + a_{23}\Delta\kappa_0 + a_{24}\Delta X_{s0} + a_{25}\Delta Y_{s0} + a_{26}\Delta Z_{s0} + \\ &+ a_{21}y\Delta k_1 + a_{22}y\Delta k_2 + a_{23}y\Delta k_3 + a_{24}y\Delta k_4 + a_{25}y\Delta k_5 + \\ &+ a_{26}y\Delta k_6 - a_{24}\Delta X_i - a_{25}\Delta Y_i - a_{26}\Delta Z_i - l_{y_i} \end{aligned} \quad (15\text{-}8)$$

其中：ΔX_{s_0}，ΔY_{s_0}，ΔZ_{s_0}，$\Delta\varphi_0$，$\Delta\omega_0$，$\Delta\kappa_0$为中央一行CCD影像的外方位元素改正数；

Δk_1，Δk_2，Δk_3，Δk_4，Δk_5，Δk_6为随时间变化参数的改正数；

ΔX_i，ΔY_i，ΔZ_i为i点地面坐标改正数：

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\left(\frac{x^2}{f}\cos\kappa + f\sin\kappa\right)\cos\omega \\ a_{12} &= \frac{\partial x}{\partial\omega} = -\left(f+\frac{x^2}{f}\right)\sin\kappa\cos\Phi_0 \\ a_{13} &= \frac{\partial x}{\partial\kappa} = 0 \\ a_{14} &= \frac{\partial x}{\partial X_s} = \frac{1}{Z}(a_1 f + a_3 x) \\ a_{15} &= \frac{\partial x}{\partial Y_s} = \frac{1}{Z}(b_1 f + b_3 x) \\ a_{16} &= \frac{\partial x}{\partial Z_s} = \frac{1}{Z}(c_1 f + c_3 x) \end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -x\sin\omega + f\sin\kappa\cos\omega \\
a_{22} &= \frac{\partial y}{\partial \omega} = -f\cos\kappa \\
a_{23} &= \frac{\partial y}{\partial \kappa} = -x \\
a_{24} &= \frac{\partial y}{\partial X_s} = \frac{a_2 f}{\overline{Z}} \\
a_{25} &= \frac{\partial y}{\partial Y_s} = \frac{b_2 f}{\overline{Z}} \\
a_{26} &= \frac{\partial y}{\partial Z_s} = \frac{c_2 f}{\overline{Z}}
\end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}9)
$$

$$
\begin{bmatrix} l_{x_i} \\ l_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + f\cdot\dfrac{a_1(X_i - X_{s_i}) + b_1(Y_i - Y_{s_i}) + c_1(Z_i - Z_{s_i})}{a_3(X_i - X_{s_i}) + b_3(Y_i - Y_{s_i}) + c_3(Z_i - Z_{s_i})} \\ 0 + f\cdot\dfrac{a_2(X_i - X_{s_i}) + b_2\ (Y_i - Y_{s_i}) + c_2\ (Z_i - Z_{s_i})}{a_3(X_i - X_{s_i}) + b_3(Y_i - Y_{s_i}) + c_3(Z_i - Z_{s_i})} \end{bmatrix} \qquad (15\text{-}10)
$$

而且（15-9)式中，

$$
\overline{Z} = a_3(X_i - X_{s_i}) + b_3(Y_i - Y_{s_i}) + c_3(Z_i - Z_{s_i})
$$

第二类：控制点观测值误差方程式。

当控制点取自老图时，不应将它们视为固定点，而宜作为带权观测值。若取其地面坐标为初值，则对第i个控制点有：

$$
\begin{bmatrix} V_{x_i} \\ V_{y_i} \\ V_{z_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{权为 } P_T \qquad (15\text{-}11)
$$

第三类：外方位元素观测值误差方程式

SPOT影像磁带上包含有轨道参数，可推算出SPOT像片的外方位元素，因此可引入相应的误差方程式。而且为了保证解的稳定性，全部未知数参数也可引入“伪观测值”概念。此时，外方位角元素初值可取零，时间变化常数k_i（k_4，k_5除外）均可取为零，于是列出下列误差方程式：

$$
\begin{bmatrix} V_{\varphi_0} \\ V_{\omega_0} \\ \vdots \\ V_{z_{s_0}} \\ V_{k_1} \\ \vdots \\ V_{k_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_0 \\ \Delta\omega_0 \\ \vdots \\ \Delta Z_{s_0} \\ \Delta k_1 \\ \vdots \\ \Delta k_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{权阵 } P_u \qquad (15\text{-}12)
$$

以上三类误差方程式综合起来，便可从中联合求解SPOT立体像对或区域网中所有定向

未知数和地面点未知坐标，与第七章讲的光束法区域网平差相同。

三、SPOT影像光束法平差的程序结构

SPOT影像光束法平差的目的是为其解析测图、正射影像制作、数字影像匹配等后继处理提供需要的外方位元素（每片共十二个）。此时的观测值仍然是像点坐标，所需地面控制点则由老图上读出，或用GPS接收机在实地测定。

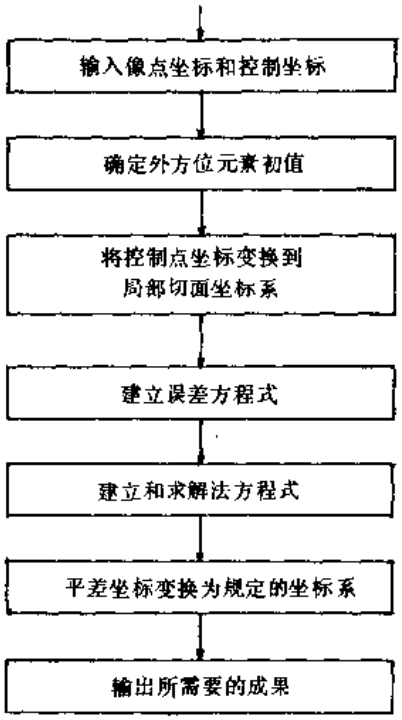


图 15-2-3

整个程序流程可用图15-2-3简要描述。

其中，计算外方位元素初值可采用如下三种方法：

（1）根据记录的轨道参数来计算外方位线元素的初值及其相应时间变化系数的初值，角元素及其时间变化系数初值均取零。

（2）利用控制点的地面坐标和像片坐标，用简单的相似变换解求有关初值。

（3）先将SPOT像片视为框幅式面中心投影，以一般的相对定向一绝对定向解法计算初值。

由于SPOT几何特点，未知数间存在较强的相关，因此误差方程式系数应均匀化，以改善法方程式状态，此外三类观测值权的设定也十分重要，有助于解的稳定。

试验表明，在基高比为1的情况下，SPOT像片三角测量能提供平面±10～15m，高程±5～8m的加密精度，可以满足山区1:5万和1:10万比例尺测图的要求。

§15.3 SPOT影像在解析测图仪上的处理

一对SPOT立体像对，其重叠度近于100%，比例尺为1:40万。能否在现有解析测图仪上进行立体测图，DEM采集等作业呢？

如果用模拟立体测图仪是不可能的，因为面中心投影时全片有同样的一组外方位元素，而CCD线阵列扫描影像，如SPOT像片有6000行组成，每行有自己的一组外方位元素。然而，由于解析测图仪是一种数字投影导杆，通过一整套严格的坐标变换实现共线方程和对应射线的相交，因此它可能用来处理行中心投影得到的SPOT像片。关键的问题是要在其LOOP程序中考虑SPOT影像的构像特点，解决面中心投影和行中心投影之间的差异。

一、SPOT像对立体测图LOOP程序的两种解决

可以用两种方法来解决SPOT立体像对在解析测图仪上的测图问题。

第一种解法是求出各行CCD阵列影像的外方位元素（利用式（15-6）求出的每片12个未知数和该行的y坐标）后，用式（15-7）重写LOOP程序。这样做有两个困难：第一，一般用户不便于用汇编语言重写LOOP程序；第二，多数解析测图仪均为物方型仪器，即输入物方坐标为先，若用式（15-7）来计算像方坐标，则必须先已知y坐标才能求出瞬时外方位元素，因此这必然增加了LOOP程序的反复迭代和计算上的麻烦，所以，通常情况下很少被采用。

第二种解法是不改动LOOP程序，而实时地在输出的像片坐标中引入由于行中心投影与面中心投影的差异产生的改正数。这种方法最先由联邦德国康尼斯内教授提出。对照式（15-6），（15-7）与一般共线方程可知，该项改正数为瞬时外方位元素和物方坐标X、Y、Z的函数。若已测出外方位元素，并按一个规则地面确定X和Y，则该项改正仅为地面高程的函数。

为了保证达到实时作业的速度要求，可以预先按测区的最大和最小高程两个平面，计算出高、低格网各点的像片坐标改正数。由于像片坐标改正数本身很小，在一个格网内可以用线性内插方法计算任一实际地面点的像片坐标改正数。高低格网改正数可在测图作业之前预先计算好，在实时程序中只须增加用线性内插从任意点周围四个格网点改正数求该点改正数的简单计算。这项计算完全可以在每秒50周的LOOP程序中实现。

二、在解析测图仪上计算SPOT影像外方位元素的方法

SPOT影像在解析测图仪上作业时需要已知立体像片对两片的外方位元素。可以用§15.2中的光束法平差方法求外方位元素，也可用更为简单的空间后方交会方法直接利用解析测图仪的计算机来完成。

为了克服外方位角元素和线元素之间的强相关，将它们分两步交替迭代计算，其公式可由式（15-8）中得到。

第一步：计算外方位线元素及其时间变化量。线性化误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} V_{x_i} &= a_{14}\Delta X_{s_0} + a_{15}\Delta Y_{s_0} + a_{16}\Delta Z_{s_0} + a_{14}y\Delta k_4 \\ &\quad + a_{15}y\Delta k_5 + a_{16}y\Delta k_6 - l_{x_i} \\ V_{y_i} &= a_{24}\Delta X_{s_0} + a_{25}\Delta Y_{s_0} + a_{26}\Delta Z_{s_0} + a_{24}y\Delta k_4 \\ &\quad + a_{25}y\Delta k_5 + a_{26}y\Delta k_6 - l_{y_i} \end{aligned}\right\} \tag{15-13}$$

第二步：计算外方位角元素及其时间变化量。线性化误差方程式为：

$$\left.\begin{aligned} V_{x_i} &= a_{11}\Delta\varphi_0 + a_{12}\Delta\omega_0 + a_{13}\Delta\kappa_0 + a_{11}y\Delta k_1 + a_{12}y\Delta k_2 + a_{13}y\Delta k_3 - l_{x_i} \\ V_{y_i} &= a_{21}\Delta\varphi_0 + a_{22}\Delta\omega_0 + a_{23}\Delta\kappa_0 + a_{21}y\Delta k_1 + a_{22}y\Delta k_2 + a_{23}y\Delta k_3 - l_{y_i} \end{aligned}\right\} \tag{15-14}$$

式中各量的含义见式（15-9），（15-10）。

用这种方法可在解析测图仪上方便地计算出外方位元素来。

三、高低格网点的像点坐标改正数矩阵的计算

设置一地面格网使其覆盖SPOT立体像对的全部测绘范围。设格网点具有地面最大和

最小高程Z_{max}和Z_{min}，便建立了地面上的高低两层格网点。

任取一格网点坐标X、Y、Z，若以外方位元素（$y=0$）φ_0，ω_0，κ_0，X_{s_0}，Y_{s_0}，Z_{s_0}代入式（15-7）和式（15-2）便可求出面中心投影像片坐标x_p和y_p。若外方位元素取该点所在那一行的瞬时值（式15-6），然后仍用共线方程式（15-7），则可求出行中心投影坐标x_l和y_l。问题是用式（15-6）计算瞬时外方位元素时必须已知所在那一行的y坐标，因此只能用迭代法求解，其步骤为：

（1）令$y=y_p$；

（2）由y值代入式（15-6）中求瞬时外方位元素；

（3）用式（15-7）式求x_l和y_l，由该式知y_l应为零；

（4）若y_l的绝对值不为零且大于给定的阈值，则令$y \Leftarrow y+y_l$，返回第（2）步重复计算，直至求出的y_l小于规定的限值。

于是，像点坐标的改正数为：

$$\left.\begin{aligned} D_x &= x_l - x_p \\ D_y &= y - y_p \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}15)$$

以上计算必须对高、低格网分别进行，且对左、右片分别计算，共获得四个改正数矩阵。这项计算在实时作业之前以离线方式完成。试验表明，格网间隔并不要求太小，约为像片上1 cm即可。

四、像点坐标改正数的实时计算

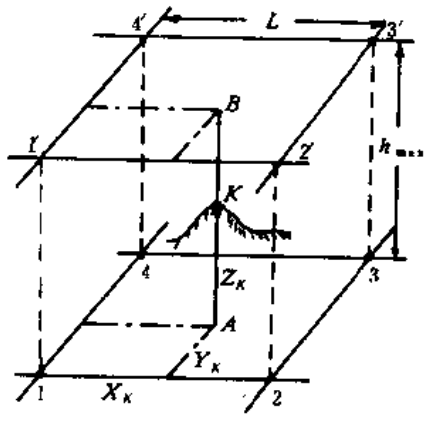


图 15-3-1

设在仪器上实时地切准一地面点P_K（X_K，Y_K，Z_K），为了正确地将左、右像片架驱动到该像点位置上，必须由贮存的高低格网点像坐标改正数快速地内插出该点的像片坐标改正数。

计算方法如下：

假设地面点K位于高低格网1′ 2′ 3′ 4′ 和1 2 3 4之间。并以低格网点1为坐标原点来表示K点坐标X_K，Y_K，Z_K（见图15-3-1），则内插分两步：

第一步：由四个格网点的改正数内插A和B点的像点坐标改正数，使用双线性内插公式：

$$\begin{bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dx_B \\ dy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{x_1} & D_{x_2} & D_{x_3} & D_{x_4} \\ D_{y_1} & D_{y_2} & D_{y_3} & D_{y_4} \\ D_{x_1'} & D_{x_2'} & D_{x_3'} & D_{x_4'} \\ D_{y_1'} & D_{y_2'} & D_{y_3'} & D_{y_4'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} \qquad (15\text{-}16)$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \left(1-\frac{X_K}{L}\right)\left(1-\frac{Y_K}{L}\right) \\ m_2 &= \left(1-\frac{Y_K}{L}\right)\left(\frac{X_K}{L}\right) \\ m_3 &= \left(\frac{X_K}{L}\right)\left(\frac{Y_K}{L}\right) \\ m_4 &= \left(1-\frac{X_K}{L}\right)\left(\frac{Y_K}{L}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}17)$$

第二步：由点A和点B的像坐标改正数内插K点的像坐标改正数dx_K和dy_K。

$$\begin{bmatrix} dx_K \\ dy_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_A & dx_B \\ dy_A & dy_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\dfrac{Z_K}{h_{\max}} \\ \dfrac{Z_K}{h_{\max}} \end{bmatrix} \qquad (15\text{-}18)$$

上述计算必须对左、右片分别计算，并将该改正数化为像片架坐标改正数，与由解析测图仪LOOP程序求出的像片架坐标相加，获得正确的像片车架坐标，控制伺服系统去驱动像片，对准所要量测的点。

由于上列式（15-16）到（15-18）的计算十分简单，可以利用解析测图仪LOOP程序执行中的CPU空闲时间完成。

五、C系列解析测图仪上SPOT立体测图软件系统

武汉测绘科技大学摄影测量与遥感系利用上述原理为C-100，C-130解析测图仪研制了SPOT立体测图软件包。图15-3-2给出了系统框图及各程序之间的关系，图15-3-3表示原LOOP程序与新增B154实时坐标改正程序的关系。

利用该软件系统在C-130解析测图仪上对法国马赛地区的一个SPOT立体像对进行了试验，以验证程序的正确性。该立体像对的技术数据列于表15-3-1中。

根据32个检查点求出的坐标均方根误差对于X、Y、Z坐标分别为：$\sigma_x = \pm 5.4$ m，$\sigma_y = \pm 7.1$ m，$\sigma_z = \pm 5.5$ m地形图上地物点平面位置

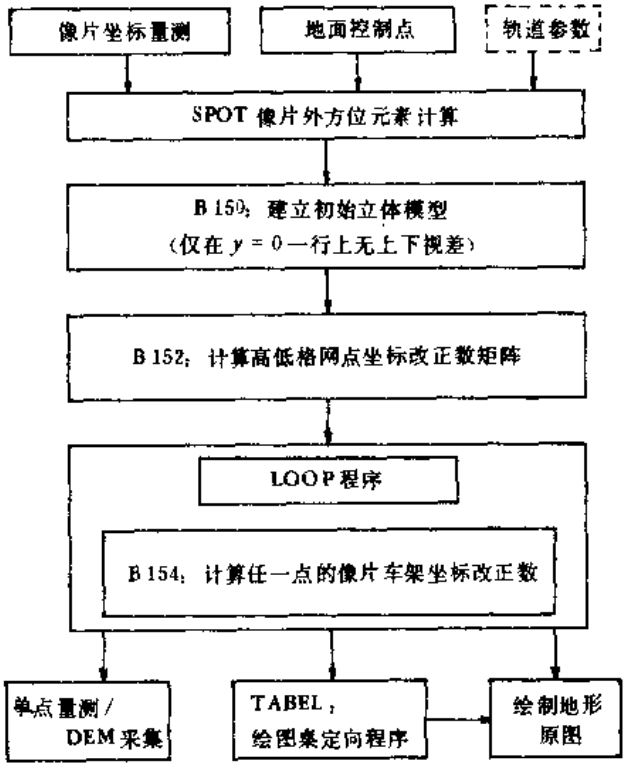


图 15-3-2

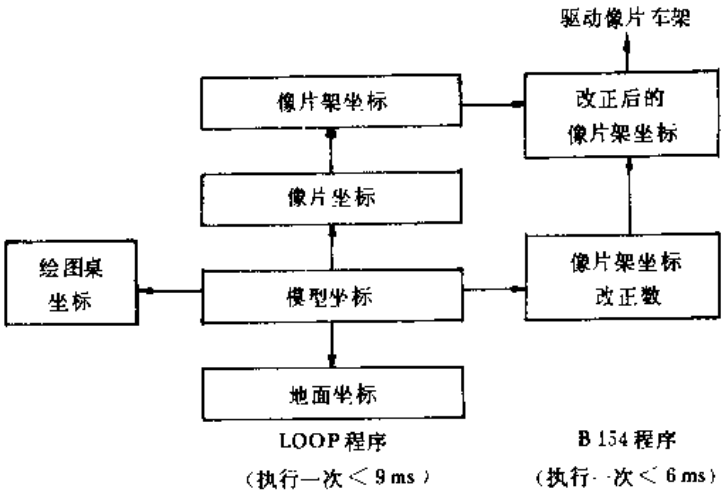


图 15-3-3

马赛SPOT立体像对的技术数据　　表 15-3-1

像片来源	CCTST006038	CCTST005353
仪器	HRV1	HRV1
平均轨道高度	830 km	830km
主距	2087.4mm	2087.4mm
像片比例尺	1:400 000	1:400 000
像幅大小	15×15cm	15×15cm
地面大小	~60×60km	~60×60km
基高比	1:1.05	
摄影日期	86、5、11	86、5、18

中误差为1:50000比例尺图上的±0.25mm，表明SPOT立体测图在具有良好基高比的情况下，可满足山区1:50 000比例尺测图的要求。

存在的主要问题是放大8倍成图时，面状地物的分辨能力较差，只有对测区熟悉的作业员才可以辨认出有关地物。此外，由于CCD线性阵列扫描的特点，不可能同时在整个模型上消除上下视差，只在测标点附近范围内才有完好的立体视觉，这也需要有足够作业经验的作业员来进行SPOT像对的量测处理工作。

§15.4　利用SPOT影像制作正射像片

在第十四章中我们已讲过，正射投影仪是一台计算机控制下的影像投影变换仪器。目前通用的几种正射投影仪均以线元（缝隙）为微分单元，采用边缘两端点严格满足变换关系的一级割线方式进行微分纠正。因此，它既可以实现框幅式像片由面中心投影到正射投影的变换，也必然可以实现线性阵列传感器行中心投影到正射投影的变换。关键在于如何

由DEM数据和像片外方位元素生成SPOT像片断面数据来提供给正射投影仪使用。

如果SPOT立体像对量测时直接按照正射投影时的缝隙长度进行断面量测，则可在获得地面DEM的同时，记录左（或右）片的SPOT像片坐标，直接获得在OR—1上所需要的像片断面数据文件。

如果直接由测区的已知数字高程模型出发，则需要事先通过光束法平差或单片后方交会方式（见上文§15.2和§15.3）求出SPOT像片的12个外方位元素。于是可以编写一个类似于SORA程序的、专为SPOT像片断面计算用的程序。该程序的计算公式为式（15-6）和（15-7），遵照在§15.3中阐述过的理由，计算仍为迭代法，其程序框图列于图15-4-1中。计算步骤为：

第一步：用DEM一个格网点X、Y、Z坐标和外方位元素φ_0、ω_0、κ_0、X_{S_0}、Y_{S_0}、Z_{S_0}代入式（15-7）计算像片坐标y_p。

第二步：将y_p代入式(15-6)中计算该行CCD影像的瞬时外方位元素φ_l、ω_l、κ_l、X_{S_l}、Y_{S_l}、Z_{S_l}。

第三步：用φ_l、ω_l、κ_l、X_{S_l}、Y_{S_l}、Z_{S_l}代入式（15-7）中计算该模型点对应的像点瞬时坐标x_l和y_l。

第四步：如果y_p正确，则求出的y_l应为零，于是若$|y_l|>\varepsilon$（规定的限差），则修改y_p，即y_p+y_l作为新的y_p值，然后返回第二步去，直至收敛为止。

最后要存贮所计算的x_l和y_p坐标最终值，形成SPOT像片断面数据。

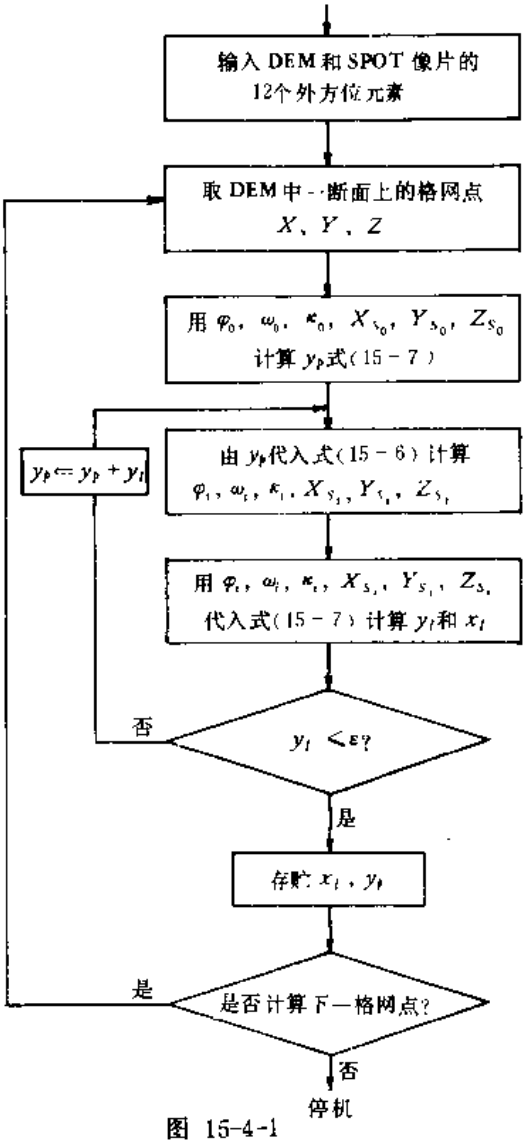


图 15-4-1

武汉测绘科技大学摄影测量与遥感系已按上述原理编制了相应的程序，能够按照OR—1正射投影仪对数据的格式要求，将SPOT像片晒印正射影像所需要的像片断面数据记录在磁带上。用此软件，已在OR—1制成了合乎1:50 000正射像片图精度要求的正射影像。

* §15.5 三行CCD线性阵列传感器影像的解析摄影测量处理

正如本章§15.1中指出，SPOT影像要构成立体像对需要从不同的轨道上对同一地面进行侧向扫描。为了保证有良好的基高比和无云的天气条件往往要等待几个月时间，这就会造成左、右像片较大的时差，从而影响立体观测效应。

而三行CCD线性阵列传感器可以几乎在同一时间获得同一地面不同透视中心的三 条重叠影像带A_s，B_s，C_s。影像A_s和C_s用来立体量测，而B_s用来制作正射像片。所以三行CCD线性阵列传感器及其应用也成为大家关心的一个课题。

一、三行CCD阵列传感器影像的构像方程式

从图15-5-1可知，对于向下扫描的图像B_s有：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \lambda R^T \begin{bmatrix} X-X_s \\ Y-Y_s \\ Z-Z_s \end{bmatrix} \tag{15-19}$$

或写成共线方程为：

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -f\frac{a_1(X-X_s)+b_1(Y-Y_s)+c_1(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)} \\ y &= -f\frac{a_2(X-X_s)+b_2(Y-Y_s)+c_2(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)} \end{aligned}\right\} \tag{15-20}$$

及其反算式：

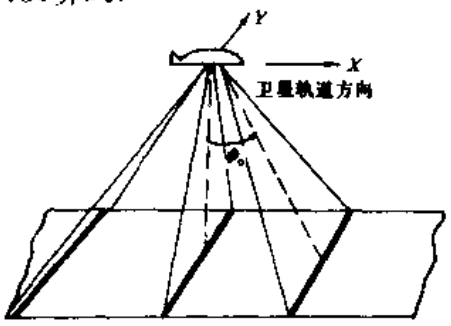


图 15-5-1

$$\left.\begin{aligned} \frac{X-X_s}{Z-Z_s} &= \frac{a_2y-a_3f}{c_2y-c_3f} \\ \frac{Y-Y_s}{Z-Z_s} &= \frac{b_2y-b_3f}{c_2y-c_3f} \end{aligned}\right\} \tag{15-21}$$

对于影像A_s和C_s，则相当于传感器阵列沿卫星轨道方向前或后倾斜了一个Φ_0角度。于是，此时的构像方程式为：

$$\begin{bmatrix} \cos\Phi_0 & 0 & -\sin\Phi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Phi_0 & 0 & \cos\Phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\sin\Phi_0 \\ 0 \\ -f\cos\Phi_0 \end{bmatrix} = \lambda R^T \begin{bmatrix} X-X_s \\ Y-Y_s \\ Z-Z_s \end{bmatrix} \tag{15-22}$$

相应的共线方程式为：

$$\left.\begin{aligned} (x) &= f\tan\Phi_0 = -f\frac{a_1(X-X_s)+b_1(Y-Y_s)+c_1(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)} \\ (y) &= y/\cos\Phi_0 = -f\cdot\frac{a_2(X-X_s)+b_2(Y-Y_s)+c_2(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)} \end{aligned}\right\} \tag{15-23}$$

以上诸式中外方位元素X_s，Y_s，Z_s，φ，ω，κ均指在获取该三行影像时刻t_i的相应数值。

也可以仿照对SPOT影像的处理，得到

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \lambda \underset{\Phi_0}{R^T} R^T \begin{bmatrix} X-X_s \\ Y-Y_s \\ Z-Z_s \end{bmatrix} = \lambda \overline{R}^T \begin{bmatrix} X-X_s \\ Y-Y_s \\ Z-Z_s \end{bmatrix} \tag{15-24}$$

式中 $\overline{R} = R_\varphi \cdot R_\omega \cdot R_\kappa \cdot R_{\Phi 0}$ (15-25)

或写成共线方程式为：

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -f\cdot\frac{\overline{a}_1(X-X_s)+\overline{b}_1(Y-Y_s)+\overline{c}_1(Z-Z_s)}{\overline{a}_3(X-X_s)+\overline{b}_3(Y-Y_s)+\overline{c}_3(Z-Z_s)} \\ y &= -f\cdot\frac{\overline{a}_2(X-X_s)+\overline{b}_2(Y-Y_s)+\overline{c}_2(Z-Z_s)}{\overline{a}_3(X-X_s)+\overline{b}_3(Y-Y_s)+\overline{c}_3(Z-Z_s)} \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}26)$$

如果式（15-25）中Φ_0取Φ_0，0，$-\Phi_0$，则可用式（15-26）表示三行CCD阵列扫描影像的共线方程一般式。

欲得线性化表达式可仿照§15.2中的方法，此处不作详细讨论了。

二、定向片间距的选择与基线长度的关系

如同SPOT影像一样，三行CCD影像在任意时刻t_j有不同的外方位元素，而且不可能计算每次扫描时的全部外方位元素。通常只能选取一些等间距的离散扫描周期，把在这些时刻获取的三行影像称为定向片(图15-5-2)，并测定它们的外方位元素，而在其它时刻的三行CCD影像则通过简单的线性内插来求出。

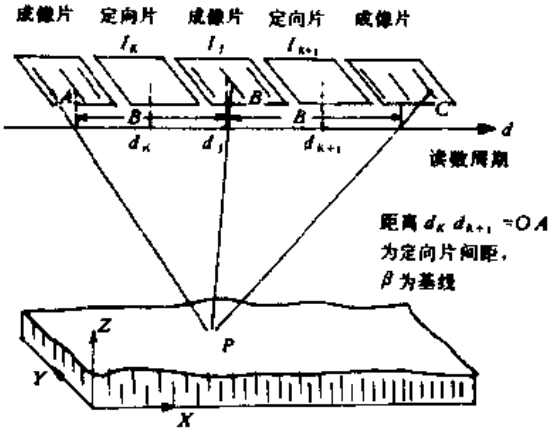


图 15-5-2

如何最佳地选择定向片的间距，才能使之有最好的几何稳定性呢？经分析研究，它与基线长度B有着十分密切的关系。

在图15-5-2中，像片I_K，I_{K+1}，…表示定向片，其余表示成像片I_j。成像片外方位元素由定向片外方位元素内插求出。从图中看出：像片I_j的六个外方位元素可如下求得：

$$\left.\begin{aligned} X_{s_j} &= C_j X_{s_K}+(1-C_j)X_{s_{K+1}} \\ Y_{s_j} &= C_j Y_{s_K}+(1-C_j)Y_{s_{K+1}} \\ Z_{s_j} &= C_j Z_{s_K}+(1-C_j)Z_{s_{K+1}} \\ \varphi_j &= C_j\varphi_K+(1-C_j)\varphi_{K+1} \\ \omega_j &= C_j\omega_K+(1-C_j)\omega_{K+1} \\ \kappa_j &= C_j\kappa_K+(1-C_j)\kappa_{K+1} \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{-}27)$$

式中：

$$C_j=\frac{d_{K+1}-d_j}{d_{K+1}-d_K}$$

我们来考察在平坦地区上空的一次三行CCD传感器的推帚式成像过程的几何关系。

首先写出共线方程式的线性化表达式，以地面点P在成像片I_j的构像为例，有：

$$V_{ij}=A_{ij}dX_1+B_{ij}dX_2-A_{ij}dX_3-l_{ij} \qquad (15\text{-}28)$$

其中

$$V_{ij}=[V_{x_{ij}}\quad V_{y_{ij}}]^T,\quad A_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\end{bmatrix}_{ij}$$

$$B_{ij}=\begin{bmatrix} a_{14}\ a_{15}\ a_{16} \\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\end{bmatrix}_{ij},\quad l_{ij}=[l_{x_{ij}}\ l_{y_{ij}}]^T$$

$$dX_1 = (dX_s, dY_s, dZ_s)_j^T,\ dX_2 = (d\varphi\ \ d\omega\ \ dK)_j^T$$
$$dX_3 = (dX\ \ dY\ \ dZ)_j^T$$

外方位元素未知数通过（15-27）式转化为定向片未知数的表达形式。

若定向片间距OA的选择使$B/OA = D$为整数时，由图15-5-3中所示的三个地面点P_1，P_2，P_3，可以列出它们相对于定向片未知数和地面坐标未知数的误差方程式系数矩阵（见表15-5-1）。

从图15-5-3中看出（以点P_2为例），任一地面点的三根成像光束所形成的三个像点误差方程式中，对左、右定向片的贡献导数C_i和（$1 - C_i$）是不变的。于是左（右）定向片光束构成三角链。

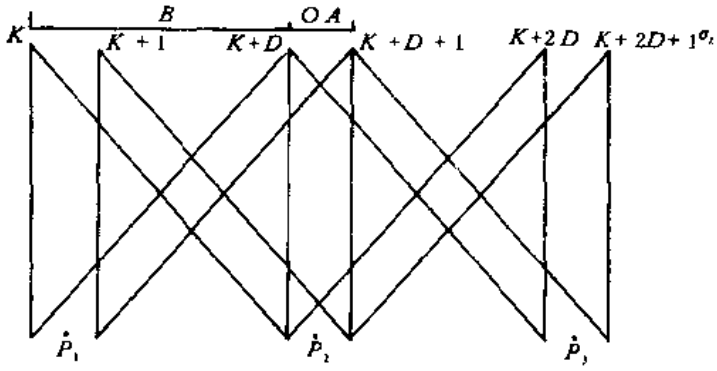


图 15-5-3

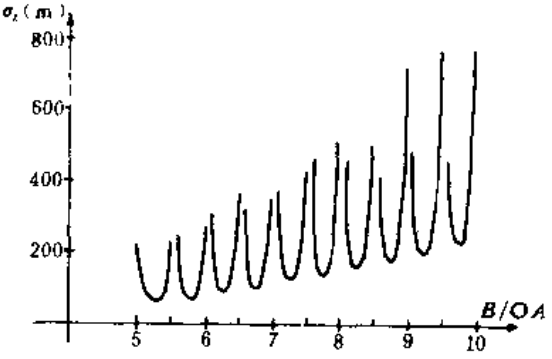


图 15-5-4

如果将与定向片K，$K + D$，$K + 2D$有关的外方位线元素各列元素相加，则得到一个新的列向量V_1。

$$V_1 = (C_1 A_1^T\ C_1 A_1'^T C_2 A_2^T C_2 A_2'^T C_2 A_2''^T C_3 A_3'^T C_3 A_3''^T)^T$$

而若将未知点P_1，P_2，P_3三列向量分别乘以$-c_1$，$-c_2$和$-c_3$然后相加，得到其线性组合后的新的列向量V_2：

$$V_2 = +(C_1 A_1^T C_1 A_1'^T C_2 A_2^T C_2 A_2'^T C_2 A_2''^T C_3 A_3'^T C_3 A_3''^T)^T$$

显然

$$V_1 \equiv V_2$$

这表明，误差方程式系数阵的列向量之间存在完全相关，故不是列满秩，因此，法方程式将是奇异的，即解是不定的。

以上分析表明，在理想竖直摄影情况和地面平坦时，若$B:OA$为整数D时，三行CCD空中三角测量将是不定解。

根据张森林所作的试验研究，三行CCD阵列传感器平差的高程加密中误差与B/OA值的关系有图15-5-4的结果。表明当$B/OA = D \pm 0.25$时，平差系统内部的几何状态最好。他试验中假设的传感器和摄影参数是按德国MOMS—02计划的设计参数，现列于表15-5-2中。

因此，如何提高和改善三行CCD阵列传感器影像的几何稳定性，仍是一个有待研究和解决的问题。

表 15-5-1

地面点P_1, P_2, P_3组成的子误差方程式

未知数 / 系数阵 / 地面点		定向片未知数（外方位元素）															地面点坐标未知数				
		…	K		$K+1$		…	$K+D$		$K+D+1$			$K+2D$		$K+2D+1$		…	…	P_1	P_2	P_3	…
			dX_1	dX_2	dX_1	dX_2		dX_1	dX_2	dX_1	dX_2		dX_1	dX_2	dX_1	dX_2						
P_1	射线B		C_1A_1	C_1B_1	$(1-C_1)\times A_1$	$(1-C_1)\times B_1$													$-A_1$			
	射线C							C_1A_1'	C_1B_1'	$(1-C_1)\times A_1'$	$(1-C_1)\times B_1'$								$-A_1'$			
P_2	射线A		C_2A_2	C_2B_2	$(1-C_2)\times A_2$	$(1-C_2)\times B_2$														$-A_2$		
	射线B							C_2A_2'	C_2B_2'	$(1-C_2)\times A_2'$	$(1-C_2)\times B_2'$									$-A_2'$		
	射线C												C_2A_2''	C_2B_2''	$(1-C_2)\times A_2''$	$(1-C_2)\times B_2''$				$-A_2''$		
P_3	射线A							C_3A_3'	C_3B_3'	$(1-C_3)\times A_3'$	$(1-C_3)\times B_3'$										$-A_3'$	
	射线B												C_3A_3''	C_3B_3''	$(1-C_3)\times A_3''$	$(1-C_3)\times B_3''$					$-A_3''$	

计算图15-5-4结果时使用的实验参数　　表 15-5-2

摄影机主距	660.00mm	比例尺	1:500000
行传感器间距	308.00mm	飞行速度	25600km/h
收敛角	25°02′	像素地面分解力	5 m
像素大小	10μ	沿飞行方向的地面点间距	2.00km
读数频率	1422.22/s	垂直于飞行方向的地面点间距	9.00km
摄影航高	330.00km	地面点高程	0.00km
基线长	154.00km	地面点个数	1280
航线长	510.00km	控制点个数	4
航线宽	36.00km		

本章习题与思考题

1.什么叫CCD线性阵列传感器？它是怎样获得数字影像的？

2.简述SPOT卫星上的CCD线性阵列传感器的技术特点。它是如何获得立体影像的？

3.简述三行CCD线性阵列传感器的成像原理及获得立体影像的方法。

4.卫星影像的解析处理将涉及哪些坐标系？它与航空像片的解析处理有何差别？

5.列出SPOT像片的构像方程式？一张SPOT像片有多少个投影中心？有多少个未知定向参数？

6.试从SPOT共线方程推导出线性化误差方程式的系数矩阵来。

7.如何在现有的解析测图仪上处理SPOT立体像对？

8.利用每张SPOT像片上九个标准点（$\Delta X=\Delta Y=7$cm），试计算外方位元素间的相关系数。计算中可利用马赛SPOT片的技术参数。

9.试绘图表示在C—130上进行SPOT立体测图的作业过程？为此需在实时和非实时作业中增加哪些软件？并简述其原理与功能。

10.如何由DEM和外方位元素计算制作SPOT正射影像所需要的像片断面数据？

11.列出三行CCD线性阵列传感器影像的构像方程式。

12.为什么三行CCD影像的几何稳定性与B/OA的数值有关？

13.试绘图和列表分析当$B/OA=D\pm0.5$时的平差方程的几何状态。

14.你认为怎样才能改善三行CCD阵列传感器影像的几何稳定性？

15.试比较利用框幅相机在摄影底片上成像与用CCD数字影像传感器的优缺点。

第十六章　摄影测量中的自由网平差与变形分析

§16.1　高精度摄影测量与变形分析

一、摄影测量用于变形分析的可能性

建筑物变形主要是大坝的变形，此外如桥梁、烟囱、高层建筑以及水利工程的闸门等都有变形问题需要研究和监测。以大坝变形为例，其变形测量的费用占建坝费用的0.7%。若建坝费用为1亿元时，则需70万元用于大坝变形观测，研究它受气候、冰霜、洪水等的影响。

另一类需要监测和研究的变形观测为地表的地壳形变、地面沉陷，滑坡和地震预报。尤其在地下矿区、城市地陷区及滑坡地区更需要长期的监测。湖北宜昌新滩滑坡预测成功，使人民生命财产免受重大损失，这是长期定时观测取得的结果，是测量工作者直接为国民经济服务，对人民生命、财产、生活安全作出的贡献。

长期以来，国内外的变形观测大都采用大地测量方法，而采用摄影测量方法的比较少见。这主要是因为传统的摄影测量方法精度仅达到$D/2000\sim D/5000$（D为摄站至目标点的距离），满足不了变形观测的要求。在一般情况下，结构物监测的精度范围为$D/20000$至$D/100000$。利用现代解析摄影测量和数字摄影测量手段，这种精度要求是可以达到的。

现代的高精度解析和数字摄影测量，能使像片坐标量测精度达到2～3μm；顾及粗差检测和系统误差补偿的解析法平差方法将为变形观测提供有效的手段。尤其是实时摄影测量系统将会自动、周期地采集所要监测目标的影像信息，将会为变形测量和监测工作开辟新的一页。

应当认识到，用摄影测量解析方法进行变形观测和分析有一些特有的好处。第一，它可以快速地获得结构物变形和移动的瞬间信息，而地面测量往往不可能获得同一时刻的全部测量数据。第二，由于摄影是一种遥感方法，作业员不需触及所监测的对像，这对于研究和预报滑坡、火山爆发、地震等自然灾害十分重要，它可避免作业人员在危险环境中作业。第三，摄影测量方法，尤其是航空摄影测量方法可以提供大面积的变形测量结果，这对一般大地测量方法是难以实现的。最后，摄影测量方法作变形分析所需要的实地测量工作量要比大地测量方法少得多。

二、摄影测量用于变形观测的概况

摄影测量用于变形观测在国内外曾进行了多次试验，其精度正随着摄影测量和摄影仪器的改进，内外方位元素测定精度的提高以及平差计算方法的改进和摄站布设的最优化而逐步提高。

1972年，加拿大Branden Berger用增加摄站，增多控制点以及改进觇标等方法使地面摄影测量的精度提高到$D/15000$。

1974年，美国华盛顿州大学Veress用威特P30摄影机，加跨水准器，使κ角安置精度达到$\pm 5''$的精度，φ和ω角则达到$\pm 2''\sim\pm 5''$的精度，并考虑到仪器的偏心改正（即物镜前节点至摄影机经纬仪旋转中心之间的距离），在利用四个地面控制点的情况下，使摄影测量精度提高到$D/40000$。1975年，他用威特BC4弹导摄影机（一种长焦距的摄影机），加上外方位元素和偏心改正等数据，并用大地测量方法测定摄影站点坐标或用大地控制点作后方交会，进行联合平差，以获得摄影站点的最佳位置，并用威特A 7作单像坐标仪等措施使精度达到$D/100000$。

1978年Veress用航摄仪改装的KA2摄影机(主距为610mm,23×23cm像幅,玻璃干片)，在固定的水泥墩上摄取立体像对（不用测各种参数），得到观测点的中误差为$\pm$ 6mm～$\pm$15mm,使精度达到$D/140000$。

1981年,国外文献报导了把地面摄影测量与航测结合的方法。航摄用RC8($f=152$mm，$H=457$m），地面摄影用KA2，试验取得了良好的结果。

80年代以来，航测开始用于地面沉陷、滑动等观测，自由网平差用于摄影测量变形观测，在理论和方法上已日趋成熟。近景摄影、大坝变形以及地面沉陷、滑动等都可以不用绝对坐标，使摄影测量更为广泛地用于变形观测。

1985年联邦德国波恩大学Zinndorf介绍了自由网平差在近景摄影测量中的应用，并指出，在一个局部的近景摄影测量网中，常常不可能或不必要测出对整个网进行定位的大地测量控制点。在此情况下，自由网平差将能够提供不受任何控制点影响的结果。由于其点位误差椭圆将更小，使总体误差更小，且分布更均匀。

自1985年来，联邦德国Ackermann教授曾对冰岛火山活动地区的多时相影像用最小二乘相关方法自动量测同名像点，并进行变形分析。在变形分析程序中不仅对是否发生了变形进行检验，而且还要判断发生了什么样的形变。在程序中引入了模式分析的思想。

1987年在斯图加特召开的第41届摄影测量周上，有五篇论文讨论用摄影测量方法进行建筑物、地下矿井、汽车形体，钢结构变形测量和形体控制的方法和试验结果。尤其是斯图加特大学与欧波同仁研制的工业体（如汽车）外形的自动表面量测系统Indusurf，乃是利用了在线影像匹配（基于特征和基于灰度）技术。美国布朗研究所用CRC-123×23cm高质量相机，反光标志和自动量测方法配以自由网平差对大型天线反射器表面的量测精度达到了1/50万～1/100万的超高精度。由此可见，用摄影测量法进行变形分析已逐渐成为较成熟而先进的一种方法。

§16.2 自由网平差的基本知识

这里的自由网平差指的是秩亏自由网平差。所谓秩亏是相对于满秩而言的，因此下面我们先从满秩平差入手，然后再讨论秩亏自由网平差原理。

一、满秩平差问题

假设平差的数学模型为高斯—马尔可夫模型，即：

$$E(l)=A\tilde{X},\quad D(l)=\sigma_0^2Q_{ll}=\sigma_0^2P^{-1} \tag{16-1}$$

按最小二乘法写成间接观测平差的观测值方程式（或称误差方程式）为：

$$V=A\hat{X}-l,\quad P \tag{16-2}$$

若A矩阵为列满秩，即$R(A)=u$,只要P为满秩矩阵（一般为对称正定矩阵），则可证明法方程式系数阵是满秩的，即：

$$R(A^TPA)=u,\ \therefore d=u-R(A^TPA)=0$$

此时平差是无秩亏的，法方程式系数阵$N=A^TPA$有凯莱逆，于是可求出

$$\hat{X}=(A^TPA)^{-1}A^TPl, \tag{16-3}$$

解是唯一的。

由数理统计和参数估计理论知：

$$E(\hat{X})=\tilde{X}$$

$$D(\hat{X})=\mathrm{MIN}$$

称$\hat{X}$为未知参数$\tilde{X}$的最佳线性无偏估计。

要保证得到满秩平差，其前提条件是不存在起始数据和图形秩亏。对于一维到三维平差网，其起始数据列于表16-2-1中。

测量平差网的起始数据　　表 16-2-1

维　数	网　形	观测值种类	起始数据（自由基准参数）	
1	高程网	高　差	1个	原点平移
2	平面网	距离和方位角	2个	X、Y方向平移
		距离或距离与方向	3个	两个平移量、绕Z轴旋转
		方向、距离比或比例尺未知下的距离与方向；平面区域网平差	4个	X、Y方向平移绕Z轴的旋转，及比例尺缩放
3	空间网	距离＋天顶距或距离＋水平方向或距离＋水平方向＋天顶距	4	X、Y、Z方向平移，绕Z轴旋转
		水平方向＋天顶距或上述$d=4$中加入比例尺未知数	5	三个平移、一个旋转，一比例尺系数
		距　离	6	三个平移，三个旋转
		摄影测量三维网或比例尺未知的空间距离网	7	三个平移，三个旋转、一个比例尺缩放

A^+，又称Moore—Penrose逆或Helmert逆。其定义如下：

设矩阵A为$n\times m$阶，如果有一广义逆G满足下列四个方程式：

$$\left.\begin{aligned} AGA &= A \\ GAG &= G \\ (GA)^T &= GA \\ (AG)^T &= AG \end{aligned}\right\} \tag{16-8}$$

则称G为A的A^+型广义逆。

伪逆A^+的性质是：

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ A^- \text{的四个性质对} A^+ \text{都成立。这是因为} \\ &\quad A^+ \text{也是一种 } A^- \text{ 型广义逆；} \\ &(2)\ (A^+)^+ = A \\ &(3)\ A^+ \text{是唯一确定的广义逆} \end{aligned}\right\} \tag{16-9}$$

2. 秩亏方程组的最小二乘解

对于式（16-4），按最小二乘法原理

$$V^T PV = \mathrm{MIN}$$

得到

$$NX = A^T Pl$$

其中

$$N = A^T PA \quad 。$$

根据定理：非齐次方程组的一般解等于它的任一特解与对应齐次方程组一般解的和，可得到其广义逆下的解为：

$$X = N^- A^T Pl + (I - N^- N)M \tag{16-10}$$

此处，M为任一向量。

上式中右端后半部为

$$NX = O$$

的通解

$$X = (I - N^- N)M$$

［验证］

$$NX = (N - NN^- N)M = O$$

3. 秩亏方程组的最小范数解

为了得到唯一解，需在最小二乘解法原则基础上附加另外的条件，通常加入解的范数为最小的条件，称为最小范数条件。

设满足法方程式（16-5）的一组解为$X = (x_1, x_2, \cdots x_u)^T$，则向量$X$的范数为：

$$\|X\| = (X^T X)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_u^2} \tag{16-11}$$

可以证明，由伪造N^+求出的解能满足上述条件，此时的解为：

$$\left.\begin{aligned} X &= N^+ A^T Pl \\ D(X) &= \sigma_0^2 N^+ \end{aligned}\right\} \tag{16-12}$$

还可以证明，最小范数解不因最小范数逆不同而异，即最小范数解是唯一的。

式（16-12）中的伪逆N^+可由下式求出：

$$N^+ = N(NN)^- N(NN)^- N \tag{16-13}$$

（二）附加条件法（或称伪观测值法）

附加条件法的基本思想是利用法方程式系数阵零特征值对应的特征向量矩阵构成一组附加条件：

$$\underset{d\cdot u}{G^T}\ \underset{u\cdot 1}{X}=O \quad (\text{其中}G^TG=I) \tag{16-14}$$

以消除秩亏。然后求出在这组条件下满足最小二乘原则的未知数向量。于是，在顾及式（16-14）和$V^TPV=\text{MIN}$的情况下，用条件极值的原理作函数

$$\psi=V^TPV+2K^T(G^TX)$$

上式对X求导并令其等于零，得

$$2V^TPA+2K^TG^T=O$$

化简后得

$$A^TPAX+GK=A^TPl$$

与式（16-4）联立即得：

$$\left.\begin{aligned}NX+GK&=A^TPl\\G^TX&=O\end{aligned}\right\} \tag{16-15}$$

方程组（16-15）的唯一解为

$$\left.\begin{aligned}X&=(N+GG^T)^{-1}A^TPl\\D(X)&=[(N+GG^T)^{-1}-GG^T]\end{aligned}\right\} \tag{16-16}$$

它既与上述伪逆解法等价，而且也等价于在原观测值方程中引入附加伪观测值方程V_2一样，现分析如下。

$$\left.\begin{aligned}V_1&=A\hat{X}-l\ ,\ P\\V_2&=G^T\hat{X}-O\ ,\ I\end{aligned}\right\} \tag{16-17}$$

因为系数阵$\begin{pmatrix}A\\G^T\end{pmatrix}$为列满秩，故它有唯一最小二乘解：

$$X=(A^TPA+GG^T)^{-1}A^TPl=Q'A^TPl$$

由协方差传播定律知

$$Q_{XX}=Q'A^TPP^{-1}PAQ'=Q'NQ'$$

$\because$ $Q'(N+GG^T)=I$，

$\therefore$ $Q'N=I-Q'GG^T$

又因为

$$AG=O,$$

故

$$Q'NG=G-Q'G=O$$

故有

$$Q'G=G$$

代入上面Q_{XX}式中有

$$\begin{aligned}Q_{XX}&=(I-GG^T)Q'\\&=Q'-G(Q'G)^T=Q'-GG^T=(N+GG^T)^{-1}-GG^T\end{aligned}$$

与上面由附加条件法所得之结果式（16-16）完全相同。

三、自由网拟稳平差

上述不论从任何方面去理解，均是满足全部未知数有最小范数，即

$$X^T X = \mathrm{MIN}。$$

而在变形监测网中，由于有些点（X_1）可能是动点，而仅有一部分点（X_2）是相对稳定的，因此，此时平差所遵循的原则应当是：

$$\left.\begin{aligned} V^T PV &= \mathrm{MIN} \\ X_2^T X_2 &= \mathrm{MIN} \end{aligned}\right\} \tag{16-18}$$

在近景摄影测量平差中，平差未知数包括两大类，一类是像片定向未知数，一类是物点坐标未知数。显然，对摄影测量变形网平差应遵循的最小范数条件只对物点坐标未知数中的相对稳定点而言的。

如果按附加条件法来推导，则引入的附加条件为：

$$B^T X_2 = O \tag{16-19}$$

其中的B阵通过下式求出：

$$B = EG \tag{16-20}$$

式中：E为u维方阵（u为未知数个数），其中对应于X_2中未知数的主对角线元素为1，其余全部为0。

还可以一般地利用S变换将全部迹最小下的解X和协因素阵Q（X）转到部分迹最小的情况中去，或者从这一部分迹最小的解导出那一部分迹最小的解来。

一般地，由参考基准系K的平差结果变换到基准系i结果的公式如下：

$$\left.\begin{aligned} X_i &= S_i X_K \\ Q_i &= S_i Q_K S_i^T \end{aligned}\right\} \tag{16-21}$$

其中的u维S变换矩阵为：

$$\left.\begin{aligned} S_i &= I - G\,(G^T E_i G)^{-1} G^T E_i \\ \text{或} \quad S_i &= I - G\,(B_i^T G)^{-1} B_i^T = I - R_i \end{aligned}\right\} \tag{16-22}$$

从式（16-22）中看出，S变换矩阵与先前平差所用的参考基准无关（式中未出现下标K），仅与所希望变换到的参考基准i有关。

S矩阵有下列性质

（1）
$$S_i^2 = S_i \tag{16-23}$$

〔证明〕

$$\begin{aligned} S_i^2 &= (I - G\,(B_i^T G)^{-1} B_i^T)(I - G(B_i^T G)^{-1} B_i^T) \\ &= I - 2G\,(B_i^T G)^{-1} B_i^T + G\,(B_i^T G)^{-1} B_i^T G\,(B_i^T G)^{-1} B_i^T \\ &= I - G\,(B_i^T G)^{-1} B_i^T = S_i \end{aligned}$$

（2）
$$S_2 S_1 = S_2 \tag{16-24}$$

〔证明〕

$$S_2 S_1 = I - G (B_2^T G)^{-1} B_2^T - G (B_1^T G)^{-1} B_1^T + G (B_2^T G)^{-1} B_2^T G (B_1^T G)^{-1} B_1^T$$
$$= I - G (B_2^T G)^{-1} B_2^T = S_2$$

由此可推广到：

$$S_i S_K S_j \cdots = S_i$$

即连续多次 S 变换时，其结果仅由最后一次变换来确定。

四、三维摄影测量网附加条件矩阵 G 和 B 的结构形式

经推导，当考虑到满足全部未知数有最小范数，即 $|X^T X| \to \mathrm{MIN}$ 时，三维摄影测量网的 G^T 矩阵有下列形式：

外方位元素未知数　　物点坐标未知数

$$G^T_{7\cdot u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Z_{S_1} & Y_{S_1} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & 0 & -Z_1 & Y_1 & \cdots & 0 & -Z_K & Y_K \\ Z_{S_1} & 0 & -X_{S_1} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots & Z_1 & 0 & -X_1 & \cdots & Z_K & 0 & -X_K \\ -Y_{S_1} & X_{S_1} & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots & -Y_1 & X_1 & 0 & \cdots & -Y_K & X_K & 0 \\ X_{S_1} & Y_{S_1} & Z_{S_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & X_1 & Y_1 & Z_1 & \cdots & X_K & Y_K & Z_K \end{bmatrix} \quad (16\text{-}25)$$

其中：a_i，b_i，c_i 为第 i 的方向余弦值。

对于近似垂直航空摄影，可取

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在这样的自由网中，未知数以其近似值为基准作一置平，使得网点上所有未知数改正数有最小范数。

对于拟稳自由网平差，只要将不需要考虑的那些未知数的相应列填上零，这其中也包含所有外方位元素未知数。于是得到矩阵 B^T 的表达式为：

外方位元素未知数　　坐标未知数不考虑的点

$$B^T_{7\cdot u} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -Z_1 & Y_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -Z_K & Y_K \\ & & & Z_1 & 0 & -X_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & Z_K & 0 & -X_K \\ & & & -Y_1 & X_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -Y_K & X_K & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & X_K & Y_K & Z_K \end{bmatrix} \quad (16\text{-}26)$$

将式（16 25）代入式（16 16）中，便可求得摄影测量平差的最小二乘、最小范数解。

然后将式（16-26）代入（16-22）中进而可由式（16 21）求出拟稳自由网平差的结果 。

§16.3 摄影测量秩亏自由网平差的几何解释

变形观测的目的是利用测量手段来监测物点的变形。我们所关心的是被监测物体有无变形和发生了什么样的变形，而对于物点的绝对坐标往往并不感兴趣。因此，我们可以用秩亏自由网平差原理来解求各点的最佳相对位置，而不强求一定要有足够的大地测量控制点。或者是在有控制的情况下，避免由于控制点的作用带来网的精度的不均匀性。

下面我们来剖析一下摄影测量秩亏自由网平差的几何意义，看看它会给我们带来什么好处？

设摄影测量网中无任何控制信息，则三维网的定位需要7个参数，故秩亏为7。设法方程式已归化为仅含地面坐标未知数，用各地面点的坐标改正数ΔX_i，ΔY_i，ΔZ_i来表示，则附加条件为

$$G^T X = O \tag{16-27}$$

其中

$$\underset{7\cdot 3k}{G^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Z_1 & Y_1 & \cdots & 0 & Z_K & Y_K \\ Z_1 & 0 & -X_1 & & Z_K & 0 & -X_K \\ -Y_1 & X_1 & 0 & \cdots & -Y_K & X_K & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & \cdots & X_K & Y_K & Z_K \end{bmatrix}, \underset{3k\cdot 1}{X} = \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta Z_1 \\ \cdots \\ \Delta X_K \\ \Delta Y_K \\ \Delta Z_K \end{bmatrix} \tag{16-28}$$

为了便于分析附加条件的几何意义，将$G^T X$乘开，得到：

$$\sum_1^k \Delta X_i = 0,\ \sum_1^k \Delta Y_i = 0,\ \sum_1^k \Delta Z_i = 0 \tag{16-29a}$$

$$\sum_1^k (-Z_i \Delta Y_i + Y_i \Delta Z_i) = 0 \tag{16-29b}$$

$$\sum_1^k (Z_i \Delta X_i - X_i \Delta Z_i) = 0 \tag{16-29c}$$

$$\sum_1^k (-Y_i \Delta X_i + X_i \Delta Y_i) = 0 \tag{16-29d}$$

$$\sum_1^k (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) = 0 \tag{16-29e}$$

显然，条件式（16-29a）表示坐标改正数的总和应为0，即平差后网中重心点的位置保持不变。

条件式（16-29b,c,d）确定了像片外方位元素角元素的微小旋转$d\varphi, d\omega, d\kappa$，而条件式（16-29$e$)确定了模型比例尺。下面进一步分析这些条件的几何意义。

（1）矢径角的变化

网的重心坐标为$\overline{X}=\sum_1^k X_i/K$，$\overline{Y}=\sum_1^k Y_i/K$，$\overline{Z}=\sum_1^k Z_i/K$，网中各点至重心点的矢径角为：

$$K_i=\mathrm{tg}^{-1}\frac{Y_i-\overline{Y}}{X_i-\overline{X}}$$

这里所求出的是在XY面上的矢径角。微分该式得：

$$dK_i=\frac{-[(Y_i-\overline{Y})/(X_i-\overline{X})^2]}{1+[(Y_i-\overline{Y})/(X_i-\overline{X})]^2}dX_i+\frac{1/(X_i-\overline{X})}{1+[(Y_i-\overline{Y})/(X_i-\overline{X})]^2}dY_i$$

$$=\frac{1}{(X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2}[-(Y_i-\overline{Y})dX_i+(X_i-\overline{X})dY_i]$$

$$=\frac{1}{\overline{S_i^2}}[-(Y_i-\overline{Y})dX_i+(X_i-\overline{X})dY_i]$$

式中$\overline{S_i}$为点i至重心点的水平距离。

将符号d改写成Δ，则有：

$$\overline{S_i^2}\Delta K_i=[-(Y_i-\overline{Y})\Delta X_i+(X_i-\overline{X})\Delta Y_i]$$

$$=-Y_i\Delta X_i+\overline{Y}\Delta X_i+X_i\Delta Y_i-\overline{X}\Delta Y_i$$

取总和

$$\sum_1^k\overline{S_i^2}\Delta K_i=\sum(-Y_i\Delta X_i+X_i\Delta Y_i)+\sum_1^k(\overline{Y}\Delta X_i-\overline{X}\Delta Y_i)$$

在式（16-27）的附加条件下，由式（16-29a）和式（16-29d）的结果立得：

$$\sum_1^k\overline{S_i^2}\Delta K_i=0$$

用同样方法可求出在XZ和YZ面上的矢径角也具有这个特征。

这就是说，伪逆自由网平差在所加约束条件下使网中各点至重心点向量的矢径角变化的带权总和为零（权为$\overline{S_i^2}$）。

（2）矢径长度的变化

矢径距为空间距离

$$S_i^2=(X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2+(Z_i-\overline{Z})^2$$

两边全微分，有：

$$S_i dS_i=(X_i-\overline{X})dX_i+(Y_i-\overline{Y})dY_i+(Z_i-\overline{Z})dZ_i$$

或写成增量形式：

$$S_i\Delta S_i=(X_i-\overline{X})\Delta X_i+(Y_i-\overline{Y})\Delta Y_i+(Z_i-\overline{Z})\Delta Z_i$$

取总和，并顾及（16-29a）和（16-29e）式，则有

$$\sum_1^k S_i\Delta S_i=\sum_1^k(X_i\Delta X_i+Y_i\Delta Y_i+Z_i\Delta Z_i)=0$$

所以，附加条件法将意味着平差中矢径长度的变化的带权总和为0（权为S_i）。

综合以上分析可知，三维摄影测量网进行自由网秩亏平差，在附加条件$G^TX=O$的约束下将有下列几何含义：

（1）平差后网中重心点的位置保持不变；

（2）平差后网中各点至重心点的矢径角变化的带权（权为$\bar{S}_i^2$）总和为零；

（3）平差后网中各点至重心点的矢径距变化的带权（权为S_i）总和为零。

这就更加形象地解释了作为基准点的坐标改正数向量有最小范数的几何含义。

如果是拟稳自由网平差，则上述的讨论仅针对作为相对稳定的那些点而言的。

§16.4 秩亏自由网平差原理用于摄影测量变形分析

设有两期观测值，现欲进行变形分析。这两期观测值的特点是：它们可能是由同一台仪器，用同样的摄影材料，由同一作业员在同样摄影测量仪器上量测获得的。因此，对这两期观测值的处理可以分别平差后对差向量$d = X^{(2)} - X^{(1)}$进行变形分析，也可以同时对两期观测值进行联合平差，并对平差结果进行检验。

一、分别平差的数学模型

在取得了所有未知数的初始值之后，对每期观测值分别进行下列自检校光束法区域网拟稳平差：

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= At + BX_1 + CX_2 + D\cdot S - l \quad , P_1 \\ V_2 &= \quad G^T X_2 \quad - 0 \ , \quad P_2 = I \\ V_3 &= \quad S - 0 \ , P_3 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} \end{aligned}\right\} \tag{16-30}$$

式中：t 为像片定向未知数向量，

X_1 为动点坐标未知数向量，

X_2 为拟稳点坐标未知数向量，

S 为系统误差附加参数。

按式（16 16）可得到解向量和Q_{XX}，以及单位权中误差估值

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^T P V}{n-u}}$$

如果两次平差中基准不统一，则应通过式（16 22）进行S变换，使之归化到相同的拟稳基准上。

获得两期建立在相同的拟稳基准上的平差结果后，便可用统计方法进行变形分析。一般均采用F检验法：

$$d = X^{(1)} - X^{(2)} \tag{16-31}$$

假设两期观测值不相关，则

$$Q_{dd} = Q_{XX}^{(1)} + Q_{XX}^{(2)}$$

对坐标差向量的二次型进行F检验：

由$P_{dd} = Q_{dd}^{-1}$ 得，

$$\Omega = d^T P_{dd} d$$

或更一般由$P_{dd} = Q_{dd}^{-}$ 得

$$\Omega = d^T Q_{dd}^{+} d, \text{自由度} h = 3n - 7$$

又由两期观测得到多余观测数和单位权中误差$r^{(1)}$，$\hat{\sigma}_0^{(1)}$和$r^{(2)}$,$\sigma_0^{(2)}$,并令$r = r^{(1)} + r^{(2)}$，则：

$$\hat{\sigma}_0^2 = (r^{(1)}\hat{\sigma}_0^{(1)2} + r^{(2)}\hat{\sigma}_0^{(2)2})/r$$

于是可建立下列F统计量

$$F_{a,h,r} = \frac{d^T Q_{dd}^{+} d}{h \cdot \hat{\sigma}_0^2} \tag{16-32}$$

选定显著水平a，以a, h, r为引数查F分布表得右尾分位值F_a。若$F > F_a$，则拒绝H_0而认为变形是显著的。

但是，以上的检验只能从总体上告诉我们是否存在显著变形，它不能指出变形在哪些点上。所以，当总体检验中$F > F_a$时必须继续进行统计检验。一种检验方法是将d向量中数值最大的d_j弃掉，再对总体方差进行F检验。此时设：

$$d = \begin{bmatrix} d_r \\ d_j \end{bmatrix} \qquad Q_{dd}^{+} = \begin{bmatrix} P_r & P_{rj} \\ P_{jr} & P_j \end{bmatrix} \tag{16-33}$$

则可建立

$$\Omega_j = \bar{d}_j^T P_j d_j \tag{16-34}$$

其中

$$\bar{d}_j = 2P_j^{-1} P_{jr} d_r + d_j$$

则有对d_r的F检验量

$$F(a, h-3, r) = \frac{\Omega - \Omega_j}{(h-3)\hat{\sigma}_0^2} \tag{16-35}$$

［证明］：

$$\Omega = d^T Q_{dd}^{-} d$$

$$= \begin{bmatrix} d_r^T & d_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r & P_{rj} \\ P_{jr} & P_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_r \\ d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_r^T P_r + d_j^T P_{jr} & d_r^T P_{rj} + d_j^T P_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_r \\ d_j \end{bmatrix}$$

$$= d_r^T P_r d_r + 2 d_r^T P_{rj} d_j + d_j^T P_j d_j$$

$$= d_r^T P_r d_r + (2 d_r^T P_{rj} P_j^{-1} + d_j^T) P_j d_j$$

$$= d_r^T P_r d_r + \bar{d}_j^T P_j d_j = d_r^T P_r d_r + \Omega_j$$

$$\therefore \quad d_r^T P_r d_r = \Omega - \Omega_j$$

故式（16-35）即为对d_r的F检验量。

如此进行，则所去掉的差向量d_j所对应的点便是有显著位移的点。对于这些初步确定有显著位移的点，还可以进一步分析是发生了什么样的变形。此时可将变形分析作为模式分析来处理。

由认为有形变点的坐标差向量d建立以下的数学模型：

$$E(d) = G(X) \cdot g + H(X) \cdot P \tag{16-36}$$

式中，

g表示坐标变换的未知数；

P为描述变形的参数；

$d = X^{(i)} - X^{(j)}$，其方差

$D(d) = C_{dd} = C_{X^{(i)}X^{(i)}} + C_{X^{(j)}X^{(j)}}$

若平差时$X^{(i)}$与$X^{(j)}$有相同的基准，或已用S变换使其基准相同，则$G = O$。于是讨论可简化为：

$$E(d) = H(X) \cdot P = (h_1, h_2, \cdots, h_k) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \end{bmatrix} \tag{16-37}$$

该变形模型可由各种基本模型组合而成（表16-4-1）。

各种基本的变形模型　　表 16-4-1

模　型	符号代表	参　数	系数矩阵（在所规定的坐标系）
平　移	T	P_1，P_2，P_3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
旋　转	R	P_4，P_5，P_6	$\begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix}$
比例尺变化	M	P_7，P_8，P_9 或 P_{10}	$\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$
剪形形变	S	P_{11}，P_{12}，P_{13}	$\begin{bmatrix} 0 & Z & Y \\ Z & 0 & X \\ Y & X & 0 \end{bmatrix}$
抛物弯曲形变	B	P_{14}，P_{15}	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ X^2 & Y^2 \end{bmatrix}$
拱形弯曲（下沉）	W	P_{16}，P_{17}	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X}{\sigma_X}\right)^2} & e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right)^2} \end{bmatrix}$

其中参数1～13（除参数10外），在内部坐标系（U、V、W）中是正交的，故可逐个地进行统计检验。

在变形分析中可供选择的坐标系均为重心点坐标系，但坐标轴的选择有三种可能：

（1）外部坐标系：与X、Y、Z平行，见图16-4-1。

（2）自然坐标系：描述斜坡上滑动面的一组点，见图16-4-2。

（3）内部坐标系：以主惯性轴来建立的三维坐标系，见图16-4-3。

下面看几个例子：

例1：点下沉指的是点在Z方向上的平移，其变形模型为$T(Z)$，见图16-4-4。

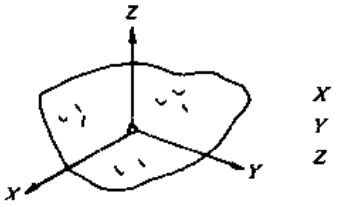


图 16-4-1

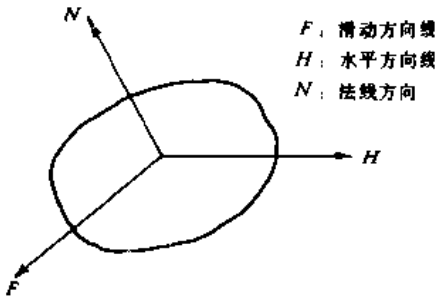


图 16-4-2

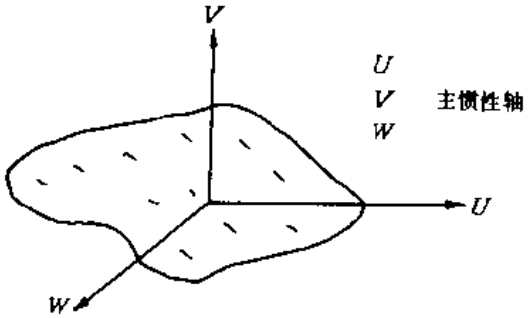


图 16-4-3

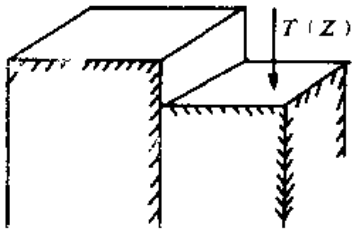


图 16-4-4

例2：滑动。它包括在滑动方向上的平移$T(F)$或附加有绕水平线的旋转$R(H)$，见图16-4-5。

各种基本变形模型通常可能组合起作用：

例如描述在斜坡面上的滑动可用（$T(F, Z)$, $R(H)$, $M(F, H)$）来表示（图16-4-6），其中包括五个参数：

图 16-4-5

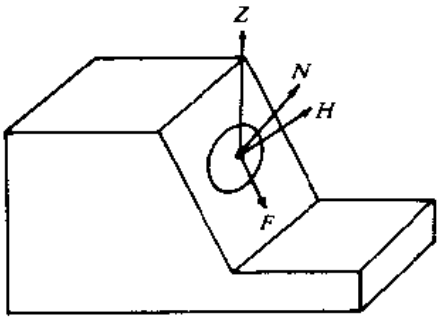


图 16-4-6

（1）在滑动方向上的平移（滑动）；（2）在Z方向上的平移（下沉）；（3）绕水平线的旋转（旋转）；（4）比例尺在滑动方向上的变化（压缩）和（5）比例尺在水平线方向上的变化（膨胀）。

通常可以根据先验知识由作业员选择模型，建立起式（16-37）来，然后对式中的参数进行统计检验，如可测定性检验、显著性检验和可区分性检验（见李德仁著《误差处理和可靠性理论》）。如果所检验的变形模型的测定性好，且显著并与其它变形模型能很好地区分开，则所得出的变形结果是可信的。

经过这样的处理，我们将能回答是否发生了显著的变形？变形在哪些部位，哪些点上？是一种什么样的变形？

通过变形分析找到了新的动点和拟稳点，于是应用S变换再将平差结果转换到新的拟稳基准点上去，所以分析将是反复迭代进行的。

二、多期观测值同时平差的数学模型

考虑到两期或多期摄影测量观测值并不是完全独立的。例如，两期观测用的像片是由同样的相机和底片材料获得的，而且也可能由同一作业员在同一仪器上量测的，所以系统误差有很多是相同的。而且拟稳点坐标未知数也是相同的，应当有相同的平差坐标，所以应当用整体平差同时处理多期观测值。

以两期观测值为例，有下列数学模型：

$$\left.\begin{aligned}
V^{(1)} &= A^{(1)}t^{(1)} + B^{(1)}X_1^{(1)} + C^{(1)}X_2 + D^{(1)}S + E^{(1)}S^{(1)} - l^{(1)},\ P_1^{(1)}\\
V^{(2)} &= A^{(2)}t^{(2)} + B^{(2)}X_1^{(2)} + C^{(2)}X_2 + D^{(2)}S + E^{(2)}S^{(2)} - l^{(2)},\ P_1^{(2)}\\
V_d &= G^T X_2 - 0,\ P_d = I\\
V_S &= S - O,\ P_S\\
V_S^{(1)} &= S^{(1)} - O,\ P_S^{(1)}\\
V_S^{(2)} &= S^{(2)} - O,\ P_S^{(2)}
\end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}38)$$

式中：$t^{(1)}$和$t^{(2)}$为两期的像片定向未知数向量；

$X_1^{(1)}$和$X_1^{(2)}$为两期动点坐标未知数改正数向量；

X_2为两期中的拟稳点坐标未知数改正数向量；

S为两期中相同的系统误差附合参数向量；

$S^{(1)}$和$S^{(2)}$为两期中变化着的系统误差附加参数向量。

在这样的整体平差中，既考虑到了两期观测中不动点坐标应当相同的条件，又考虑到了动点在两期中应有不同的坐标值；既考虑到了系统误差中相同的部分，也考虑到了其中变化的部分。而且平差的多余观测数将增加，因此，平差的几何强度将得到改善。

同样，可以对平差结果进行一般假设检验，其中最典型的是对$d = X_1^{(1)} - X_1^{(2)}$是否显著进行检验。检验仍利用式（16-32）和式（16-35）。如果肯定了变形是显著的，则按上述变形分析方法由式（16-37）中确定具体的形变特征。

三、摄影测量自由网平差的近似解法

在摄影测量自由网平差的解算过程中，由于附加条件G矩阵的引入，使得法方程式系数值$(A^T PA + GG^T)$成为一个满阵，它会改变原来法方程式的带状镶边结构。这样当未知数较多时，对计算机的内存要求就很高，而且解算工作量也要明显增加。能否找到简便的、快速的近似解法呢？下面介绍两种可行的方法，其特点均可以利用已有的平差程序。

（一）全部未知数作为带小权的观测值（岭估计法）

为了简化起见，直接从式（16-4a）出发，秩亏网的误差方程式为

$$X = A\hat{X} - l\ ,\ P\ ,\ R(A) < u \qquad (16\text{-}4a)$$

由于A^TPA没有凯莱逆，按自由网平差原理需要用§16.2中所介绍的方法处理。此时从快速处理角度看，可以从改善A^TPA的状态数使其不奇异，便可得到唯一解。如果将所有未知数视为带小权λ（$\lambda > 0$）的观测值，则可列出下列误差方程式

$$V_X = \hat{X} - O\ ,\ P_X = \lambda \qquad (16\text{-}39)$$

则可得到法方程式为：

$$\hat{X} = (A^TPA + \lambda E)^{-1}A^TPl = (N + \lambda E)^{-1}A^TPl \qquad (16\text{-}40)$$

由于N矩阵有秩亏，为半正定矩阵，所以$\lambda_{N_{min}} = 0$，但是$\lambda_{(N+\lambda E)_{min}} = \lambda > 0$，所以式（16-40）中（$N + \lambda E$）矩阵为正定矩阵。由于$\lambda$值很小，对估值造成的偏差是可以忽略的。

从解决病态方程出发，式（16-40）的解还可理解为岭估计。如果将λ视为变量，则可将它视为阻尼最小二乘解法，λ值可用相应公式递推迭代计算。

（二）控制点漂移法（控制点带小权法）

在许多情况下，摄影测量自由网平差时仍有控制点，它们用来计算坐标未知数初值。但是，为了使网的平差不受控制点误差的影响和为了获得均匀的平差精度，人们仍要进行自由网平差。在这样前提下，可以仍列出控制点的误差方程式，但是给它以一个很小的权。从理论上讲，如果权为零，就是自由网平差，但这会导致法方程式系数阵秩亏。

如果将控制点给予一个小权，平差后便得到相应改正数，以改正后的控制点坐标为下步平差的依据，这样一步步迭代，控制点位置就会发生漂移，起到近似自由网平差的作用。

这些近似自由网平差方法可以直接利用现有的程序，不增加计算工作量，从实用观点讲是很方便的。表16-4-2列出用各种不同方法在不同初值下对一模拟区域网平差的结果。

不同自由网平差方法结果的比较　　表 16-4-2

平差方式		$\hat{\sigma}_0$估值（m）	（误差椭圆长短半轴比）$_{max}$	检查点均方根误差（m）			
				μ	μ_X	μ_Y	μ_Z
高精度初值	用控制点	0.256	21.63	0.341	0.079	0.110	0.313
	自由网	0.152	4.47	0.201	0.088	0.099	0.151
	岭估计	0.082	3.31	0.051	0.027	0.023	0.036
	控制点漂移	0.330	4.26	0.293	0.106	0.121	0.245
低精度初值	用控制点	0.256	21.63	0.341	0.079	0.110	0.313
	自由网	0.164	5.62	0.538	0.146	0.160	0.493
	岭估计	0.149	4.91	0.711	0.314	0.300	0.563
	控制点漂移	0.329	4.26	0.293	0.107	0.120	0.244

注：$\mu^2 = \mu_X^2 + \mu_Y^2 + \mu_Z^2$

表中高精度初值系在理论地面坐标值上加上+2cm中误差的随机正态分布误差，而低精度初值是由航带法平差求得，其中误差约为±2m。

从表中看出：（1）自由网严格或近似平差可以极大地改善摄影测量网点位测定精度的均匀性；（2）严格自由网和岭估计法的结果均受到未知数初值的很大影响。因此可以说，自由网平差实质上是在未知数初值下的最小二乘、最小范数解。在实际应用中应注意保证其初值的尽可能准确；（3）使用控制点的经典平差和控制点漂移法的近似自由网平差不受初值的影响。因此，在初值精度低时，用控制点漂移法是有利的。

§16.5 摄影测量自由网平差应用举例

下面举几个典型的摄影测量自由网平差实例。

一、卡尔加里大学对滑坡进行的摄影测量变形观测

1982—1983年，由卡尔加里大学进行的变形测量航测试验得到了表16-5-1的结果。

加拿大卡尔加里大学的试验结果

（相对航高H=32mm，RC8，f=152mm）　　表16-5-1

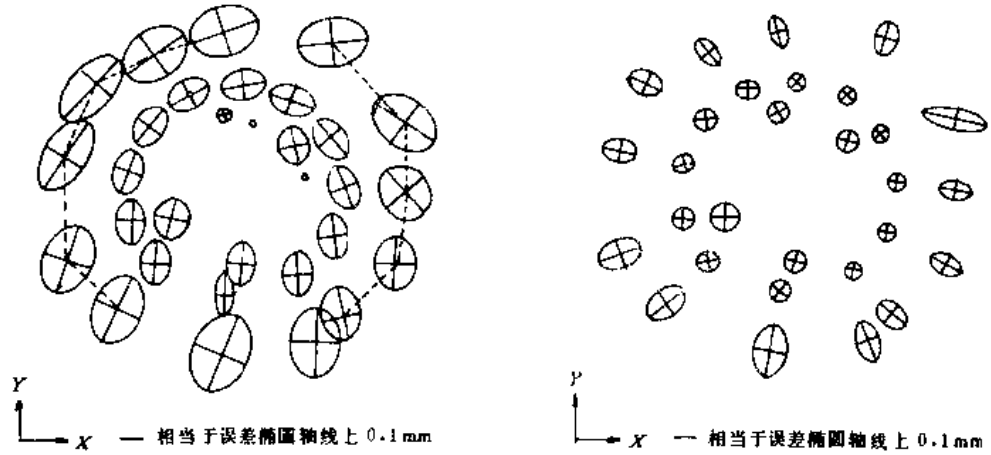
参数		第1期（1982）	第2期（1983）	1+2期（两期联合平差）
平均像片比例尺		1:23.60	1:2680	1:2550
像片数目		11	15	26
物点数目		20	19	29
像点坐标改正数中误差		±2.2μm	±2.1μm	±2.2μm
中误差	$M_{\text{检}}$	±4.1mm	±3.9mm	±3.4mm
	M_{XY}	±2.9mm	±2.9mm	±2.3mm
	M_Z	±5.8mm	±5.6mm	±5.1mm
协因数阵中最大最小特征值比值开方根		8.7	9.1	8.1
自由度（r）		223	312	552

通过变形分析发现有显著移位的点有8个，其位移值为1.9～6.3cm，其中最大一点的位移为d=6.3cm，方位角为246°，而用物理方法实地测得该点位移为d=6.2cm，方位角250°，两者结果基本一致。

二、自由网平差与固定网平差的对比试验

德国波恩大学曾对一圆形工业设备进行摄影，然后用自由网和固定网进行了两组平差，

平差后绘出各点的误差椭圆，从中明显地看出自由网平差的优点是：误差分布均匀，总体误差小。图16-5-1为带有附合信息的固定网（PP方案），以及自由网（FN方案）的平差结果。



（a） PP方案　　（b） FN方案

图 16-5-1

在固定网方案中包括的附合信息有：

——已知任意一个平面控制点（确定网的X、Y方向上的平移量），在图16-5-1a中用粗线表示该点的误差椭圆的两个半轴；

——一个天顶距或某一个点的X或Y坐标，以确定网绕Z轴的旋转。在图中也用粗线表示该点的半轴；

——至少还应引入三个水准点，用以确定Z坐标和网的水平面。图中用粗圆点表示；

——测定一段距离，用以确定比例尺。图中用点虚线表示。

而自由网平差不利用任何附合信息，因此起始数据秩亏为7。

两种平差方案的精度对照列于表16-5-2。

波恩大学对一圆形设备进行固定网与自由网平差的结果比较　　表 16-5-2

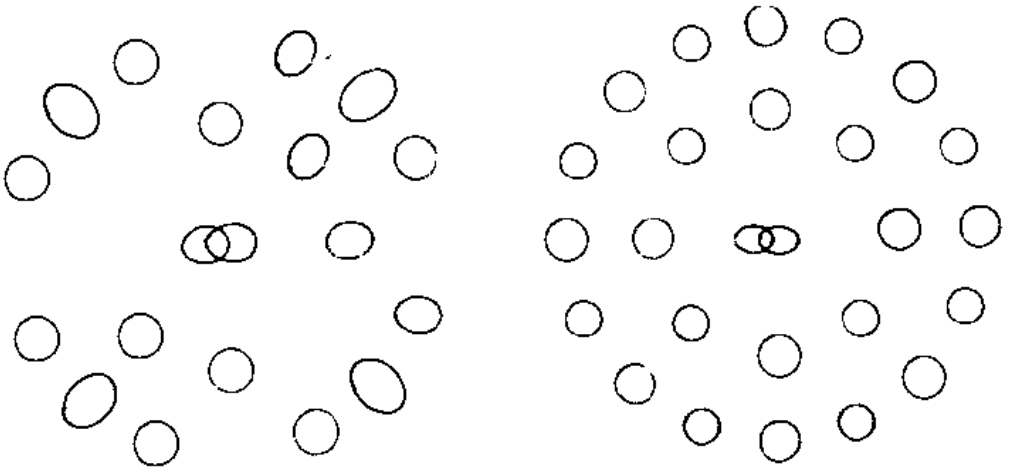
计算方案	σ_0 (μm)	σ_x (mm)	σ_y (mm)	σ_z (mm)	Max(X) (mm)	Max(Y) (mm)	Max(Z) (mm)
PP方案	1.9	0.09	0.11	0.31	0.20	0.18	0.72
FN方案	1.9	0.06	0.05	0.23	0.13	0.12	0.52

从表16-5-2和图16-5-1结果可以看出自由网平差的效果。

类似的例子还有郑州测绘学院对卫星地面站Cassegrain通讯天线抛物反射面形状的测定。

作业中在天线反射面上有300多个待测点，用1318摄影机采用交向摄影方式得到五张像片。用PSK--2量测像点坐标。为了检验自由网平差的实际精度，在天线的周边和天线中心的纵深方向上布设了21个控制点。天线口径为15m。

在无控制点情况下，为了消除比例尺秩亏，要引入物方距离。从理论上只要引入一个距离即可，但由于像片系统误差的存在，最好引入一定数量均匀分布的距离。在试验中引入了六个距离。图16 5 2给出了经典有控制的光束法平差和秩亏自由网平差后在检查点上的误差椭圆，其残差求出的中误差则列于表16-5-3中。



（a）固定网　　（b）自由网（有六个距离观测值）

图 16 5-2

郑州测绘学院对天线抛物反射面的固定网与自由网平差结果（由20个检查点计算）　　表 16-5-3

计 算 方 案	σ_X (mm)	σ_Y (mm)	σ_Z (mm)	$(a/b)_{max}$
1.控制点满秩平差	0.177	0.168	0.189	1.44
2.自由网平差（六个距离）	0.142	0.137	0.159	1.12
3.自由网平差（一个距离）	0.174	0.143	0.171	2.14

试验中也显示了自由网平差的优越性。

本章习题与思考题

1.用摄影测量方法进行变形观测有哪些好处？其主要应用前景如何？

2.什么叫满秩平差？什么叫秩亏平差？为什么自由网平差不处理图形条件秩亏？

3.列出测量平差各种网形的起始数据个数，并说明它们在平差中起何作用。

4.简述秩亏自由网平差的原理。并从附加条件法（或称伪观测值法）导出平差的未知数解和其协方差阵表达形式。

5.什么叫自由网拟稳平差？什么叫 S 变换？从 S 矩阵特性出发解释 S 变换与先前的参考基准无关，

而仅与欲变换后的参考基准有关。

6.为什么在摄影测量自由网平差中多采用拟稳平差?

7.试解释摄影测量秩亏自由网平差的几何意义。

8.自由网摄影测量平差结果与未知数初始值有无关系?理由何在?

9.试比较对多期摄影测量观测值进行分别和整体自由网平差的各自特点与利弊。

10.如何根据两期观测值平差后得到的差向差 $d = X^{(1)} - X^{(2)}$ 来作变形分析?为什么要作必要的统计检验?

11.在什么情况下可以用近似解法进行摄影测量自由网平差?并简述这些近似方法的原理。

12.从书中列举的几个应用示例(§16.5),请总结出摄影测量自由网平差的主要优点。

主要参考文献

[1] 王之卓：摄影测量原理。测绘出版社，1979年。

[2] 王之卓：摄影测量原理续编。测绘出版社，1986年。

[3] 钱曾波：解析空中三角测量基础。测绘出版社，1980年。

[4] 黄世德主编：航空摄影测量学（上、下册）。测绘出版社，1986年，1987年。

[5] 李德仁：误差处理和可靠性理论。测绘出版社，1988年。

[6] 郑州测绘学院：航空摄影测量学（下册）。

[7] 陶本藻：自由网平差与变形分析。测绘出版社，1984年。

[8] Konecny/Lehmann: Photogrammetrie. Walter de Gruyter-Berlin New York, 1984。

[9] Schwidefsky/Ackermann: Photogrammetrie. B.G.Teubner, Stuttgart, 1976（测绘出版社有中译本，1984年）。

[10] Kraus: Photogrammetrie (Band1, 2). Dümmler, Bonn, 1984（测绘出版社有Band2的中译本，1989年）。

[11] ASPRS: Manual of Photogrammetry, fourth edition, 1980.

[12] 朱华统：大地坐标系的建立。测绘出版社，1986年。

[13] 王广运等：GPS精密测地系统原理。测绘出版社，1988年。

[14] 徐前徽：传感技术。武汉测绘科技大学讲义，1987年。

[15] 王之卓：自由网平差用于摄影测量变形观测。《广东测绘》1987，第二期。

[16] 李德仁等：SPOT影像的光束法平差。《测绘学报》，第十七卷，第3期，1988年。

[17] 李德仁等：SPOT影像的解析摄影测量处理。《武汉测绘科技大学学报》，第十三卷，第四期，1988。

[18] 张森林：三行线阵扫描数据的平差方案及精度分析。《武汉测绘科技大学学报》，第十三卷，第四期，1988年。

[19] 李德仁等：联合平差中大地测量观测值的数学模型。ZPF中文特刊，1990年。

[20] 张永生：近景光束法自由网联合平差的实际精度。《武汉测绘科技大学学报》，第十四卷，第二期，1989年。

[21] G.Konecny et al: Evaluationof SPOT Imagery in Analytical Photogrammetric Instruments. Proceedings Intercommission Conference of Fast Processing of Photogrammetric Data. Interlaker, Switserland, 1987.

[22] S.Zinndorf: 自由网平差在近景摄影测量中的应用。《武测译文》，1986，第一期。

[23] F.Ackermann: GPS对摄影测量的影响。《测绘译丛》1989，第三期。

[24] M.Michaelis: Untersuchungen zum topographischen Potential von Daten des Erderkundungssatelliten SPOT mit Hilfe digitaler Bildverarbeitungsmethoden. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungs wesen der Universität Hannover. Nr.164, Hannover 1989.

[25] 张森林：罗德里格矩阵在共线方程严密解法中的应用。《武汉测绘科技大学学报》，第十二卷，第一期，1987。

[26] 郑肇葆：数学规划在测绘学中应用。测绘出版社，1992年。

本书中参考和引用了国内外有关摄影测量仪器厂家的各类解析摄影测量仪器资料，谨致谢意！